【中３数学】平方根

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　平方根

1.1　平方根

2 乗（平方）すると a になるもとの数を、a の**平方根**といいます。
例えば、「9 の平方根」とは、

$$\square^2 = 9$$

となるような□に当てはまる数を求めることになります。このとき、

$$3^2 = 3 \times 3 = 9, \qquad (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

となるので、「9 の平方根」は

9 の平方根：$3,\ -3$

のように、絶対値が同じで符号の異なる、正のものと負のものの 2 つが存在することがわかります。
また、「3」と「-3」は、「$\pm$」という正の符号「$+$」と負の符号「$-$」を合わせた**複号**という記号を用いて

$3,\ -3 \longrightarrow \pm 3$　(「プラスマイナス 3」と読みます)

のようにして表すこともできます。

【例題 1 － 1】

次の数の平方根を求めなさい。
(1) 81　　(2) 0　　(3) -4

<解説>

(1) 81 の平方根は、

$$\square^2 = 81$$

となるような□に当てはまる数を求めることになります。
このとき、

$$9^2 = 9 \times 9 = 81, \qquad (-9)^2 = (-9) \times (-9) = 81$$

となることから、

81 の平方根：9 と -9

であることがわかります。そして、この 2 つの数は、絶対値は同じで符号の異なる正のものと負のものになっていることもおさえておきましょう。また、この 2 つの数を複号を用いて

81 の平方根：± 9

のように表すこともできます。

(2) 「0 の平方根」は

$$\square^2 = 0$$

となるような□に当てはまる数を求めることになります。2 乗して「0」になるような数は

$$0^2 = 0 \times 0 = 0$$

しかありません。つまり、

0 の平方根：0

となります。

平方根には普通、絶対値が同じで符号の異なる正のものと負のものの 2 つありますが、0 の平方根のときだけ 1 つしかありません。

(3) 「-4 の平方根」は

$$\square^2 = -4$$

となるような□に当てはまる数を求めることになります。「2 乗」とは同じ数を掛けることなので、同じ符号のものを掛けることになります。つまり、

(正の数) × (正の数) = (正の数),　　(負の数) × (負の数) = (正の数)

のように、その積は必ず「正の数」になり、負の数になることはありません。つまり、2 乗して負の数になることはありえないので、「**負の数の平方根は存在しない**」ということになります。このことから

-4 の平方根：なし

となります。

【演習 1 − 1】

次の数の平方根を求めなさい。

(1) 25　　(2) 0.36　　(3) $\dfrac{49}{64}$

1.2 平方根とルート

1 の平方根や 4 の平方根は、

$$\square^2 = 1, \qquad \square^2 = 4$$

となるような□に当てはまる数を求めることであったので、

$$1\text{ の平方根}: \pm 1, \qquad 4\text{ の平方根}: \pm 2$$

のように、絶対値は同じで符号の異なる 2 つの数がそれぞれにあります。
同じようにして、2 の平方根や 3 の平方根も、

$$\square^2 = 2, \qquad \square^2 = 3$$

となるような□に当てはまる数を求めればよいのですが、この□に当てはまる整数はありません。そして、整数だけではなく、今までに学習した、小数や分数でもこの□に当てはまる数はありません。
そこで新たに、$\sqrt{}$ という記号（**根号**）を用いて数を表します。この根号は「root（ルート）」という英単語の頭文字「r」を基にして作られたと言われています。この根号を用いると、2 の平方根と 3 の平方根はそれぞれ、

- 2 の平方根：$\sqrt{2}$（正のもの），$-\sqrt{2}$（負のもの） $\longrightarrow \pm\sqrt{2}$
- 3 の平方根：$\sqrt{3}$（正のもの），$-\sqrt{3}$（負のもの） $\longrightarrow \pm\sqrt{3}$

のように表すことができ、$\sqrt{3}$ は「**ルート 3**」と読みます。

【例題 1 − 2】

次の数は、それぞれいくらになりますか。
(1) 7 の平方根　　(2) $\sqrt{100}$

＜解説＞

(1) 7 の平方根は、

$$\square^2 = 7$$

となるような□に当てはまる数を求めることでしたが、2 乗して 7 になるような整数はないので、根号を用いて、

$$7\text{ の平方根}: \pm\sqrt{7}$$

となります。

(2) $\sqrt{100}$ は「100 の平方根のうちの正のもの」という意味になります。また、100 の平方根は、

$$\square^2 = 100$$

となるような□に当てはまる数を求めることだったので、

$$10^2 = 10 \times 10 = 100, \qquad (-10)^2 = (-10) \times (-10) = 100$$

より、100 の平方根は、

100 の平方根：± 10

です。このことから、「100 の平方根のうち正のもの」は $\sqrt{100}$ でもあり、「10」でもあるので、

$$\sqrt{100} = 10$$

となることがわかります。

【演習 1 − 2】

次の数は、それぞれいくらになりますか。

(1) 5 の平方根　(2) 10 の平方根　(3) $\sqrt{64}$

1.3　根号のついた数

根号のついた数と 2 乗（平方）との間には、次のような関係があります。（ただし、a は正の数とします。）

① $(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a}$ は、「a の平方根のうち正のもの」を表します。つまり、「$\square^2 = a$」となるような□に当てはまる正の数を表しているので、そのような数を 2 乗すればもちろん a になります。

② $(-\sqrt{a})^2 = a$

$-\sqrt{a}$ は、「a の平方根のうち負のもの」を表します。つまり、「$\square^2 = a$」となるような□に当てはまる負の数を表しているので、そのような数を 2 乗すればもちろん a になります。

③ $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a^2}$ は、「a^2 の平方根のうち正のもの」を表します。つまり、「$\square^2 = a^2$」となるような□に当てはまる正の数のことです。「a^2」の平方根には、

$$a \times a = a^2, \qquad (-a)^2 = (-a) \times (-a) = a^2$$

のように、a と $-a$ の 2 つがありますが、そのうちの正のものであるので、

$$\sqrt{a^2} = a$$

という関係が成り立ちます。

④ $\sqrt{(-a)^2} = a$

$\sqrt{(-a)^2}$ は、「$(-a)^2$ の平方根のうち正のもの」を表します。つまり、「$\square^2 = (-a)^2$」となるような□に当てはまる正の数のことです。この式だけを見ると、□に当てはまるのは

$$\square = -a$$

のように考えられるので、

$$\sqrt{(-a)^2} = -a$$

としたくなりますが、$\sqrt{(-a)^2}$ は正の数、$-a$ は負の数であるので等しくはありません。$\sqrt{\square}$ は、「□の平方根のうち**正のもの**」を表すので注意が必要です。

$(-a)^2$ は、

$$(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a^2$$

となるので、$\sqrt{(-a)^2}$ も結局 $\sqrt{a^2}$ と同じものを表します。そのため、$-a$ が「$(-a)^2$ の平方根のうち負のもの」を、a が「$(-a)^2$ の平方根のうち正のもの」を表すことになるので、

$$\sqrt{(-a)^2} = a$$

という関係が成り立ちます。

【例題 1 − 3】

次の値をいいなさい。

(1) $(\sqrt{5})^2$　　(2) $(-\sqrt{5})^2$　　(3) $\sqrt{5^2}$　　(4) $\sqrt{(-5)^2}$

<解説>

(1) $\sqrt{5}$ は、「5 の平方根のうち正のもの」を表しています。これは、

$$\square^2 = 5$$

の□に当てはまる数のように、「2 乗して 5 になる数で正のもの」であるので、その数を 2 乗すればもちろん

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

となります。

(2) $-\sqrt{5}$ も、「5 の平方根のうち負のもの」を表しています。これは、

$$\square^2 = 5$$

の□に当てはまる数のように、「2 乗して 5 になる数で負のもの」であるので、その数を 2 乗すればもちろん

$$(-\sqrt{5})^2 = 5$$

となります。

(3) $\sqrt{5^2}$ は、「5^2 の平方根のうち正のもの」を表しています。5^2 は、

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

であるので、$\sqrt{5^2}$ は結局、「25 の平方根のうち正のもの」を表していることになります。25 の平方根は

25 の平方根 : ± 5

であり、$\sqrt{25}$ はそのうち正のものです。このことから、

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

となります。

(4) $\sqrt{(-5)^2}$ は、「$(-5)^2$ の平方根のうち正のもの」を表しています。$(-5)^2$ は、

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

であるので、$\sqrt{(-5)^2}$ は結局、「25 の平方根のうち正のもの」を表していることになります。これは (3) と同じになるので、

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

となります。

【演習 1 − 3】

次の値をいいなさい。

(1) $(\sqrt{3})^2$　(2) $(-\sqrt{3})^2$　(3) $\sqrt{3^2}$　(4) $\sqrt{(-3)^2}$

1.4 平方根の値と大小

ここではまず、電卓を使って平方根の値を求めてみます。

例えば、「$\sqrt{1}$」の値は、電卓の「1」のボタンを押し、次に「$\sqrt{\ }$」のボタン（電卓によっては「$\sqrt{\ }$」のボタンがないものもあります）を押すと、

1

と電卓の液晶に表示されます。「$\sqrt{\ }$」のボタンを押しても何の変化もないと思いますが、これは電卓が故障しているわけではなく、$\sqrt{1}$ の値が 1 になるからです。

次に、$\sqrt{2}$ の値も同じようにして、まず、電卓の「2」のボタンを押し、次に「$\sqrt{\ }$」のボタンを押すと

1.4142135

というような数字が電卓の液晶に表示されます（電卓の種類によって表示される桁は異なります)。しかし、$\sqrt{2}$ の値は限りなく続くので、電卓の液晶にはその一部が表示されていることになります。つまり、実際は

$$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots\cdots$$

となっていることになります。

他の自然数についても同じように電卓を使って求めてみると、

① $\sqrt{1} = 1$　② $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots\cdots$
③ $\sqrt{3} = 1.7320508\cdots\cdots$　④ $\sqrt{4} = 2$
⑤ $\sqrt{5} = 2.2360679\cdots\cdots$　⑥ $\sqrt{6} = 2.4494897\cdots\cdots$
⑦ $\sqrt{7} = 2.6457513\cdots\cdots$　⑧ $\sqrt{8} = 2.8284271\cdots\cdots$
⑨ $\sqrt{9} = 3$　⑩ $\sqrt{10} = 3.1622776\cdots\cdots$

のようになります。

$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$ のおおよその値はよく使用され、語呂合わせを使った覚え方があるので紹介します。

- $\sqrt{2}$: ひとよひとよにひとみごろ（一夜一夜に人見頃）$\longrightarrow$ 1.41421356
- $\sqrt{3}$: ひとなみにおごれや（人並みにおごれや）$\longrightarrow$ 1.7320508
- $\sqrt{5}$: ふじさんろくおうむなく（富士山ろくおうむ鳴く）$\longrightarrow$ 2.2360679

電卓を使って平方根の値を求めましたが、その値を比べてみると、平方根には

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9} < \sqrt{10} < \cdots$$

という関係があることがわかります。つまり、正の数 $a,\ b$ について

$$a < b \text{ ならば} \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

というように、根号のついた正の数の大小は、根号内の数の大小と同じ関係があることになります。

【例題 1 − 4】

次の各組の数の大小を考えて、不等号を使って表しなさい。

(1) $\sqrt{19}$ と $\sqrt{20}$　(2) 4 と $\sqrt{13}$

＜解説＞

(1) 根号内の数には

$$19 < 20$$

という大小関係があります。この大小関係と根号のついた正の数の大小関係は同じになるので、

$$\sqrt{19} < \sqrt{20}$$

となります。

(2) 電卓を用いて、$\sqrt{13}$ の値が

$$\sqrt{13} = 3.6055512\cdots\cdots$$

であるとわかれば

$$4 > \sqrt{13}$$

だと判断することができますね。しかし、実際の試験などでは電卓は使えないので、別の方法を考える必要があります。

ここで大切なのは、「10 円」と「100 本」のように単位がそろっていないと比べることができないように、2 つのモノを比べるときには、単位や基準を「そろえる」ことです。この例題でも、「4」という根号のついていない数と、「$\sqrt{13}$」という根号のついている数の大小関係を考えるときには、「両方とも根号をつける」、もしくは、「両方とも根号をつけない」というようにしてそろえることが大切になります。さきほど電卓を用いて、$\sqrt{13}$ の値を、

$$\sqrt{13} = 3.6055512\cdots\cdots$$

のようにすることで 4 との大小関係を比べることができたのも、「両方とも根号をつけない」ようにして 2 つの数をそろえることができたからです。

しかし、電卓を用いないと根号のついている数の根号をなくすことは難しいので、「両方とも根号をつける」方法を考えてみます。そこで、4 を無理矢理、根号をつけた数に変えて、

$$4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$$

とします。そうすれば「$\sqrt{16}$」と「$\sqrt{13}$」の大小関係を比べればよくなります。根号内の数には

$$16 > 13$$

という大小関係があるので、根号のついた正の数にも

$$\sqrt{16} > \sqrt{13}$$

という関係が成り立つことになります。つまり、

$$4 > \sqrt{13}$$

となることがわかります。

【演習 1 − 4】

次の各組の数の大小を考えて、不等号を使って表しなさい。

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ と $\sqrt{0.3}$　　(2) $\sqrt{50}$ と 7.1

1.5　平方数

ある自然数の 2 乗（平方）になっている数を、**平方数**といい、次のような数のことです。

$$\begin{array}{ccccc} 1\ (=1^2) & 4\ (=2^2) & 9\ (=3^2) & 16\ (=4^2) & 25\ (=5^2) \\ 36\ (=6^2) & 49\ (=7^2) & 64\ (=8^2) & 81\ (=9^2) & 100\ (=10^2) \\ 121\ (=11^2) & 144\ (=12^2) & 169\ (=13^2) & 196\ (=14^2) & 225\ (=15^2) \end{array}$$

平方数は、ある自然数の 2 乗になっているので、平方数を素因数分解すると、指数がすべて偶数（必ず、2 つずつペアの積）になります。

$$36 = 2^2 \times 3^2, \qquad 144 = 2^4 \times 3^2, \qquad 196 = 2^2 \times 7^2$$

【例題 1 − 5】

(1) 126 にできるだけ小さい自然数 n をかけて、ある自然数の 2 乗（平方）にしたい。n を求めなさい。

(2) 126 をできるだけ小さい自然数 n で割って、ある自然数の 2 乗（平方）にしたい。n を求めなさい。

＜解説＞

126 を素因数分解すると、次のようになります。

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

(1) 126 にある自然数をかけて 2 乗（平方）の形にするには、2 つずつのペアの積を作ればよいので、ペアになっていない「2」と「7」をかければ、

$$\begin{aligned} 126 \times (2 \times 7) &= 2 \times 3^2 \times 7 \times (2 \times 7) \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \\ &= 42^2 \quad (= 1764) \end{aligned}$$

となるので、「14 $(= 2 \times 7)$」をかければよいことがわかります。つまり、

$$n = 14$$

(2) 因数分解した数をその因数で割ると、その因数を消すことができます。そのため、2 つずつのペアになっていない因数を割れば、その因数はなくなり、ペアの積、つまり、2 乗（平方）の形にすることができます。

$$\begin{aligned} 126 \div (2 \times 7) &= \cancel{2} \times 3^2 \times \cancel{7} \div (\cancel{2 \times 7}) \\ &= 3^2 \quad (= 9) \end{aligned}$$

このことから、「14 $(= 2 \times 7)$」で割ればよいので、

$$n = 14$$

【演習 1 − 5】

(1) 504 にできるだけ小さい自然数 n をかけて、ある自然数の 2 乗（平方）にしたい。n を求めなさい。

(2) 504 をできるだけ小さい自然数 n で割って、ある自然数の 2 乗（平方）にしたい。n を求めなさい。

1.6 平方根と平方数

a を自然数とするとき、

$$\sqrt{a^2}=a$$

となりました。このように、根号の中が平方数であれば、根号の値は自然数になります。

【例題 1 − 6】

(1) n を整数とするとき、$\sqrt{\dfrac{540}{n}}$ が整数となる n の値をすべて求めなさい。

(2) $\sqrt{120-3a}$ が整数となるような自然数 a をすべて求めなさい。

＜解説＞

(1) $\dfrac{540}{n}$ の分子を素因数分解すると次のようになります。

$$\frac{540}{n}=\frac{2^2\times 3^2\times 3\times 5}{n}$$

$\sqrt{\dfrac{540}{n}}$ が整数となるためには、$\dfrac{540}{n}$ が平方数にならなくてはいけません。そこで、平方（2 つのペアの積）の形が残るように n の値を決めると、次のような場合が考えられます。

① $n=15\ (=3\times 5)$ のとき

$$\sqrt{\frac{540}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times 3^2\times \cancel{3\times 5}}{\cancel{3\times 5}}}=\sqrt{6^2}=6$$

② $n=60\ (=3\times 5\times 2^2)$

$$\sqrt{\frac{540}{n}}=\sqrt{\frac{\cancel{2^2}\times 3^2\times \cancel{3\times 5}}{\cancel{3\times 5\times 2^2}}}=\sqrt{3^2}=3$$

③ $n=135\ (=3\times 5\times 3^2)$

$$\sqrt{\frac{540}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times \cancel{3^2\times 3\times 5}}{\cancel{3\times 5\times 3^2}}}=\sqrt{2^2}=2$$

④ $n=540\ (=3\times 5\times 2^2\times 3^2)$

$$\sqrt{\frac{540}{n}}=\sqrt{\frac{\cancel{2^2\times 3^2\times 3\times 5}}{\cancel{3\times 5\times 2^2\times 3^2}}}=\sqrt{1}=1$$

このことから、求める n の値は、

$$n=15,\ 60,\ 135,\ 540$$

(2) $\sqrt{120-3a}$ が整数となるためには、$120-3a$ が平方数でなくてはいけません。そこで、$120-3a$ を因数分解すると、

$$120-3a=3(40-a)$$

となります。「3」とペアとなる数がないので、$40-a$ が「3」とペアとなる積でないと平方数にはなりません。ただし、$40-a=0$ となるときも $\sqrt{0}=0$ と整数になります。

① $40 - a = 3\ (a = 37)$ のとき

$$\sqrt{120 - 3a} = \sqrt{3^2} = 3$$

② $40 - a = 3 \times 2^2\ (a = 28)$ のとき

$$\sqrt{120 - 3a} = \sqrt{3^2 \times 2^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

③ $40 - a = 3 \times 3^2\ (a = 13)$ のとき

$$\sqrt{120 - 3a} = \sqrt{3^2 \times 3^2} = \sqrt{9^2} = 9$$

④ $40 - a = 0\ (a = 40)$ のとき

$$\sqrt{120 - 3a} = \sqrt{0} = 0$$

このことから、求める a の値は、

$$a = 13,\ 28,\ 37,\ 40$$

【演習 1 − 6】

(1) n を自然数とします。$\sqrt{\dfrac{224n}{135}}$ が、分母と分子がともに自然数である分数となる最も小さい n の値を求めなさい。

(2) $\sqrt{51 - 3a}$ が整数となるような自然数 a をすべて求めなさい。

2　有理数と無理数

2.1　小数

小数についてはすでに知っていると思いますが、ここではもう少し詳しく小数について考えていきます。

① **有限小数**

小数の値が終わりなく続くのではなく、小数の値に限りのあるものを、**有限小数**といいます。

（例）$0.5\ \left(=\frac{1}{2}\right),\qquad 0.2\ \left(=\frac{1}{5}\right),\qquad 0.125\ \left(=\frac{1}{8}\right)$　など

分母が「2」と「5」のみの約数しかもたないような分数は、必ず有限小数になります。

② **無限小数**

有限小数とは異なり、小数の値が終わりなく続くものを、**無限小数**といいます。

（例）$0.333\cdots\cdots\ \left(=\frac{1}{3}\right),\qquad 0.142857142857\cdots\ \left(=\frac{1}{7}\right)$　など

③ **循環小数**

小数の値が終わりなく続く無限小数の中には、あるところから同じ繰り返しになるようなものがあり、そのような小数を、**循環小数**といいます。

（例）$0.\underline{3}33\cdots\cdots,\qquad 0.\underline{142857}\ \underline{142857}\cdots$　など

このとき、同じ繰り返しの部分（**循環節**）が、1 つの数で構成されている場合はその数の上に、複数の数で構成されている場合は、繰り返しの最初の数と最後の数の上に「·（ドット）」をつけて、循環していることを表します。

（例）$0.\underline{3}33\cdots\cdots = 0.\dot{3},\qquad 0.\underline{142857}\ \underline{142857}\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

【例題 2 − 1】

$2.\dot{3}$ を分数で表しなさい。

＜解説＞

有限小数は

$$0.5 = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}^{2}} = \frac{1}{2}$$

のように簡単に分数で表すことができますが、循環小数ではそうはいきません。そのため、循環小数を有限小数のような形で表すことができれば、分数で表すことができそうだと考えることができます。そこで、循環している部分を消去してしまいましょう。そのときに有効な手段が引き算です。引き算をするためには 2 つのものが必要なので、まず

$$x = 2.\dot{3}\ \cdots\cdots\ ①$$

とし、さらに、その両辺を 10 倍して、

$$10x = 23.\dot{3}\ \cdots\cdots\ ②$$

とします。そして、② − ① より

$$\begin{aligned}10x - x &= 23.\dot{3} - 2.\dot{3}\\ 9x &= 23.\cancel{33333\cdots} - 2.\cancel{33333\cdots}\\ &= 21\\ x &= \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{9}^{\,3}} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

となり、「$x = 2.\dot{3}$」であったので、

$$2.\dot{3} = \frac{7}{3}$$

のようにして分数で表すことができます。

このように、求めたい循環小数を適当な文字で表します。そして、10 倍、100 倍などをして小数点をずらして、循環節をそろえたもう 1 つの数を考えます。そうすれば、その差を計算することで循環節部分が消去でき、循環小数をうまく分数で表すことができるようになります。

また、

$$1 \div 3 = 0.333333\cdots\cdots, \qquad 1 \div 9 = 0.111111\cdots\cdots$$

となることを知っていれば、

$$\frac{1}{3} = 0.333333\cdots\cdots = 0.\dot{3}, \qquad \frac{1}{9} = 0.111111\cdots\cdots = 0.\dot{1}$$

のように、それぞれの循環小数を分数で表すことができます。すると、このことから、

$$\begin{aligned}2.\dot{3} &= 2 + 0.\dot{3}\\ &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

のようにして、循環小数を分数に表すこともできる場合もあります。

【演習 2 − 1】

次の循環小数を分数になおしなさい。

(1) $0.\dot{3}\dot{4}$　　(2) $0.\dot{1}2\dot{5}$

2.2　有理数と無理数

「分数で表すことのできる数」のことを**有理数**といいます。ここでいう「分数」とは、

$$\text{分数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数（自然数）}}$$

のような形で表される数のことです。

有限小数、循環小数は分数で表すことができることをすでに学習しましたが、、自然数や整数も

$$2 = \frac{2}{1} \quad \left(= \frac{\text{整数}}{\text{整数}} \right)$$

のように無理矢理分数で表すことができるので、自然数、整数、有限小数、循環小数が有理数になります。

また、無限小数には、あるところから同じ繰り返しになる「循環小数」がありましたが、どこまでいっても同じ繰り返しのない「循環しない無限小数」があります。しかし、この「循環しない無限小数」は、分数で表すことができないため有理数ということはできません。そのため、有理数でないこの数のことを**無理数**といいます。

数の分類を表にまとめると次のようになります。

<table>
<tr><td rowspan="4">数</td><td rowspan="3">有理数</td><td>自然数：$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$
整　数：$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$</td></tr>
<tr><td>有限小数：$0.5,\ 0.2,\ 0.125$ など</td></tr>
<tr><td>循環小数：$0.\dot{3},\ 0.\dot{1}4285\dot{7}$ など</td></tr>
<tr><td>無理数</td><td>循環しない無限小数：$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi$ など</td></tr>
</table>

【例題 2 － 2】

次の数のうち、無理数はどれですか。(a)～(e) の記号で答えなさい。

(a) $\sqrt{3}$　(b) $\sqrt{16}$　(c) π　(d) 0.53　(e) $-\sqrt{7}$

＜解説＞

(a) $\sqrt{3}$ は、

$$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$$

のように循環しない無限小数です。そのため、分数で表すことができないので無理数になります。

(b) $\sqrt{16}$ には根号がついているため、無理数と判断してしまいがちですが、

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \left(= \frac{4}{1} \right)$$

と整数になり、分数で表すことができるので有理数です。

(c) π は、

$$\pi = 3.14159265358979323\cdots$$

のように循環しない無限小数です。そのため、分数で表すことができないので無理数になります。

(d) 0.53 は有限小数で、

$$0.53 = \frac{53}{100}$$

のように分数で表すことができるので有理数です。

(e) $-\sqrt{7}$ は

$$-\sqrt{7} = -2.64575\cdots$$

のように循環しない無限小数です。そのため、分数で表すことができないので無理数になります。

以上のことから、無理数は

(a), (c), (e)

になります。

【演習 2 − 2】

次の数を有理数と無理数に分けなさい。

① $\sqrt{5}$　② $\frac{2}{7}$　③ 0.9　④ $\sqrt{9}$　⑤ π

2.3 整数部分と小数部分

小数は、(整数部分) + (小数部分) という形で表すことができ、その数を超えない最大の整数を**整数部分**といい、その残りが**小数部分**になります。

（例）$1.2 = 1 + 0.2 \longrightarrow$ 整数部分：1,　　小数部分：0.2

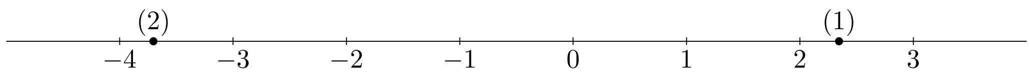
【例題 2 − 3】

次の数の整数部分と小数部分を求めなさい。

(1) 2.345　　　　(2) -3.7

＜解説＞

数直線をイメージして、整数部分を正しく求めることが大切です。



(1) 数直線から、

整数部分：2

であることがわかります。このことから、

$$\begin{aligned}(\text{整数部分}) + (\text{小数部分}) &= 2.345 \\ (\text{小数部分}) &= 2.345 - (\text{整数部分}) \\ &= 2.345 - 2 = 0.345\end{aligned}$$

(2) 数直線から、

整数部分：− 4

であることがわかります。このことから、

$$\begin{aligned}(\text{整数部分}) + (\text{小数部分}) &= -3.7 \\ (\text{小数部分}) &= -3.7 - (\text{整数部分}) \\ &= -3.7 - (-4) = 0.3\end{aligned}$$

【演習 2 − 3】

次の数の整数部分と小数部分を求めなさい。

(1) 4.321　　　　(2) -1.234

3　平方根の計算

3.1　平方根の乗法

$a,\ b$ を正の数としたとき、$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$ は

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\\ &= \sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\\ &= (\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})\\ &= (\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\\ &= ab\end{aligned}$$

のように計算でき、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ を 2 乗（平方）すると ab になります。しかも、$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0$ より、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}>0$ であることから、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は、「ab の平方根のうち正のもの」と考えることができます。

しかし、これとは別に ab の平方根を考えると、

ab の平方根：$\pm\sqrt{ab}$

となり、そのうち正のものは $\sqrt{ab}$ となります。このことから、「$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$」と「$\sqrt{ab}$」は、「ab の平方根のうち正のもの」という同じものを表すので、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

のように等式で表すことができ、「平方根の積は、根号内の数の積」として計算できることがわかります。

【例題 3 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$　　(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$

＜解説＞

(1) 根号内の数の積を考えて

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\times\sqrt{7} &= \sqrt{3\times7}\\ &= \sqrt{21}\end{aligned}$$

と計算できます。

(2) 根号内の数の積を考えて

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\times\sqrt{8} &= \sqrt{2\times8}\\ &= \sqrt{16}\\ &= \sqrt{4^2}=4\end{aligned}$$

【演習 3 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{50}$　　(2) $\sqrt{0.8}\times\sqrt{0.2}$　　(3) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{8}$

3.2 有理数を根号の中に入れる

$3 \times \sqrt{2}$ のような数は、文字式の表し方のように乗法の記号「×」を省略して

$$3 \times \sqrt{2} \longrightarrow 3\sqrt{2}$$

のように表します。すると、$a,\ b$ を正の数としたとき、$a\sqrt{b}$ という数は

$$a\sqrt{b} = a \times \sqrt{b}$$

のように表すことができ、さらに、「a」は、平方根の性質から

$$a = \sqrt{a^2}$$

と表すこともできるので、

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b}$$

のように変形することができます。根号のついた数どうしの積は、根号内の数の積を考えればよかったので、

$$\sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

となり、

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} &= a \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2 \times b} \quad (= \sqrt{a^2 b}) \end{aligned}$$

のようにして、根号の外にある有理数「a」は、2 乗の形にして根号の中に入れることができることがわかります。

$$a\sqrt{b} \longrightarrow \sqrt{a^2 b}$$

【例題 3 − 2】

次の数を変形して、$\sqrt{\square}$ の形に変形しなさい。

(1) $3\sqrt{2}$　　(2) $5\sqrt{7}$

<解説>

(1) 有理数の「3」を根号の中に入れます。

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &= 3 \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

(2) 有理数の「5」を根号の中に入れます。

$$\begin{aligned} 5\sqrt{7} &= 5 \times \sqrt{7} \\ &= \sqrt{5^2} \times \sqrt{7} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{7} \\ &= \sqrt{25 \times 7} \\ &= \sqrt{175} \end{aligned}$$

途中の過程も詳しく書きましたが、慣れてきたら暗算で答えを求められるようにしましょう。

【演習 3 − 2】

次の数を変形して、$\sqrt{\square}$ の形に変形しなさい。

(1) $\dfrac{3}{7}\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{8}{21}}$

3.3 有理数を根号の外に出す

有理数を根号の中に入れることを学習しましたが、有理数を根号の外に出すことは、それと逆の操作になります。

まず、$a,\ b$ を正の数とすると、$\sqrt{a^2b}$ のように表される数は、乗法の記号「×」を使って

$$\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

のように表すことができます。そして、

「根号のついた数の積」$\longrightarrow$「根号内の数の積」

のようにして計算することができましたが、これとは逆に、

「根号内の数の積」$\longrightarrow$「根号のついた数の積」

ともできるはずです。このことから、

$$\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b}$$

と変形できます。そして、

$$\sqrt{a^2} = a$$

であることから、

$$\sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a \times \sqrt{b} \quad (= a\sqrt{b})$$

となり、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2b} &= \sqrt{a^2 \times b} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \\ &= a \times \sqrt{b} \quad (= a\sqrt{b}) \end{aligned}$$

のようにして、根号の中に 2 乗（平方）の形になっている数は、指数の「2」をなくして根号の外に出すことができることがわかります。

$$\sqrt{a^2b} \longrightarrow a\sqrt{b}$$

【例題 3 − 3】

次の数を変形して、根号の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1) $\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{252}$

＜解説＞

「根号の中をできるだけ簡単な数にする」とは、「根号の中をできるだけ小さな数になるようにする」ということです。

(1) 根号の中にどのような数が 2 乗の形になっているのかを判断しやすくするために、まずは根号の中の数を素因数分解をして考えます。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 根号の中の数を素因数分解して、

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{252} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{7} \\ &= 6 \times \sqrt{7} \\ &= 6\sqrt{7} \end{aligned}$$

【演習 3 − 3】

次の数を変形して、根号の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1) $\sqrt{125}$　　(2) $\sqrt{18252}$

3.4 平方根の除法

文字式の除法では、割る数を逆数にすることで乗法にできました。そのため、根号を含む式の除法においても、乗法と同じように計算ができると考えることができます。

そこで、乗法と同じようにして、$a,\ b$ を正の数としたとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

のように計算できます。つまり、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を 2 乗（平方）すると $\dfrac{a}{b}$ になり、しかも、$\sqrt{a} > 0,\ \sqrt{b} > 0$ より、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 0$ であることから、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は、「$\dfrac{a}{b}$ の平方根のうち正のもの」と考えることができます。しかし、これとは別に、$\dfrac{a}{b}$ の平方根を考えると、

$$\frac{a}{b}\text{の平方根：}\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

となり、そのうち正のものは $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ となります。このことから、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ と $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ は、「$\dfrac{a}{b}$ の平方根のうち正のもの」という同じものを表すので、

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b})$$

が成り立つことになります。つまり、平方根の乗法と同じように除法でも、

「平方根の商は、根号内の数の商を考えればよい」

ということです。

【例題 3 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

(2) $\sqrt{63} \div \sqrt{3}$

＜解説＞

(1) 根号内の数の商を考えて

$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\cancel{30}^{\,5}}{\cancel{6}^{\,1}}} = \sqrt{5}$$

(2) 根号内の数の商を考えて

$$\sqrt{63} \div \sqrt{3} = \sqrt{63 \div 3} = \sqrt{21}$$

【演習 3 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{6} \div \sqrt{8} \times \sqrt{3}$　(2) $\sqrt{0.3} \div \sqrt{15} \times \sqrt{\dfrac{1}{2}}$　(3) $\sqrt{1.8} \div \sqrt{\dfrac{2}{3}} \times \sqrt{0.3}$

3.5　分母の有理化

a を正の数とすると

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

となりました。この性質を利用して、分母に根号がついているような数（無理数）を、分母に根号を含まない形（有理数）に変形（**分母の有理化**）することができます。

【例題 3 − 5】

次の数を分母に根号を含まない形に変形しなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

＜解説＞

分数の性質から、分子と分母に等しい数を掛けることができます。

(1) 分子と分母に $\sqrt{2}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3\times 2}}{(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

と変形でき、分母に根号を含まない形（有理数）にすることができます。

(2) 分子と分母に $\sqrt{18}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{2\times\sqrt{18}}{\sqrt{18}\times\sqrt{18}} &= \frac{\cancel{2}^{1}\times\sqrt{18}}{\cancel{18}^{9}}\\ &= \frac{\sqrt{18}}{9}\end{aligned}$$

と変形できます。さらに、根号の中の数を素因数分解して簡単な数になるようにすると、

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$$

のように変形できるので、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{18}}{9} &= \frac{\cancel{3}^{1}\sqrt{2}}{\cancel{9}^{3}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

と計算でき、分母に根号を含まない形（有理数）にできます。これでもいいですが、もう少し簡単な方法を説明します。

先程は計算の途中で

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$$

を用いて変形をしましたが、一番初めにこれを行います。

$$\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

そうした後で、今度は分子と分母に $\sqrt{2}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{2\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{2}}{3\times(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{3\times\cancel{2}^1}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

と計算できます。どうでしょう？最初に簡単な数にしてから分母を有理化したほうが、小さい数を計算すればよいので、計算が少し楽になると思います。自分の計算しやすい方で計算すればよいですが、どちらにおいても、分母に含まれる平方根を、分子と分母に掛けることによって、分母に根号を含まない形に変形できます。

【演習３－５】

次の数を分母に根号を含まない形に変形しなさい。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$

3.6 根号を含む式の加減

分配法則

$$\square \times \bigcirc + \square \times \triangle = \square \times (\bigcirc + \triangle)$$

を利用して、「$3x + 2x$」のような式は

$$3x + 2x = (3 + 2)x$$

のように同類項をまとめることができました。

文字式では、

$$3 \times x \longrightarrow 3x, \qquad 1 \times x \longrightarrow x$$

のように、乗法の記号「×」や「1×」などは省略して表す決まりでしたが、根号を含むような式においても

$$3 \times \sqrt{2} \longrightarrow 3\sqrt{2}, \qquad 1 \times \sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2}$$

のようにして、乗法の記号「×」や「1×」などは省略することができ、文字式と似たような関係になっています。そのため、根号の中が同じ数は同じ文字であると考えて、同類項をまとめるように計算することができます。

【例題 3 − 6】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{2} - 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50}$ (3) $\sqrt{18} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

＜解説＞

(1) 分配法則を利用して

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} &= 3 \times \sqrt{2} + 2 \times \sqrt{2} \\ &= (3 + 2) \times \sqrt{2} \\ &= 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

と計算できます。

(2) 根号の中がそれぞれ異なる数なので、このままでは計算できません。しかし、

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}, \qquad \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

のようにして、根号の中の数を簡単にしてあげれば、

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 7 \times 2\sqrt{2} - 2 \times 5\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

と変形でき、根号の中の数をすべて「2」にそろえることができます。あとは同類項をまとめるように

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 10\sqrt{2} &= (3 - 14 - 10)\sqrt{2} \\ &= -21\sqrt{2} \end{aligned}$$

と計算できます。

(3) 根号を含む式では、まず根号の中の数が簡単にできないかを考えます。そのため、$\sqrt{18}$ を、

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^2}=3\sqrt{2}$$

と変形して、根号の中の数を簡単にします。

また、分数を含む式の計算の場合には通分をしますが、分母に根号を含んでいる式で先に通分をしてしまうと計算が面倒になってしまうので、まず分母を有理化します。そこで、$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ の分子・分母に $\sqrt{2}$ を掛けると、

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

のようにすることができるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\frac{3}{\sqrt{2}}&=3\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{3\sqrt{2}\times 2}{1\times 2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{6\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{(6+3)\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

と計算することができます。

根号を含む式の加減も、根号を含む式の乗法、除法と同じように計算できると勘違いをしてしまい、根号内の数の和や差を考えて

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}$$

と計算してしまう人がいます。このような計算はできないので注意をしてください。また、

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

のような計算では、

$$\sqrt{2}=1\times\sqrt{2}$$

のように 1 が省略されていると考えて、

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(1+2)\sqrt{2}$$

とします。文字式の

$$x+2x=(1+2)x$$

と同じなので大丈夫だと思いますが、計算間違いをしないように気をつけてください。

【演習 3 − 6】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{3}-\sqrt{12}+5\sqrt{3}$　(2) $-\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{27}$　(3) $2\sqrt{8}-5\sqrt{3}+3\sqrt{72}$

3.7 根号を含む式の展開

根号を含む式の加減では、$\sqrt{\square}$ を文字とみなして計算することができたました。そのため、根号を含む式は、多項式の乗法と同じようにして、乗法公式を利用して展開することができます。

(i) 分配法則：$\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{ab}+\sqrt{ac}, \qquad \sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})=\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$
(ii) 平方公式：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b, \qquad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$
(iii) 和と差の積：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

【例題 3 − 7】

次の式を簡単にしなさい。
(1) $(\sqrt{2}+1)^2$ (2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

＜解説＞

(1) 平方の公式を利用して、

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^2 &= (\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times 1+1^2\\ &= 2+2\sqrt{2}+1\\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

と計算できます。
(2) 和と差の積の公式から、

$$\begin{aligned}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 6-2=4\end{aligned}$$

と計算できます。

【演習 3 − 7】

次の計算をしなさい。
(1) $(\sqrt{2}-1)^2+\sqrt{18}$ (2) $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)-\sqrt{45}$ (3) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

3.8 式の値

式の値を求める問題では、式に直接値を代入して求めることもできますが、計算が複雑になる場合が多いので、まずは、代入する式を簡単にしてから求めるようにします。

【例題 3 − 8】

$x=1+\sqrt{2}$ のとき、x^2-2x+3 の値を求めなさい。

<解説>

(i) 式変形をせずに、直接代入して式の値を求めてみます。

$$\begin{aligned} x^2-2x+3 &= (1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+3 \\ &= 1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-2-2\sqrt{2}+3 \\ &= 1+2-2+3=4 \end{aligned}$$

(ii) 代入する式を変形して求めてみます。

$$\begin{aligned} x^2-2x+3 &= x(x-2)+3 \\ &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)+3 \\ &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+3 \\ &= 2-1+3=4 \end{aligned}$$

(iii) 条件式を変形して求めてみます。

$$\begin{aligned} x &= 1+\sqrt{2} \\ x-1 &= \sqrt{2} \\ (x-1)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ x^2-2x+1 &= 2 \\ x^2-2x+1+2 &= 2+2 \\ x^2-2x+3 &= 4 \end{aligned}$$

【演習 3 − 8】

$a=1+\sqrt{2},\ b=1-\sqrt{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) a^2-b^2　　(2) $\dfrac{a+b}{ab}$　　(3) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$

3.9　平方根の整数部分・小数部分

無理数は、「循環しない無限小数」という小数であるので、(整数部分) + (小数部分) という形で表すことができます。

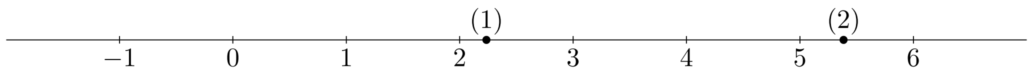
【例題 3 − 9】

次の問いに答えなさい。

(1) $\sqrt{5}$ の整数部分と小数部分を求めなさい。　(2) $\sqrt{29}$ の整数部分と小数部分を求めなさい。

＜解説＞

数直線をイメージして、整数部分を正しく求めることが大切です。



(1) $\sqrt{5} = 2.236\cdots$ であるので、数直線から、

整数部分：2

であることがわかります。このことから、

$$\begin{aligned}(\text{整数部分}) + (\text{小数部分}) &= \sqrt{5}\\ (\text{小数部分}) &= \sqrt{5} - (\text{整数部分})\\ &= \sqrt{5} - 2\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{29} = 5.385\cdots$ であることがわかれば、数直線から、

整数部分：5

とわかりますが、電卓がなければそのような値になることはわかりません。しかし、$\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$ であることから、

$$5 < \sqrt{29} < 6$$

より、整数部分が「5」になることがわかります。よって、小数部分は、

$$\begin{aligned}(\text{整数部分}) + (\text{小数部分}) &= \sqrt{29}\\ (\text{小数部分}) &= \sqrt{29} - (\text{整数部分})\\ &= \sqrt{29} - 5\end{aligned}$$

【演習 3 − 9】

次の問いに答えなさい。

(1) $\sqrt{5}$ の小数部分を a とするとき、$\dfrac{1}{a+3} - \dfrac{1}{a+1}$ の値を求めなさい。

(2) $\sqrt{3}$ の小数部分を x とするとき、$\dfrac{2x - \sqrt{3} + 3}{x + 2 - \sqrt{3}}$ の値を求めなさい。