【中３数学】図形の相似

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 相似 1

1.1 相似な図形 1

1.2 線分の比と相似比 3

1.3 三角形の相似条件 6

1.4 三角形の相似の証明 9

1.5 直角三角形と相似 11

1.6 相似と線分の長さ 13

1.7 縮図の利用 15

2 図形の比 16

2.1 平行線と線分の比 16

2.2 線分の比と平行線 19

2.3 連比の求め方 21

2.4 中点連結定理 23

2.5 内角の 2 等分線と線分の比 25

2.6 外角の 2 等分線と線分の比 27

2.7 メネラウスの定理 29

3 線分比と面積比・体積比 31

3.1 等高な三角形の面積比 31

3.2 1 角共有の三角形の面積比 32

3.3 補角をなす三角形の面積比 34

3.4 相似な三角形の面積比 36

3.5 底辺の等しい三角形の面積比 38

3.6 チェバの定理 40

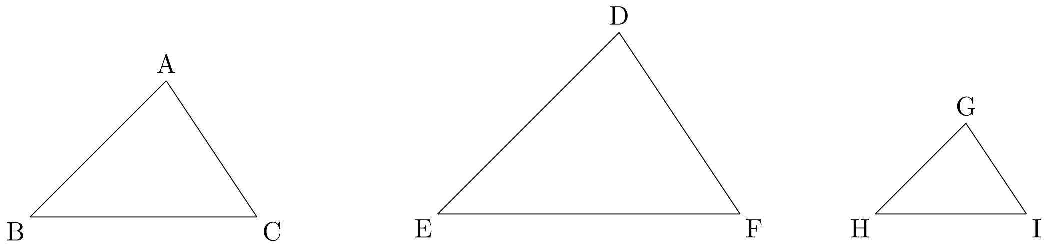
3.7 相似な立体の体積比 42

1 相似

1.1 相似な図形

ある図形を形を変えずに、一定の割合で大きくすることを**拡大**する、小さくすることを**縮小**するといい、拡大した図形を**拡大図**、縮小した図形を**縮図**といいます。

(i) 基準となる図 (ii) 拡大図 (iii) 縮図



ある図形を形を変えずに拡大・縮小したとき、その図形ともとの図形とは、たがいに**相似**であるといいます。2 つの図形が相似であることは、英単語の

similar : 相似の、似ている

の頭文字「s」を横にして、「∽ 」という記号を用いて表します。$\triangle$ABC と $\triangle$DEF が相似である場合には

$\triangle$ABC ∽ $\triangle$DEF

と表します。このとき、合同の場合と同じように、対応する頂点を順に並べて書きます。また、相似な多角形は、もとの図形と形が変わらないので次の性質があります。

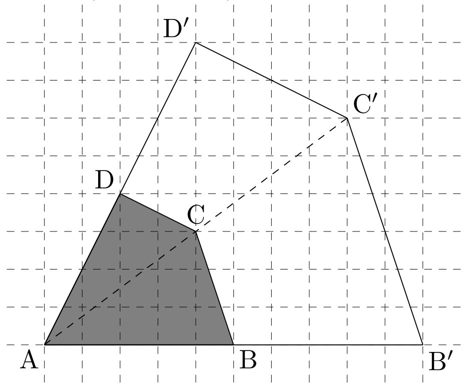
- **対応する角の大きさはそれぞれ等しい** : $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$
- **対応する辺の長さの比はすべて等しい** : AB : DE = BC : EF = CA : FD

【例題 1 − 1】

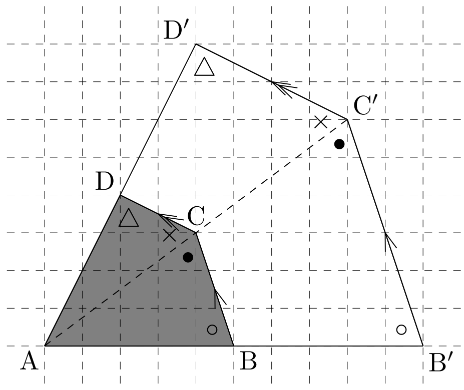
下の図は、四角形 ABCD をある割合で拡大し、AB′C′D′ としたものです。次の問いに答えなさい。

(1) 四角形 AB′C′D′ と四角形 ABCD とで、たがいに等しい角はどれとどれですか。

(2) 辺の長さの比 AB′ :AB, B′C′ :BC, C′D′ :CD, D′A :DA を求めなさい。



＜解説＞



(1) $\angle$A は 2 つの四角形に共通な角なので、

$$\angle \mathrm{D'AB'} = \angle \mathrm{DAB} \ \cdots\cdots\ ①$$

次に B′C′ は左に 1 つ進むと上に 3 つ上がっていて、BC も同じになっています。つまり、

$$\mathrm{B'C'} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}$$

また、C′D′ は左に 2 つ進むと上に 1 つ上がっており、CD も同じです。よって、

$$\mathrm{C'D'} \mathbin{/\!/} \mathrm{CD}$$

です。
このことから、同位角は等しいので、

$$\angle \mathrm{AB'C'} = \angle \mathrm{ABC} \ \cdots\cdots\ ②$$
$$\angle \mathrm{B'C'A} = \angle \mathrm{BCA} \ \cdots\cdots\ ③$$
$$\angle \mathrm{D'C'A} = \angle \mathrm{DCA} \ \cdots\cdots\ ④$$
$$\angle \mathrm{C'D'A} = \angle \mathrm{CDA} \ \cdots\cdots\ ⑤$$

となります。ここで、

$$\angle \mathrm{B'C'D'} = \angle \mathrm{B'C'A} + \angle \mathrm{D'C'A}$$
$$\angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{DCA}$$

であるので、③, ④より

$$\angle \mathrm{B'C'D'} = \angle \mathrm{BCD} \ \cdots\cdots\ ⑥$$

よって、①, ②, ⑤, ⑥より、四角形 AB′C′D′ と四角形 ABCD とでたがいに等しい角は、

$$\angle \mathrm{D'AB'} = \angle \mathrm{DAB}, \qquad \angle \mathrm{AB'C'} = \angle \mathrm{ABC}, \qquad \angle \mathrm{B'C'D'} = \angle \mathrm{BCD}, \qquad \angle \mathrm{C'D'A} = \angle \mathrm{CDA}$$

(2) 図から、

$$\mathrm{AB'} = 10\ 目盛り, \qquad \mathrm{AB} = 5\ 目盛り$$

であるので、AB′ は AB の 2 つ分です。同様にして、B′C′, C′D′, D′A もそれぞれ BC, CD, DA の 2 つ分になります。つまり、

$$\mathrm{AB'} : \mathrm{AB} = 2 : 1, \qquad \mathrm{B'C'} : \mathrm{BC} = 2 : 1, \qquad \mathrm{C'D'} : \mathrm{CD} = 2 : 1, \qquad \mathrm{D'A} : \mathrm{DA} = 2 : 1$$

になります。

1.2 線分の比と相似比

相似な多角形では、対応する辺（線分）の長さの比はすべて等しくなり、その対応する部分の長さの比のことを**相似比**といいます。

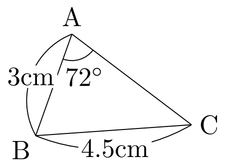
【例題 1 − 2】

下の 3 つの三角形 △ABC, △DEF, △GHI は相似です。次の問いに答えなさい。

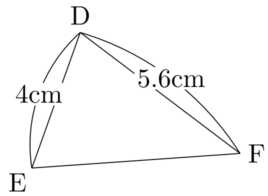
(1) △DEF, △GHI の △ABC に対する相似比を求めなさい。

(2) 図の中に記入されていない辺の長さや角の大きさを求めなさい。

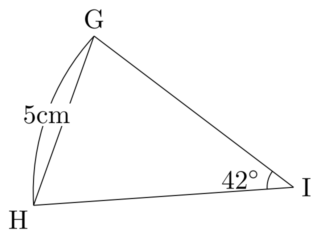
① △ABC



② △DEF



③ △GHI



＜解説＞

相似であることを表すときには、合同のときと同じように、対応する頂点の順に並べて書き表します。そのため、△ABC, △DEF, △GHI が相似であるとき、

頂点 A と頂点 D と頂点 G,　　頂点 B と頂点 E と頂点 H,　　頂点 C と頂点 F と頂点 I

がそれぞれ対応することになります。

(1) 相似比を求めるので、対応する辺の長さの比を見つけます。相似な多角形では、対応する辺の長さの比が等しいので、$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$ より、

$$DE : AB = EF : BC = FD : CA$$

この中で、図から $DE = 4$ cm, $AB = 3$ cm であることがわかるので、

$$DE : AB = 4 : 3$$

となります。このことから、△DEF の △ABC に対する相似比は

$$4 : 3$$

になります。
同じようにして、$\triangle GHI \backsim \triangle ABC$ より、

$$GH : AB = HI : BC = IG : CA$$

この中で、図から $\mathrm{GH} = 5$ cm, $\mathrm{AB} = 3$ cm であることがわかるので、

$$\mathrm{GH} : \mathrm{AB} = 5 : 3$$

となります。このことから、$\triangle\mathrm{GHI}$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ に対する相似比は

$$5 : 3$$

(2) (1) の結果から、

$$\mathrm{DE} : \mathrm{AB} = \mathrm{EF} : \mathrm{BC} = \mathrm{FD} : \mathrm{CA} = 4 : 3 \ \cdots\cdots \ ①$$

$$\mathrm{GH} : \mathrm{AB} = \mathrm{HI} : \mathrm{BC} = \mathrm{IG} : \mathrm{CA} = 5 : 3 \ \cdots\cdots \ ②$$

となります。①より

$$\begin{aligned} \mathrm{FD} : \mathrm{CA} &= 4 : 3 \\ 5.6 : \mathrm{CA} &= 4 : 3 \\ \mathrm{CA} \times 4 &= 5.6 \times 3 \\ \mathrm{CA} &= \cancel{5.6}^{1.4} \times 3 \times \frac{1}{\cancel{4}_1} = 4.2 \ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \mathrm{EF} : \mathrm{BC} &= 4 : 3 \\ \mathrm{EF} : 4.5 &= 4 : 3 \\ \mathrm{EF} \times 3 &= 4.5 \times 4 \\ \mathrm{EF} &= \cancel{4.5}^{1.5} \times 4 \times \frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

そして、②より

$$\begin{aligned} \mathrm{HI} : \mathrm{BC} &= 5 : 3 \\ \mathrm{HI} : 4.5 &= 5 : 3 \\ \mathrm{HI} \times 3 &= 4.5 \times 5 \\ \mathrm{HI} &= \cancel{4.5}^{1.5} \times 5 \times \frac{1}{\cancel{3}_1} = 7.5 \ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \mathrm{IG} : \mathrm{CA} &= 5 : 3 \\ \mathrm{IG} : 4.2 &= 5 : 3 \\ \mathrm{IG} \times 3 &= 4.2 \times 5 \\ \mathrm{IG} &= \cancel{4.2}^{1.4} \times 5 \times \frac{1}{\cancel{3}_1} = 7 \ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

となります。
さらに、相似な多角形の対応する角の大きさはそれぞれ等しいので、

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D} = \angle\mathrm{G}, \qquad \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{E} = \angle\mathrm{H}, \qquad \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{F} = \angle\mathrm{I}$$

このことから、図より

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D} = \angle\mathrm{G} = 72^\circ$$

$$\angle C = \angle F = \angle I = 42^\circ$$

また、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$
$$72^\circ + \angle B + 42^\circ = 180^\circ$$
$$\angle B + 114^\circ = 180^\circ$$
$$\angle B = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$$

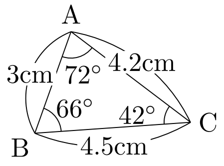
よって、

$$\angle B = \angle E = \angle H = 66^\circ$$

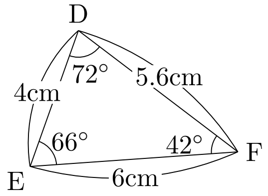
となります。

以上より、△ABC, △DEF, △GHI の辺の長さと角の大きさは、それぞれ次のようになります。

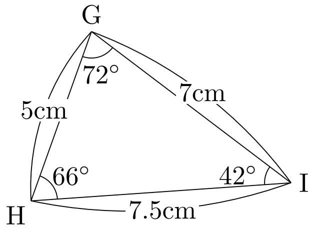
① △ABC



② △DEF



③ △GHI



1.3 三角形の相似条件

2 つの三角形が合同になるための条件は、

① 3 辺がそれぞれ等しい
② 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい
③ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい

という 3 つの場合がありました。合同な図形は、

- 対応する線分の長さ
- 対応する角の大きさ

がそれぞれ等しくなりますが、相似な図形では、

- 対応する線分の長さの比
- 対応する角の大きさ

がそれぞれ等しくなります。このことから、合同な図形と相似な図形では、

「対応する線分の長さ」と「対応する線分の長さの比」

という部分が異なるので、三角形の合同条件の部分を

「対応する線分の長さ」 $\longrightarrow$ 「対応する線分の長さの比」

という意味になるように変えることで、三角形の合同条件を三角形の相似条件に変えることができます。つまり、三角形の相似条件は、

① $\underline{\text{3 辺}}$ がそれぞれ等しい $\longrightarrow$ $\underline{\text{3 組の辺の比}}$ がすべて等しい
② $\underline{\text{2 辺}}$ とその間の角がそれぞれ等しい $\longrightarrow$ $\underline{\text{2 組の辺の比}}$ とその間の角がそれぞれ等しい
③ $\underline{\text{1 辺}}$ とその両端の角がそれぞれ等しい $\longrightarrow$ 2 組の角がそれぞれ等しい

となります。③の条件は、「1 組の辺の比とその両端の角がそれぞれ等しい」としたくなりますが、$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ であるとき、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF}$$

のように 2 組の辺の比が等しいことは示せますが、1 組の辺の比は

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DE}$$

のようになってしまうので、「1 組の辺の比が等しい」という言葉は、意味のわからないものになってしまいます。そのため、その部分の言葉は除く必要があるので注意してください。

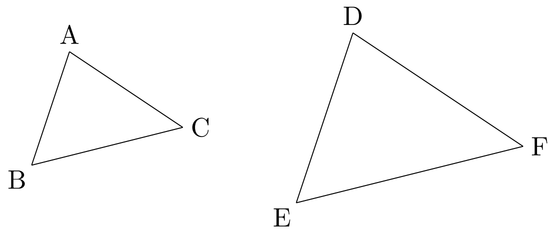
【例題 1 − 3】

$\triangle$ABC と $\triangle$DEF があって、次の (1), (2) がわかっているとき、あとどんなことがわかると、

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

になりますか。

(1) $\angle A = \angle D$　　(2) $AB : DE = AC : DF$



＜解説＞

三角形の相似条件

① 3 組の辺の比がすべて等しい
② 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
③ 2 組の角がそれぞれ等しい

のうち、どの条件が使えるのかを考えます。

(1) 3 つの三角形の相似条件のうち、角の条件が含まれているのは、②と③です。そこで、それぞれの場合において、必要な残りの条件を考えます。

(i) 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとき

$\angle A = \angle D$ という条件が与えられているので、これが 2 辺の間の角になるように辺を選びます。図より、$\triangle$ABC では、辺 AB と辺 AC、$\triangle$DEF では、辺 DE と辺 DF になるので、2 組の辺の比が等しくなるとき、$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ になります。よって、

$$AB : DE = AC : DF$$

(ii) 2 組の角がそれぞれ等しいとき

$\angle A = \angle D$ という条件が与えられているので、もう 1 組の角が等しくなるとき、$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ になります。それぞれの三角形には、残りの角が 2 つずつあるので、

$$\angle B = \angle E \qquad \text{または} \qquad \angle C = \angle F$$

以上より、$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ となるための残りの条件は

- $AB : DE = AC : DF$
- $\angle B = \angle E$
- $\angle C = \angle F$

のいずれかになります。

(2) 3つの三角形の相似条件のうち、辺の条件が含まれているのは①と②です。そこで、それぞれの場合において、必要な残りの条件を考えます。

(i) 3組の辺の比がすべて等しいとき

2組の辺の比が等しいという条件 $\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = \mathrm{AC} : \mathrm{DF}$ が与えられているので、3組の辺の比がすべて等しくなるように、もう1組の辺 $\mathrm{BC} : \mathrm{EF}$ も等しくなれば、$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ となります。よって、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF} \qquad \text{または} \qquad \mathrm{AC} : \mathrm{DF} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF}$$

(ii) 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとき

2組の辺の比が等しいという条件 $\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = \mathrm{AC} : \angle\mathrm{DF}$ が与えられているので、その間の角も等しくなれば、$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ となります。よって、

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$$

以上より、$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{DEF}$ となるための残りの条件は

- $\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF}$
- $\mathrm{AC} : \mathrm{DF} = \mathrm{BC} : \mathrm{EF}$
- $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$

のいずれかになります。

1.4 三角形の相似の証明

三角形の合同の証明は、主に次のような手順で行いました。

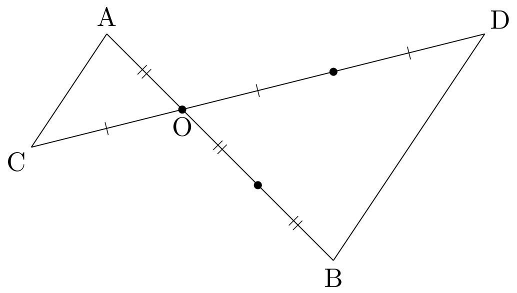
(i) どの 2 つの三角形が合同であることを示すのか
(ii) 仮定や図形の性質から等しいといえる辺や角は何か
(iii) 三角形の合同条件のどれを使うのか
(iv) 結論を示す

「三角形の合同条件」を利用して「三角形の相似条件」を考えたように、三角形の相似の証明手順も、三角形の合同の証明手順から、次のようになると考えることができます。

(i) どの 2 つの三角形が相似であることを示すのか
(ii) 仮定や図形の性質から等しいといえる辺の比や角は何か
(iii) 三角形の相似条件のどれを使うのか
(iv) 結論を示す

【例題 1 − 4】

下の図のように、線分 AB の 3 等分した点と、線分 CD の 3 等分した点が O で交わっているとき、$\triangle AOC \backsim \triangle BOD$ であることを証明しなさい。



<解説>

(i) どの 2 つの三角形が相似であることを示すのか
問題文ですでに与えられているように、$\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ という 2 つの三角形が相似になることを示します。
(ii) 仮定や図形の性質から等しいといえる辺の比や角は何か
点 O は線分 AB を 3 等分した点であるので、

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : 2$$

です。また、点 O は線分 CD を 3 等分した点でもあるので、

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OD} = 1 : 2$$

となります。このことから

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \mathrm{OC} : \mathrm{OD} = 1 : 2$$

となり、2 組の辺の比が等しいことがわかります。

(iii) 三角形の相似条件のどれを使うのか

2 組の辺の比が等しいとき、3 つの相似条件のうち使えそうな条件は、「3 組の辺の比がすべて等しい」条件か、「2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」条件になります。しかし、辺 AC と辺 BD の条件は何も与えられていないので、「3 組の辺の比がすべて等しい」ことを示すのは難しそうです。そこで、「2 辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」ことを示します。

(iv) 結論を示す

問題文で指示されているように、

$$\triangle \mathrm{AOC} \backsim \triangle \mathrm{BOD}$$

を示します。

＜証明＞

$\triangle$AOC と $\triangle$BOD で、仮定から

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = \mathrm{OC} : \mathrm{OD} = 1 : 2 \ \cdots\cdots \ ①$$

また、対頂角は等しいので、

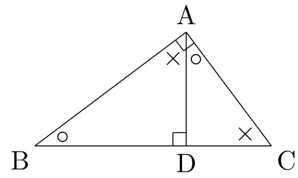
$$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{BOD} \ \cdots\cdots \ ②$$

①, ②より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle \mathrm{AOC} \backsim \triangle \mathrm{BOD}$$

（証明終わり）

1.5　直角三角形と相似



右の図のように、$\angle A = 90^\circ$ の直角三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線をひき、その交点を D とすると、

$$\triangle ABC,\quad \triangle DBA,\quad \triangle DAC$$

という 3 つの直角三角形を作ることができます。

このとき、$\triangle ABC$ と $\triangle DBA$ において、$\angle B$ は共通なので、

$$\angle B = \angle B \ \cdots\cdots \text{①}$$

また、

$$\angle CAB = \angle ADB = 90^\circ \ \cdots\cdots \text{②}$$

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$$

同じようにして、$\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ において、$\angle C$ は共通なので、

$$\angle C = \angle C \ \cdots\cdots \text{③}$$

また、

$$\angle CAB = \angle CDA = 90^\circ \ \cdots\cdots \text{④}$$

③, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$$

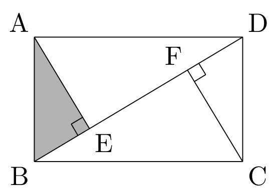
となります。

このように、直角三角形に垂線をひいて新たな直角三角形を作ると、

$$\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAC$$

のように、相似な三角形が現れます。

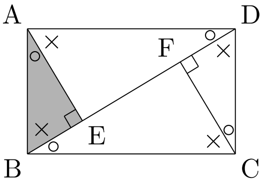
【例題 1 − 5】



右の図は、長方形 ABCD の対角線 BD に、頂点 A, C からそれぞれ垂線 AE, CF をひいたものです。このとき、$\triangle ABE$ と相似な三角形をすべて答えなさい。

ただし、合同な図形も、相似比が 1 である相似な図形と考えます。

＜解説＞



$\angle\mathrm{EAB} = \circ$, $\angle\mathrm{ABE} = \times$ とすると、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{EAB} + \angle\mathrm{ABE} + \angle\mathrm{BEA} &= 180^\circ \\ \circ + \times + 90^\circ &= 180^\circ \\ \circ + \times &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

という関係が成り立つので、このことから、

$$\angle\mathrm{EAB} = \angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{FCD} = \angle\mathrm{EDA} = \circ$$

$$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{BCF} = \angle\mathrm{CDF} = \angle\mathrm{DAE} = \times$$

となります。よって、2 組の角がそれぞれ等しくなる相似な三角形を選び出すと、

$\triangle\mathrm{DAE}$,　$\triangle\mathrm{DBA}$,　$\triangle\mathrm{CDF}$,　$\triangle\mathrm{BCF}$,　$\triangle\mathrm{BDC}$

相似になりそうな図形を見た目で判断することは大切ですが、与えられた図が正確であるとは限らないので、相似になりそうな図形を見つけたら、相似になる根拠も考えるようにしてください。

1.6　相似と線分の長さ

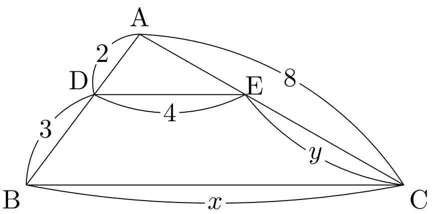
　線分の長さを求めるような問題では、図形の性質、相似、三平方の定理を利用することが多くあります。ここでは、相似を利用して線分の長さを求める問題の解き方の確認をしますが、主な手順は次の通りです。

(i) 求める線分の長さを含む図形と相似になりそうな図形を見つける。
(ii) 相似である根拠を確認する。
(iii) 対応する線分の長さについての式を立てる。

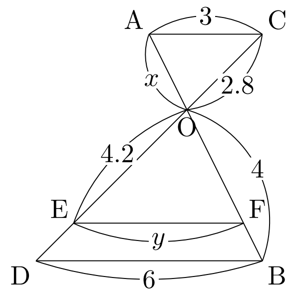
【例題 1 − 6】

次の図で、x, y の値をそれぞれ求めなさい。

(1) BC // DE

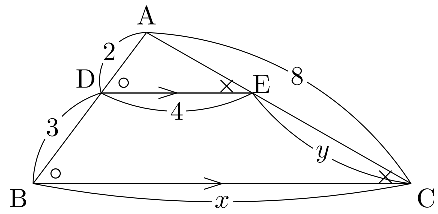


(2) AC // BD // EF



<解説>

(1) △ADE と △ABC で、平行線の同位角は等しいので、



$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ABC} \ \cdots\cdots \ ①$$
$$\angle \mathrm{DEA} = \angle \mathrm{BCA} \ \cdots\cdots \ ②$$

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle \mathrm{ADE} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$$

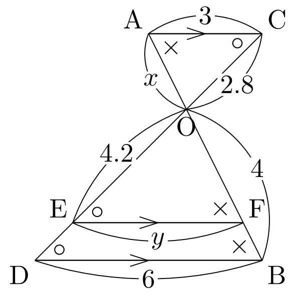
相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\begin{aligned} \mathrm{AD} : \mathrm{AB} &= \mathrm{DE} : \mathrm{BC} \\ 2 : (2+3) &= 4 : x \\ 2x &= 5 \times 4 \\ x &= 20 \times \frac{1}{2} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{AD} : \mathrm{AB} &= \mathrm{AE} : \mathrm{AC} \\ 2 : (2+3) &= (8-y) : 8 \\ 5(8-y) &= 2 \times 8 \\ 40 - 5y &= 16 \\ -5y &= 16 - 40 = -24 \\ y &= -24 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

(2) △OCA と △ODB で、平行線の錯角は等しいので、

$$\angle \mathrm{OCA} = \angle \mathrm{ODB} \quad \cdots\cdots ①$$
$$\angle \mathrm{CAO} = \angle \mathrm{DBO} \quad \cdots\cdots ②$$



①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle \mathrm{OCA} \backsim \triangle \mathrm{ODB}$$

相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\mathrm{AC} : \mathrm{BD} = \mathrm{AO} : \mathrm{BO}$$
$$\cancel{3}^1 : \cancel{6}^2 = x : 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

また、△OCA と △OEF で、平行線の錯角は等しいので、

$$\angle \mathrm{OCA} = \angle \mathrm{OEF} \quad \cdots\cdots ③$$
$$\angle \mathrm{CAO} = \angle \mathrm{EFO} \quad \cdots\cdots ④$$

③, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle \mathrm{OCA} \backsim \triangle \mathrm{OEF}$$

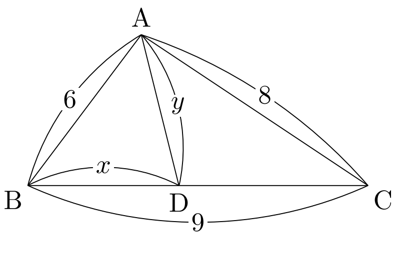
相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OE} = \mathrm{CA} : \mathrm{EF}$$
$$\cancel{2.8}^2 : \cancel{4.2}^3 = 3 : y$$
$$2y = 3 \times 3 = 9$$
$$y = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

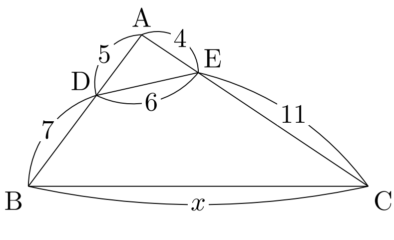
【演習 1 − 6】

次の図で、x, y の値をそれぞれ求めなさい。

(1) ∠BAD = ∠ACB



(2)

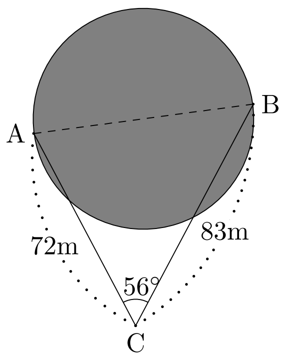


1.7 縮図の利用

直接長さを測ることが難しいようなものでは、その縮図を利用することで、おおよその長さを求めることができます。

【例題 1 − 7】

下の図のような円形の池の直径 AB を調べるため、池の手前に点 C を決め、AC, BC の長さ、∠ACB の大きさを測ったら、それぞれ 72 m, 83 m, 56° でした。
縮図によって、AB の長さを求めなさい。

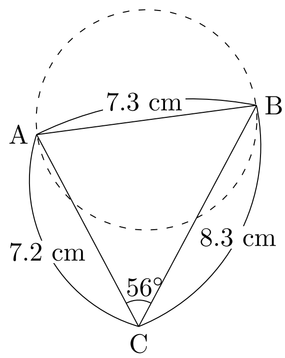


＜解説＞

与えられた条件の縮図を考えますが、問題で与えられている図は正確な図なのかどうかはわからないので、計算しやすいように自分で作図しておきます。そこで、ここでは 1 つの例として、

72 m (7200 cm) ⟶ 7.2 cm,　　83m (8300 cm) ⟶ 8.3 cm

のように対応させせた、1000 分の 1 の縮図を利用してみたいと思います。「2 辺とその間の角」についての条件が与えられているので、右図のように 1 つの三角形に特定できるはずです。そして、作図できた縮図から AB の長さを物差しで測ると「7.3 cm」となります。



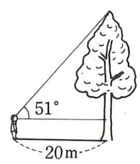
今は実際の長さと比べて 1000 分の 1 の縮図で考えているので、実際の長さはその 1000 倍。つまり、

7.3 cm ⟶ 7300 cm (73 m)

のようにして、池の直径 AB の長さは、およそ「73 m」であることがわかります。

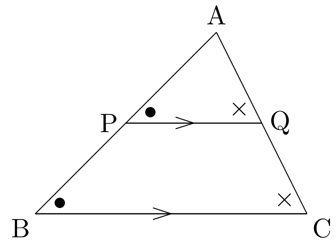
【演習 1 − 7】

ある人が木の高さを測るため、木の根元から 20 m 離れた地点から木の頂を見ると、仰角（水平面と、ものを見上げたときの視線の方向とのなす角）は 51° になりました。
この人の目の高さが 1.4 m であるとき、木の高さを縮図を利用して求めなさい。



2　図形の比

2.1　平行線と線分の比



右の図のように、△ABC の 2 辺 AB, AC 上に、PQ // BC となるように 2 点 P, Q をとります。

このとき、△APQ と △ABC で、PQ // BC より、同位角は等しいので、

$$\angle\mathrm{APQ} = \angle\mathrm{ABC} \ \cdots\cdots \ ①$$
$$\angle\mathrm{PQA} = \angle\mathrm{BCA} \ \cdots\cdots \ ②$$

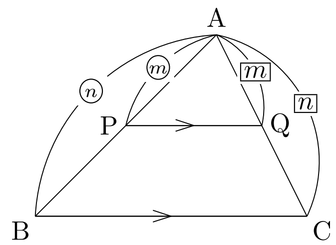
①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{APQ} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC} = \mathrm{PQ} : \mathrm{BC}$$

となります。



このとき、右の図のように、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC} = m : n$$

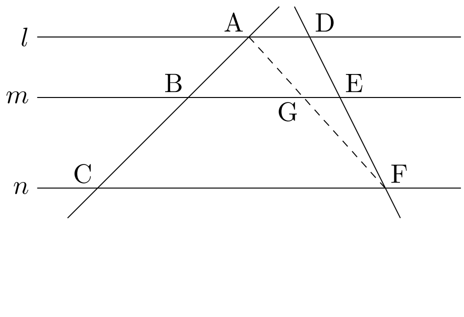
とすると、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : (n-m), \qquad \mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = m : (n-m)$$

となるので、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QC}$$

という関係が成り立ちます。



ここで、右の図のように、平行な 3 直線 l, m, n に 2 本の直線が交わり、その交点をそれぞれ A, B, C, D, E, F とします。さらに、点 A と点 F を結び、AF と直線 m との交点を G とすると、m // n より、

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{AG} : \mathrm{GF} \ \cdots\cdots \ ③$$

同様にして、l // m より、

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GF} = \mathrm{DE} : \mathrm{EF} \ \cdots\cdots \ ④$$

よって、③, ④より、

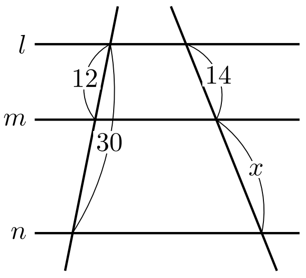
$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{DE} : \mathrm{EF}$$

という関係が成り立ち、以上のことから、平行線によって分割された線分の比は等しくなります。

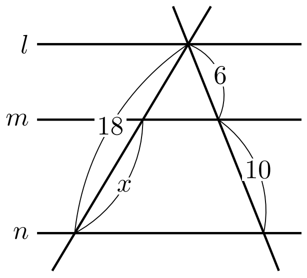
【例題 2 − 1】

平行な 3 直線 $l,\ m,\ n$ に 2 本の直線が交わるとき、x の値をそれぞれ求めなさい。

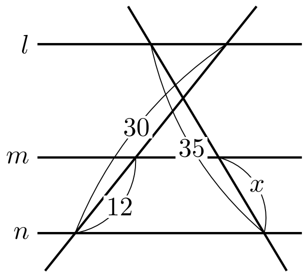
(1)



(2)



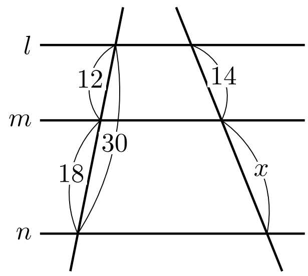
(3)



＜解説＞

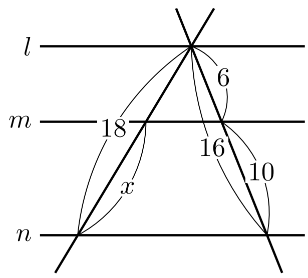
$l \parallel m \parallel n$ より、3 直線 $l,\ m,\ n$ によって分割された線分の長さの比は等しくなります。

(1) 直線 l と m によって分割された線分と、直線 m と直線 n によって分割された線分の比は等しくなるので、



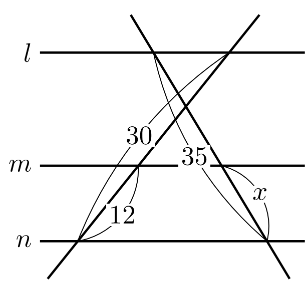
$$
\begin{aligned}
12 : (30-12) &= 14 : x \\
12x &= 18 \times 14 \\
x &= \cancel{18}^{3} \times \cancel{14}^{7} \times \frac{1}{\cancel{12}} \\
&= 21
\end{aligned}
$$

(2) 直線 l と n によって分割された線分と、直線 m と直線 n によって分割された線分の比は等しくなるので、



$$
\begin{aligned}
18 : x &= (6+10) : 10 \\
16x &= 18 \times 10 \\
x &= \cancel{18}^{9} \times \cancel{10}^{5} \times \frac{1}{\cancel{16}^{4}} \\
&= \frac{45}{4}
\end{aligned}
$$

(3) 直線 l と n によって分割された線分と、直線 m と直線 n によって分割された線分の比は等しくなるので、

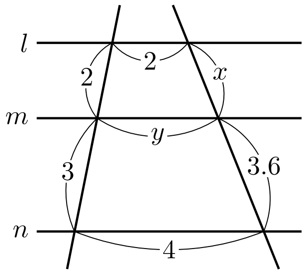


$$
\begin{aligned}
30 : 12 &= 35 : x \\
30x &= 12 \times 35 \\
x &= \cancel{12}^{2} \times \cancel{35}^{7} \times \frac{1}{\cancel{30}} \\
&= 14
\end{aligned}
$$

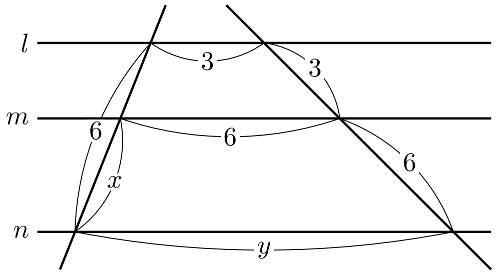
【演習 2 − 1】

平行な 3 直線 l, m, n に 2 本の直線が交わるとき、x, y の値をそれぞれ求めなさい。

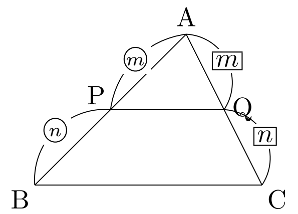
(1)



(2)



2.2 線分の比と平行線



右の図のように、△ABC の 2 辺 AB, AC 上に、それぞれ点 P, Q があるとします。このとき、AP : AB = AQ : AC であるとすると、△APQ と △ABC で、仮定より、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また、∠A は 2 つの三角形において共通な角であるので、

$$\angle\mathrm{PAQ} = \angle\mathrm{BAC} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①, ②より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{APQ} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{APQ} = \angle\mathrm{ABC}$$

よって、同位角が等しいので、

$$\mathrm{PQ} \mathbin{/\!/} \mathrm{BC}$$

という関係が成り立ちます。

また、AP : PB = AQ : QC であるとき、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = m : n$$

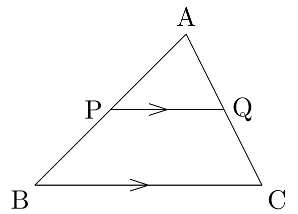
とすると、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = m : (m+n), \qquad \mathrm{AQ} : \mathrm{AC} = m : (m+n)$$

よって、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC}$$

となるので、このときも PQ // BC という関係が成り立つことになります。



以上のことから、△ABC の 2 辺 AB, AC 上に、それぞれ点 P, Q があるとき、

- AP : AB = AQ : AC　ならば　PQ // BC
- AP : PB = AQ : QC　ならば　PQ // BC

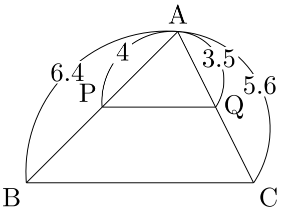
という関係が成り立ちます。

2 つの直線が平行であることを示すには、「同位角や錯角が等しい」というように、「角」についての条件がほとんどでしたが、ここで学習したように、「線分の比」を利用することでも、2 つの直線が平行であることを示すことができます。

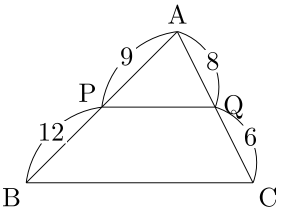
【例題 2 − 2】

次の図の △ABC において、PQ // BC となるのはどれですか。すべて答えなさい。

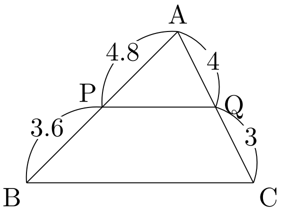
①



②



③



＜解説＞

① 図から、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AB} = 4 : 6.4 = 5 : 8, \qquad \mathrm{AQ} : \mathrm{AC} = 3.5 : 5.6 = 5 : 8$$

より、AP : AB = AQ : AC となるので、PQ と BC は平行。

② 図から、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 9 : 12 = 3 : 4, \qquad \mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 8 : 6 = 4 : 3$$

より、AP : PB ≒ AQ : QC となるので、PQ と BC は平行ではない。

③ 図から、

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 4.8 : 3.6 = 4 : 3, \qquad \mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 4 : 3$$

より、AP : PB = AQ : QC となるので、PQ と BC は平行。

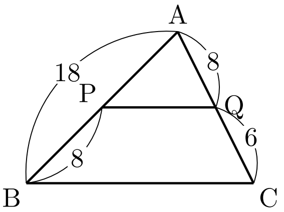
以上のことから、PQ // BC となるのは、

①, ③

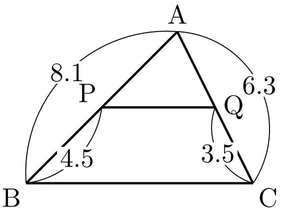
【演習 2 − 2】

次の図の △ABC において、PQ // BC となるのはどれですか。すべて答えなさい。

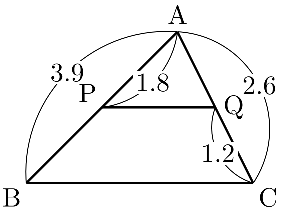
①



②



③



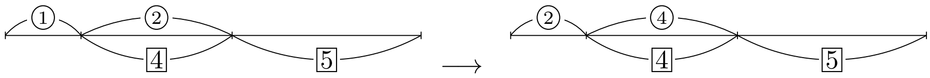
2.3　連比の求め方

$a:b:c$ のように、3 つ以上の項で作られた比を**連比**といいます。

2 つの比を連比の形にまとめるとき、次のような手順で行います。

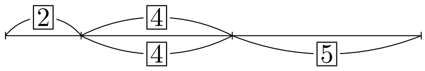
(ｉ) 2 つの比において共通な部分を見つけ、その値を 2 数の最小公倍数で一致させる。

$$a:b=1:2,\quad b:c=4:5 \longrightarrow a:b=1\times 2:2\times 2=2:4$$



(ii) 2 つの比を連比の形にまとめる。

$$a:b=2:4,\quad b:c=4:5 \longrightarrow a:b:c=2:4:5$$



【例題 2 − 3】

次の場合について、$a:b:c$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

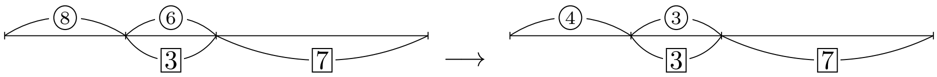
(1) $a:b=8:6,\ b:c=3:7$　　(2) $a:b=2:4,\ a:c=3:4$　　(3) $a:c=2:5,\ b:c=10:9$

<解説>

(1) b が共通なので、その値をそろえるために、6 と 3 の最小公倍数である「6」にそろえてもいいのですが、

$$a:b=8\times\frac{1}{2}:6\times\frac{1}{2}=4:3$$

のようにして、比を簡単な整数比で表しておきます。すると、b の値を「3」にそろえることができます。



このことから、

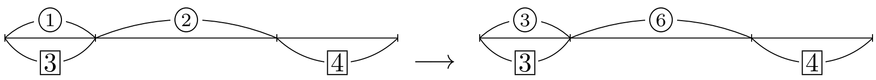
$$a:b:c=4:3:7$$

(2) まずは、比を簡単な整数比で表します。

$$a:b=2\times\frac{1}{2}:4\times\frac{1}{2}=1:2$$

a が共通なので、その値をそろえるために、1 と 3 の最小公倍数である「3」にそろえます。

$$a:b=1\times 3:2\times 3=3:6$$

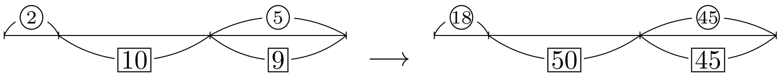


このことから、

$$a:b:c=3:6:4$$

(3) c が共通なので、その値をそろえるために、5 と 9 の最小公倍数である「45」にそろえます。

$$a : c = 2 \times 9 : 5 \times 9 = 18 : 45, \quad b : c = 10 \times 5 : 9 \times 5 = 50 : 45$$



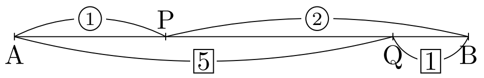
このことから、

$$a : b : c = 18 : 50 : 45$$

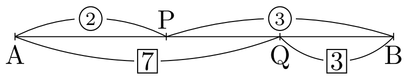
【演習 2 − 3】

次の場合について、AP : PQ : QB を最も簡単な整数の比で表しなさい。

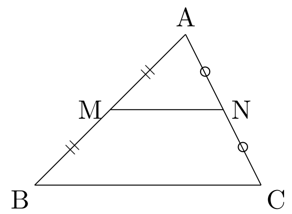
(1)



(2)



2.4 中点連結定理



右の図のように、△ABC の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とします。
このとき、△AMN と △ABC で、M, N は辺 AB, AC の中点なので、

$$\mathrm{AM} : \mathrm{AB} = 1 : 2 \ \cdots\cdots \ ①, \qquad \mathrm{AN} : \mathrm{AC} = 1 : 2 \ \cdots\cdots \ ②$$

①, ②より、

$$\mathrm{AM} : \mathrm{AB} = \mathrm{AN} : \mathrm{AC} = 1 : 2 \ \cdots\cdots \ ③$$

また、∠A は 2 つの三角形に共通な角なので、

$$\angle\mathrm{MAN} = \angle\mathrm{BAC} \ \cdots\cdots \ ④$$

③, ④より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{AMN} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

相似な図形の対応する角は等しいので、

$$\angle\mathrm{AMN} = \angle\mathrm{ABC}$$

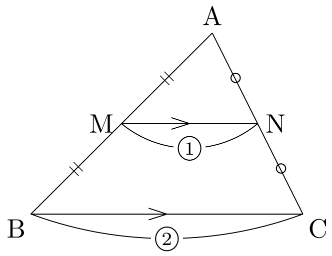
このことから、同位角が等しいので

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}$$

また、相似な図形の対応する辺の長さの比も等しいので、

$$\mathrm{MN} : \mathrm{BC} = \mathrm{AM} : \mathrm{AB} = 1 : 2$$
$$\mathrm{MN} \times 2 = \mathrm{BC}$$
$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

となります。

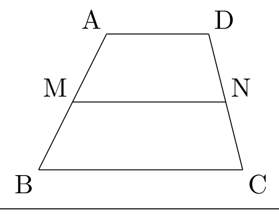


このように、△ABC の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると、線分 MN と線分 BC の間に、

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}, \qquad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

という関係が成り立ち、これを**中点連結定理**といいます。

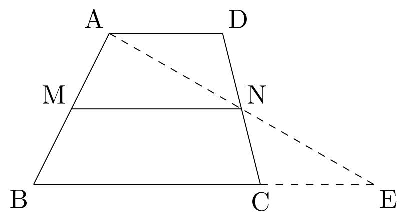
【例題 2 − 4】



右の図の AD // BC である台形 ABCD において、辺 AB, DC の中点をそれぞれ M, N とするとき、次の各問いに答えなさい。
(1) $\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}$, $\mathrm{MN} = \frac{1}{2}(\mathrm{AD} + \mathrm{BC})$ であることを証明しなさい。
(2) $\mathrm{AD} = 3$ cm, $\mathrm{BC} = 6$ cm のとき、MN の長さを求めなさい。

＜解説＞

中点に関する条件が与えられている場合、中点連結定理が利用できることが多くあります。ただし、中点連結定理は三角形に利用できるものなので、四角形では直接利用できません。そこで、補助線を引いて三角形を作ります。



(1) 直線 AN と BC との交点を E とすると、△AND と △ENC において、仮定より、

$$\mathrm{ND} = \mathrm{NC} \cdots\cdots ①$$

また、対頂角は等しいので、

$$\angle\mathrm{AND} = \angle\mathrm{ENC} \cdots\cdots ②$$

AD // BC より、錯角は等しいので、

$$\angle\mathrm{NDA} = \angle\mathrm{NCE} \cdots\cdots ③$$

①〜③より、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{AND} \equiv \triangle\mathrm{ENC}$$

合同な図形の対応する辺の長さは等しいので、

$$\mathrm{AN} = \mathrm{EN} \cdots\cdots ④, \qquad \mathrm{AD} = \mathrm{EC} \cdots\cdots ⑤$$

△ABE において、仮定と④より、M, N はそれぞれ辺 AB, AE の中点なので、中点連結定理より、

$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BE} \cdots\cdots ⑥, \qquad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BE} \cdots\cdots ⑦$$

⑥より、

$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC}$$

また、⑤, ⑦より、

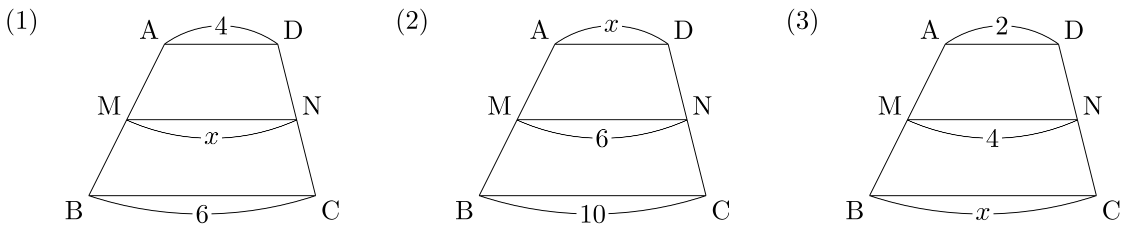
$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BE} = \frac{1}{2}(\mathrm{BC} + \mathrm{CE}) = \frac{1}{2}(\mathrm{BC} + \mathrm{AD})$$

(2) (1) より、

$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}(\mathrm{AD} + \mathrm{BC}) = \frac{1}{2}(3 + 6) = \frac{9}{2}\ (\mathrm{cm})$$

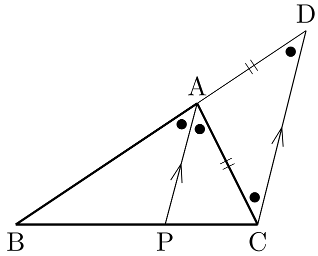
【演習 2 − 4】

次の図の AD // BC である台形 ABCD において、辺 AB, DC の中点をそれぞれ M, N とするとき、x の値を求めなさい。



2.5　内角の 2 等分線と線分の比

右の図のように、$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と対辺 BC との交点を P とします。また、頂点 C を通り、AP に平行な直線を引き、BA の延長との交点を D とすると、平行線の同位角、錯角は等しくなるので、



$$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{BAP}\ (同位角), \qquad \angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{CAP}\ (錯角)$$

となります。

すると、$\triangle$ACD は、$\angle$ACD = $\angle$ADC より二等辺三角形になるので、

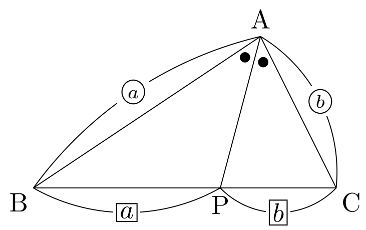
$$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} \ \cdots\cdots\ ①$$

となります。

また、AP // DC より、平行線と線分の比の関係から

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AD} \ \cdots\cdots\ ②$$

となり、①, ②より、

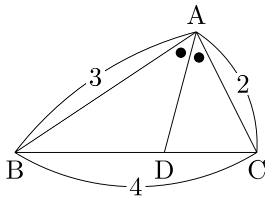


$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BP} : \mathrm{PC}$$

という関係が導き出され、角の 2 等分線と対辺の交点は、その角をはさむ 2 辺の比に対辺を分割した点になります。

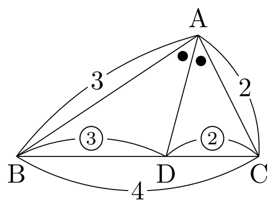
【例題 2 − 5】

$\triangle$ABC において、$\angle$A の二等分線が対辺 BC と交わる点を D とします。AB = 3, AC = 2, BC = 4 のとき、BD の長さを求めなさい。



＜解説＞

角の 2 等分線と線分の比の関係から、



$$\begin{aligned} \mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{AC} \\ &= 3 : 2 \end{aligned}$$

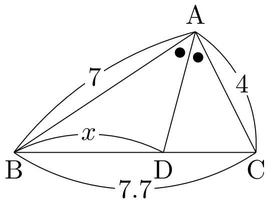
となるので、

$$\begin{aligned} \mathrm{BD} &= \mathrm{BC} \times \frac{3}{5} \\ &= 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

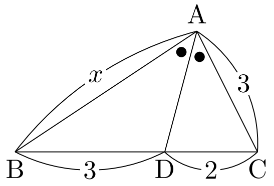
【演習 2 − 5】

$\triangle$ABC において、$\angle$A の二等分線が対辺 BC と交わる点を D とします。このとき、x の値を求めなさい。

(1)

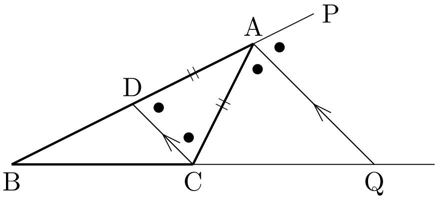


(2)



2.6　外角の 2 等分線と線分の比

右の図のように、辺 AB の延長上にある点を P、△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とします。また、頂点 C を通り、AQ に平行な直線を引き、AB との交点を D とすると、平行線の同位角、錯角は等しくなるので、



$$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{PAQ}\ (\text{同位角}),\quad \angle \mathrm{DCA} = \angle \mathrm{CAQ}\ (\text{錯角})$$

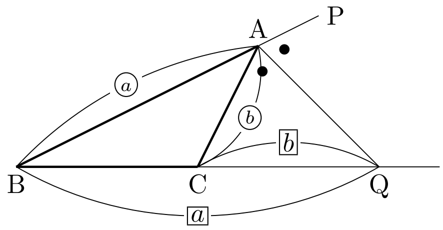
となります。すると、△ADC は、∠ADC = ∠ACD より二等辺三角形になるので、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \ \cdots\cdots\ ①$$

となります。

また、AQ // DC より、平行線と線分の比の関係から、

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{CQ} = \mathrm{BA} : \mathrm{DA} \ \cdots\cdots\ ②$$



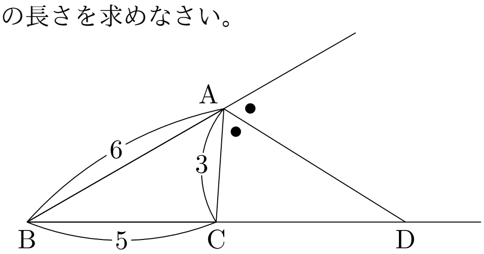
となり、①, ②より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BQ} : \mathrm{QC}$$

という関係が導き出され、外角の二等分線とその対辺の延長との交点は、その内角をはさむ 2 辺の比に対辺を分割する点になります。

【例題 2 − 6】

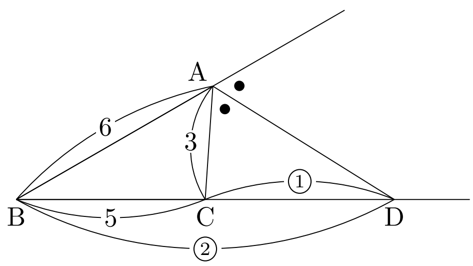
△ABC において、頂点 A の外角の二等分線が対辺 BC の延長と交わる点を D とします。AB = 6, BC = 5, CA = 3 のとき、CD の長さを求めなさい。



<解説>

外角の二等分線とその対辺の延長との交点は、その内角をはさむ 2 辺の比に対辺を分割する点になるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{AC}\\ &= 6 : 3 = 2 : 1\end{aligned}$$



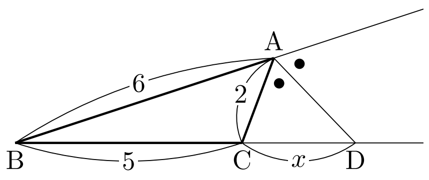
となるので、

$$\mathrm{CD} = \mathrm{BC} = 5$$

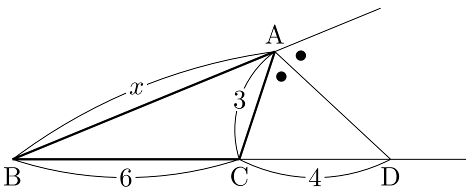
【演習 2 − 6】

△ABC において、頂点 A の外角の二等分線が対辺 BC の延長と交わる点を D とします。このとき、x の値を求めなさい。

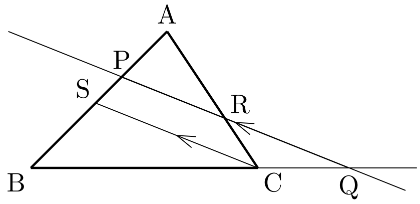
(1)



(2)



2.7　メネラウスの定理



右図のように、三角形の頂点を通らない 1 つの直線と、△ABC の辺 AB, BC, CA またはその延長との交点をそれぞれ P, Q, R とします。さらに、△ABC の頂点 C を通り、直線 PQ に平行な直線を引き、AB との交点を S とすると、平行線と線分の比の関係から、

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{BP} : \mathrm{PS}, \quad \mathrm{CR} : \mathrm{RA} = \mathrm{SP} : \mathrm{PA}$$

となるので、

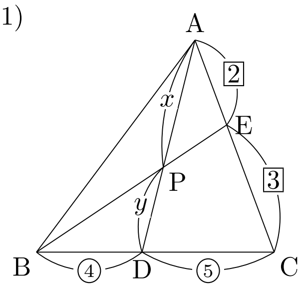
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \times \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PS}} \times \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PA}} = 1$$

という関係が成り立ち、これを**メネラウスの定理**といいます。

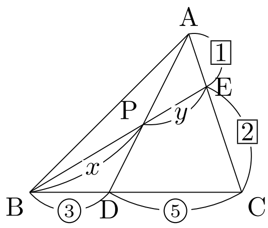
【例題 2 − 7】

次の図において、線分比 $x : y$ をそれぞれ求めなさい。

(1)



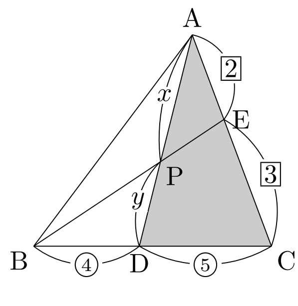
(2)



<解説>

比がわかっている線分と求める線分の比が含まれている三角形と直線に、メネラウスの定理を適用します。

(1) △ADC と直線 BE について、メネラウスの定理より、



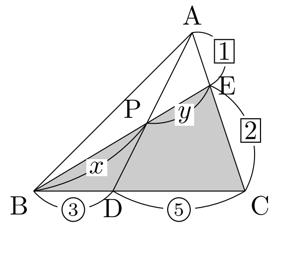
$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \times \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}} = 1$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{x}{y} \times \frac{4}{4+5} = 1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$x : y = 3 : 2$$

(2) △EBC と直線 AD について、メネラウスの定理より、



$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}} \times \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AC}} = 1$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{x}{y} \times \frac{1}{1+2} = 1$$

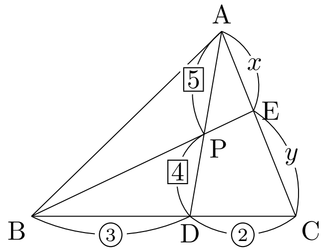
$$\frac{x}{y} = \frac{9}{5}$$

$$x : y = 9 : 5$$

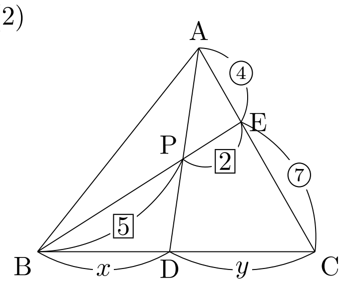
【演習 2 − 7】

次の図において、線分比 $x : y$ をそれぞれ求めなさい。

(1)



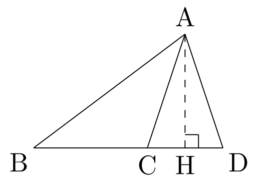
(2)



3　線分比と面積比・体積比

3.1　等高な三角形の面積比

右の図のような △ABC と △ACD を考えると、2 つの三角形の高さは AH で等しくなります。このとき、2 つの三角形の面積比は、



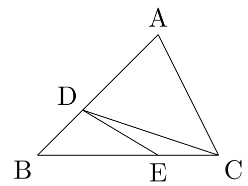
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ACD} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH} : \frac{1}{2} \times \mathrm{CD} \times \mathrm{AH} \\ &= \mathrm{BC} : \mathrm{CD}\end{aligned}$$

となります。

このように、高さの等しい三角形（等高な三角形）の面積比は、底辺の比と等しくなります。

【例題 3 − 1】

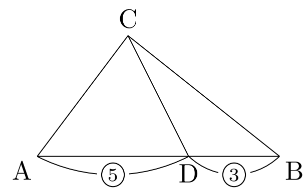
右図の △ABC において、辺 AB 上の AD : DB = 5 : 3 となる点を D、辺 BC 上の BE : EC = 2 : 1 となる点を E とします。このとき、次の面積比を求めなさい。



(1) △ABC : △DBC　　　(2) △ABC : △DEC

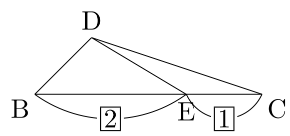
＜解説＞

(1) △ABC と △DBC は、頂点 C が共通なので、AB, DB を底辺だと考えたとき、高さが等しくなります。このとき、右の図のように図を回転して描き表すと、底辺が明確になり、考えやすくなります。このことから、



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DBC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{DB} \\ &= (5+3) : 3 = 8 : 3\end{aligned}$$

(2) △DBC と △DEC は、頂点 D が共通なので、BC, EC を底辺だと考えたとき、高さが等しくなります。そのため、



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DBC} : \triangle\mathrm{DEC} &= \mathrm{BC} : \mathrm{EC} \\ &= (2+1) : 1 = 3 : 1\end{aligned}$$

よって、(1) より、

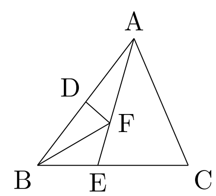
$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DBC} : \triangle\mathrm{DEC} = 8 : 3 : 1$$

となるので、

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEC} = 8 : 1$$

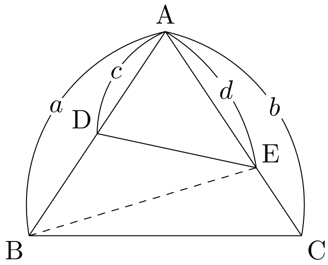
【演習 3 − 1】

右図の △ABC において、辺 AB の中点を D、辺 BC 上の BE : EC = 2 : 3 となる点を E、線分 AE 上の AF : FE = 2 : 1 となる点を F とします。このとき、次の面積比を求めなさい。



(1) △ABC : △ABE　　(2) △ABC : △ABF　　(3) △ABC : △ADF

3.2　1 角共有の三角形の面積比



右の図の △ABC と △ADE のように、1 つの角 (∠A) が共有されている 2 つの三角形の面積比について考えます。

△ABC と △ABE は、頂点 B が共通なので、底辺の比と面積比が等しくなり、

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ABE} = \mathrm{CA} : \mathrm{EA} = b : d \quad (= ab : ad) \cdots\cdots ①$$

また、△ABE と △ADE は、頂点 E が共通なので、底辺の比と面積比が等しくなり、

$$\triangle\mathrm{ABE} : \triangle\mathrm{ADE} = \mathrm{AB} : \mathrm{AD} = a : c \quad (= ad : cd) \cdots\cdots ②$$

①, ②より、

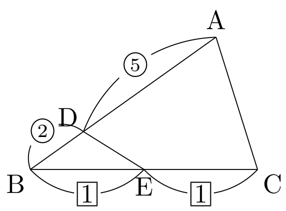
$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADE} = ab : cd$$

となり、1 つの角を共有する 2 つの三角形の面積比は、その共有する角をはさむ 2 辺の積の比と等しくなります。

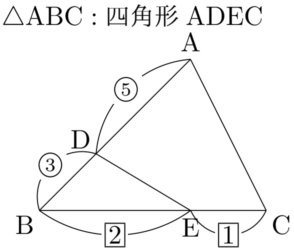
【例題 3 − 2】

次の面積比を求めなさい。

(1) △ABC : △DBE



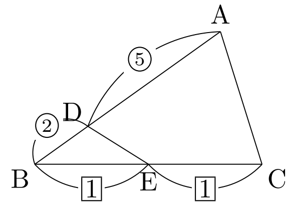
(2) △ABC : 四角形 ADEC



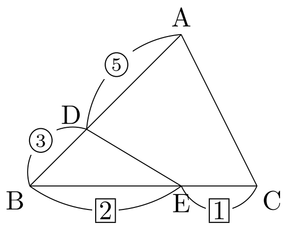
＜解説＞

(1) △ABC と △DBE は ∠B を共有しているので、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DBE} &= \mathrm{BA} \times \mathrm{BC} : \mathrm{BD} \times \mathrm{BE} \\ &= (2+5) \times (1+1) : 2 \times 1 \\ &= 7 \times 2 : 2 \times 1 \\ &= 7 : 1\end{aligned}$$



(2) $\triangle$ABC と $\triangle$DBE は $\angle$B を共有しているので、



$$\begin{aligned}\triangle ABC : \triangle DBE &= BA \times BC : BD \times BE \\ &= (3+5) \times (2+1) : 3 \times 2 \\ &= 8 \times 3 : 3 \times 2 \\ &= 4 : 1\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\triangle ABC : 四角形\ ADEC &= \triangle ABC : (\triangle ABC - \triangle DBE) \\ &= 4 : (4-1) = 4 : 3\end{aligned}$$

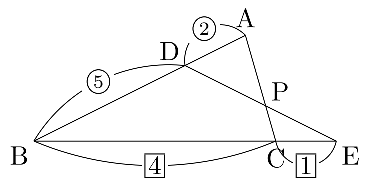
【演習 3 − 2】

右の図について、次の各問いに答えなさい。

(1) $\triangle$ABC : $\triangle$DBE を求めなさい。

(2) AP : PC を求めなさい。

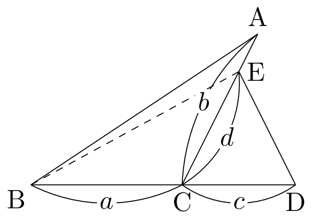
(3) $\triangle$ABC : $\triangle$ADP を求めなさい。



3.3 補角をなす三角形の面積比

2 つの角 $\angle A, \angle B$ が、$\angle A + \angle B = 180°$ となるとき、$\angle A$ と $\angle B$ は、たがいに**補角**の関係にあるといいます。

ここで右の図のように、1 組の角 ($\angle BCA$ と $\angle ECD$) がたがいに補角をなす ($\angle BCA + \angle ECD = 180°$) 三角形 ($\triangle ABC$ と $\triangle ECD$) の面積比を考えます。



$\triangle EBC$ と $\triangle ECD$ は、底辺をそれぞれ BC, CD であるとすると、2 つの三角形の高さは等しいので、面積比は底辺の比に等しくなり、

$$\triangle EBC : \triangle ECD = BC : CD = a : c \quad (= ad : cd) \cdots\cdots ①$$

また、$\triangle ABC$ と $\triangle EBC$ も、底辺をそれぞれ CA, CE とすると、2 つの三角形の高さは等しいので、面積比は底辺の比に等しくなり、

$$\triangle ABC : \triangle EBC = CA : CE = b : d \quad (= ab : ad) \cdots\cdots ②$$

①, ②より、

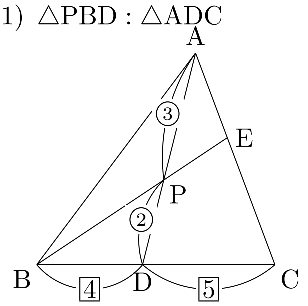
$$\triangle ABC : \triangle ECD = ab : cd$$

となり、1 組の角がたがいに補角をなす三角形の面積比は、補角の関係にある角をはさむ 2 辺の積の比と等しくなります。

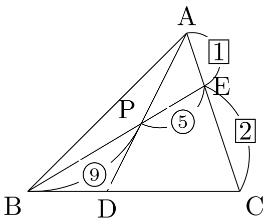
【例題 3 − 3】

次の図において、面積比をそれぞれ求めなさい。

(1) $\triangle PBD : \triangle ADC$



(2) $\triangle APE : \triangle EBC$



＜解説＞

(1) $\angle BDP + \angle ADC = 180°$ であるので、

$$\begin{aligned}\triangle PBD : \triangle ADC &= BD \times PD : AD \times DC \\ &= 4 \times 2 : (3+2) \times 5 = 8 : 25\end{aligned}$$

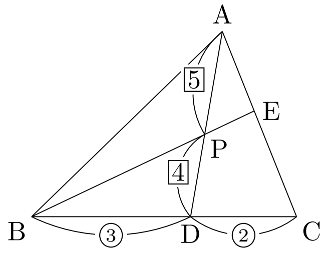
(2) $\angle PEA + \angle CEB = 180°$ であるので、

$$\begin{aligned}\triangle APE : \triangle EBC &= PE \times EA : CE \times BE \\ &= 5 \times 1 : 2 \times (9+5) = 5 : 28\end{aligned}$$

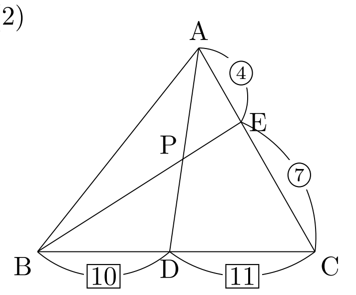
【演習 3 − 3】

次の図において、面積比 △PBD : △ADC をそれぞれ求めなさい。

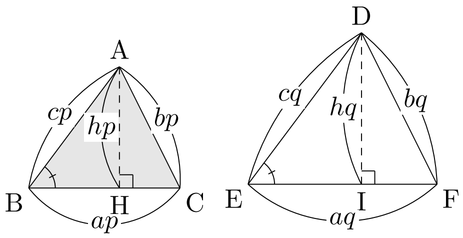
(1)



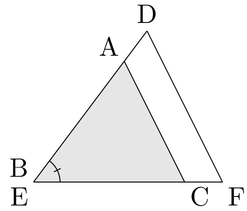
(2)



3.4　相似な三角形の面積比



右の図のように、相似な 2 つの三角形 △ABC と △DEF の相似比が $p : q$ であるとします。相似な 2 つの三角形の対応する角の大きさは等しいので、その角をそろえるように 2 つの三角形を重ねることができます。



そこで、2 つの三角形を ∠B と ∠E をそろえるように並べると、∠B(∠E) を共有していると考えることができるので、2 つの三角形の面積比は、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} &= \mathrm{BA} \times \mathrm{BC} : \mathrm{ED} \times \mathrm{EF} \\ &= cp \times ap : cq \times aq \\ &= p^2 : q^2\end{aligned}$$

となり、相似な三角形の面積比は、相似比の 2 乗の比になります。

また、このことは、三角形の面積を直接求めることでも、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{DEF} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH} : \frac{1}{2} \times \mathrm{EF} \times \mathrm{DI} \\ &= ap \times hp : aq \times hq \\ &= p^2 : q^2\end{aligned}$$

と求めることができます。

平面図形の面積は、

長方形の面積 =（縦の長さ）×（横の長さ),　　平行四辺形の面積 =（底辺の長さ）×（高さ）

などのように、2 つの長さの積により求めることができるので、対応する部分の長さが k 倍なら、2 つの長さはそれぞれ k 倍され、面積は k^2 倍になります。つまり、相似な三角形のときだけではなく、相似な平面図形であれば、対応する部分の長さが k 倍のとき、面積は k^2 倍になり、相似な図形の面積比は、相似比の 2 乗の比になります。

【例題 3 − 4】

2 つの平面図形が相似で、その相似比が次のようになるとき、その面積比を求めなさい。

(1) $a : b$　　(2) $1 : k$　　(3) $2 : 5$

＜解説＞

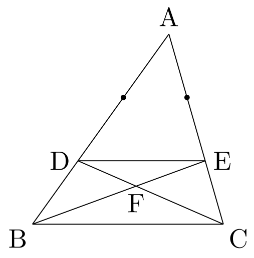
相似な図形の面積比は、相似比の 2 乗の比になるので、

(1) $a^2 : b^2$　　(2) $1^2 : k^2 = 1 : k^2$　　(3) $2^2 : 5^2 = 4 : 25$

となります。

【演習 3 − 4】

右の図で、D, E は △ABC の 2 辺 AB, AC を 3 等分する点のうち、それぞれ B, C に近いほうの点です。また、CD と BE の交点を F とするとき、次の各問いに答えなさい。



(1) △ADE と △ABC の面積比を求めなさい。

(2) △ADE と四角形 DBCE の面積比を求めなさい。

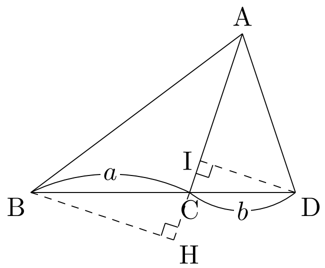
(3) △BED と △BCE の面積比を求めなさい。

(4) △DFE と △BFD の面積比を求めなさい。

(5) △CEF と △BCF の面積比を求めなさい。

(6) △ADE, △DFE, △BFD, △CEF, △BCF の面積比を求めなさい。

3.5 底辺の等しい三角形の面積比



右の図のような △ABC と △ACD の底辺をそれぞれ、BC, CD であるとすると、2 つの三角形の高さが等しくなるので、その面積比は底辺の比に等しくなり、

$$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACD} = a : b$$

となりました。

ここで、点 B, D から AC に垂線を引き、AC またはその延長との交点をそれぞれ H, I とします。このとき、2 つの三角形の底辺を AC であるとすると、△ABC と △ACD の面積比は、

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACD} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{BH} : \frac{1}{2} \times \mathrm{AC} \times \mathrm{DI} \\ &= \mathrm{BH} : \mathrm{DI} \ \cdots\cdots \ ①\end{aligned}$$

と表すことができ、底辺の等しい三角形の面積比は、高さの比に等しくなります。

また、△BHC と △DIC において、

$$\angle \mathrm{BHC} = \angle \mathrm{DIC} = 90^\circ, \quad \angle \mathrm{HCB} = \angle \mathrm{ICD}\ (\text{対頂角})$$

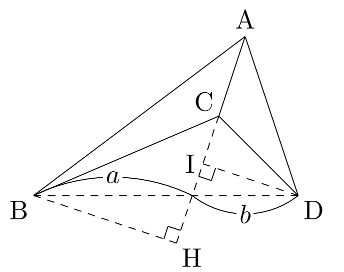
より、2 組の角がそれぞれ等しいので、△BHC ∽ △DIC。相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

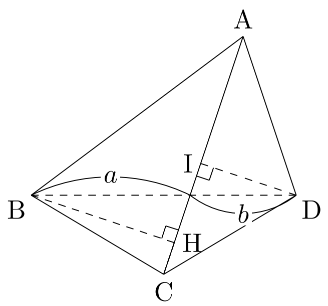
$$\mathrm{BH} : \mathrm{DI} = \mathrm{BC} : \mathrm{DC} = a : b \ \cdots\cdots \ ②$$

となり、高さの比を $a : b$ で表すことができます。よって、①, ②より、△ABC と △ACD の面積比は、

$$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACD} = a : b$$

と表され、次のような図においても、底辺が AC で等しいので、面積比は高さの比になり、その面積比 △ABC : △ACD はすべて $a : b$ になります。





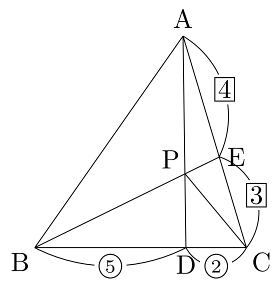
【例題 3 − 5】

右の図の △ABC の辺 BC 上に BD : DC = 5 : 2 となる点を D、辺 CA 上に CE : EA = 3 : 4 となる点を E、AD と BE の交点を P とするとき、次の各問いに答えなさい。

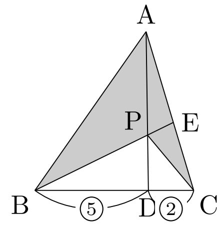
(1) △ABP : △APC を求めなさい。

(2) △ABP : △PBC を求めなさい。

(3) △ABP : △PBC : △APC を求めなさい。

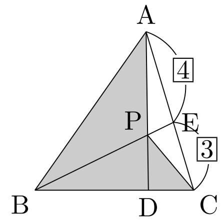


＜解説＞



(1) △ABP と △APC の底辺をそれぞれ AP だとすると、底辺が等しいので、面積比は高さの比に等しくなります。よって、

$$\triangle ABP : \triangle APC = BD : DC = 5 : 2$$



(2) △ABP と △PBC の底辺をそれぞれ BP だとすると、底辺が等しいので、面積比は高さの比に等しくなります。よって、

$$\triangle ABP : \triangle PBC = AE : EC = 4 : 3$$

(3) (1), (2) より

$$\triangle ABP : \triangle APC = 5 : 2 = 20 : 8, \qquad \triangle ABP : \triangle PBC = 4 : 3 = 20 : 15$$

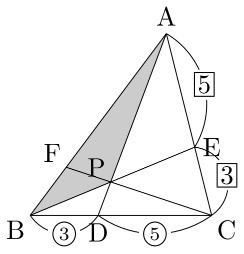
となるので、

$$\triangle ABP : \triangle PBC : \triangle APC = 20 : 15 : 8$$

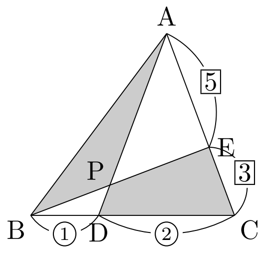
【演習 3 − 5】

次の図において、それぞれ面積比を求めなさい。

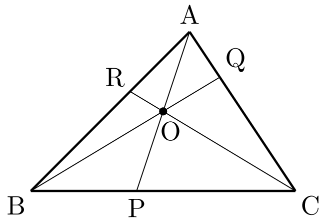
(1) △AFP : △FBP



(2) △ABP : 四角形 PDCE



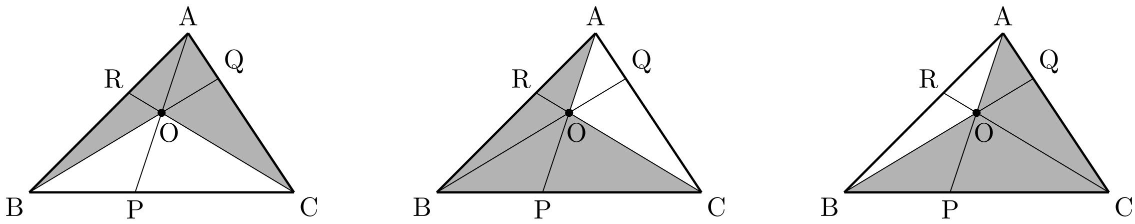
3.6　チェバの定理



右の図のように、△ABC の頂点 A, B, C と、この三角形の辺やその辺の延長上にない点 O とを結ぶ直線が、対辺またはその延長と交わる点をそれぞれ P, Q, R とします。

このとき、次のような底辺の等しい 2 つの三角形をそれぞれ選ぶと、面積比は高さの比に等しくなるので、次のように表すことができます。

(i) △OAB : △OCA = BP : PC　(ii) △OBC : △OAB = CQ : QA　(iii) △OCA : △OBC = AR : RB



$$\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \qquad \frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}} = \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \qquad \frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}} = \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$$

このことから、

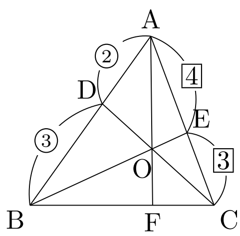
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \times \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}} \times \frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}} \times \frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}} = 1$$

という関係が成り立ち、これを**チェバの定理**といいます。

【例題 3 − 6】

右の図の △ABC において、辺 AB 上の AD : DB = 2 : 3 となる点を D、辺 AC 上のを AE : EC = 4 : 3 となる点を E とし、BE と CD との交点を O とします。

頂点 A から、点 O を通る直線が、辺 BC と交わる点を F とするとき、BF : FC を求めなさい。



<解説>

△ABC において、チェバの定理より、

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \times \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \times \frac{3}{4} = 1$$

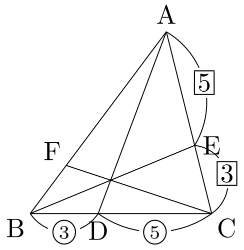
$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} = 2 \quad \left(= \frac{2}{1}\right)$$

$$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 2 : 1$$

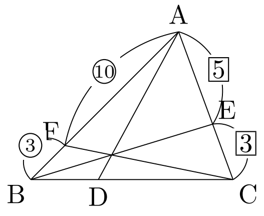
【演習３－６】

下の図において、次の比を求めなさい。

(1) AF : FB



(2) BD : DC

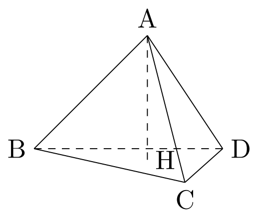


3.7 相似な立体の体積比

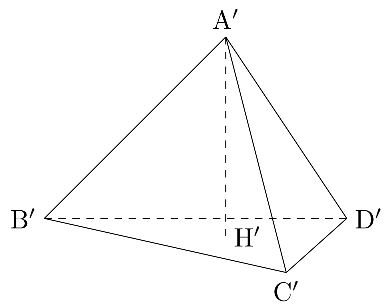
平面図形と同じように立体図形においても、1 つの立体を形を変えずに一定の割合で拡大または縮小して得られる立体は、もとの立体と**相似**であるといい、もとの立体との対応する部分の長さの比を**相似比**といいます。

2 つの相似な三角錐 A−BCD と A′−B′C′D′ を考え、相似比は $p:q$ であるとします。

(i) 三角錐 A−BCD



(ii) 三角錐 A′−B′C′D′



また、頂点 A, A′ から △BCD, △B′C′D′ にひいた垂線をそれぞれ AH, A′H′ とし、三角錐 A−BCD, A′−B′C′D′ の体積をそれぞれ V, V' とします。このとき、2 つの三角錐は相似であるので、

$$\mathrm{AH}:\mathrm{A'H'}=p:q$$

このことから、

$$\mathrm{AH}=ph,\quad \mathrm{A'H'}=qh$$

と表すことができ、また、底面の三角形も相似になるので、相似比が $p:q$ であることから、その面積比は、

$$\triangle\mathrm{BCD}:\triangle\mathrm{B'C'D'}=p^2:q^2$$

となります。このことから、

$$\triangle\mathrm{BCD}=p^2S,\quad \triangle\mathrm{B'C'D'}=q^2S$$

のように表すことができるので、2 つの立体の体積比は、

$$\begin{aligned}V:V'&=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH}:\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{B'C'D'}\times\mathrm{A'H'}\\&=p^2S\times ph:q^2S\times qh\\&=p^3:q^3\end{aligned}$$

となり、相似な立体の体積比は、相似比の 3 乗の比になることがわかります。

面積は 2 つの長さの積により求めることができるので、対応する部分の長さが k 倍なら、2 つの長さはそれぞれ k 倍されて、面積は k^2 倍になります。しかし、立体ではさらにもう 1 つ長さが加わり、3 つの長さの積により求めることができるので、対応する部分の長さが k 倍なら、3 つの長さがそれぞれ k 倍されて、体積は k^3 倍になるということです。このことから、三角錐のときだけではなく、すべての相似な立体についてこの関係が成り立ちます。

【例題3 − 7】

2つの立体図形が相似で、その相似比が次のようになるとき、その体積比を求めなさい。

(1) $a : b$ (2) $1 : k$ (3) $2 : 5$

＜解説＞

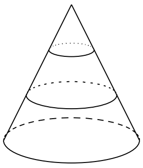
相似な立体の体積比は、相似比の3乗の比になるので、

(1) $a^3 : b^3$ (2) $1^3 : k^3 = 1 : k^3$ (3) $2^3 : 5^3 = 8 : 125$

となります。

【演習3 − 7】

ある円すいを母線を3等分する点を通り、底面に平行な平面で3つに分けたとき、次の各問いに答えなさい。



(1) 3つの立体の体積の比を求めなさい。

(2) 3つの立体の側面積の比を求めなさい。