【中3数学】三平方の定理

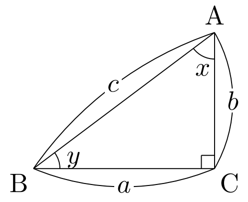
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　三平方の定理

1.1　三平方の定理の証明

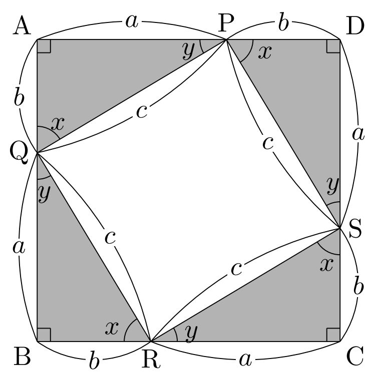


右の図のように、直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを a, b、斜辺の長さを c とし、$\angle \mathrm{A} = x$, $\angle \mathrm{B} = y$ とします。

三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\begin{aligned} x + y + 90^\circ &= 180^\circ \\ x + y &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

となります。



ここで、この直角三角形を 4 つ使って、右の図のような正方形 ABCD を作ります。

この正方形 ABCD は、1 辺の長さが $a+b$ の正方形なので、その面積は次のように表すことができます。

$$\text{正方形 ABCD} = (a+b)^2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

ここで、$\angle \mathrm{BRC}$ は一直線の作る角で 180° なので、

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{BRC} = \angle \mathrm{BRQ} + \angle \mathrm{QRS} + \angle \mathrm{SRC} &= 180^\circ \\ x + \angle \mathrm{QRS} + y &= 180^\circ \end{aligned}$$

となります。

①の関係から、この式はさらに

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{QRS} + (x+y) &= 180^\circ \\ \angle \mathrm{QRS} + 90^\circ &= 180^\circ \\ \angle \mathrm{QRS} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

となるので、四角形 PQRS は 1 辺の長さ c の正方形になります。

すると、正方形 ABCD は、4 つの直角三角形と、1 辺の長さ c の正方形でできていると考えることができるので、その面積は

$$\begin{aligned} \text{正方形 ABCD} &= \frac{1}{2}ab \times 4 + c^2 \\ &= 2ab + c^2 \quad \cdots\cdots \text{③} \end{aligned}$$

と表すことができます。

以上のようにして、正方形 ABCD の面積を 2 つの方法で表すことができたので、②, ③より、

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + \cancel{2ab} + b^2 &= \cancel{2ab} + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

という式を導くことができます。

このことから、直角三角形の 3 辺の長さの間に

$$a^2 + b^2 = c^2$$

という関係が成り立ち、これを**三平方の定理**といいます。つまり、三平方の定理とは、

「**直角をはさむ 2 辺の平方の和は、斜辺の平方と等しくなる**」

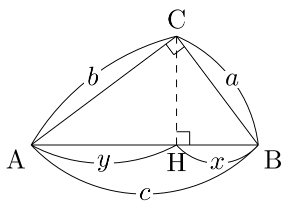
というものになります。

【例題 1 − 1】

$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において、$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とします。また、直角の頂点 C から斜辺 AB に垂線 CH をひき、$BH = x$, $AH = y$ とおくとき、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つことを相似を利用して証明しなさい。



＜証明＞

△CBH と △ABC において、

$$\angle CBH = \angle ABC, \quad \angle BHC = \angle BCA = 90^\circ$$

より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle CBH \backsim \triangle ABC$$

相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\begin{aligned} BC : BA &= BH : BC \\ a : c &= x : a \\ a^2 &= cx \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

同様にして、△ACH と △ABC において、

$$\angle CAH = \angle BAC, \quad \angle CHA = \angle BCA = 90^\circ$$

より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ACH \backsim \triangle ABC$$

相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\begin{aligned} CA : BA &= AH : AC \\ b : c &= y : b \\ b^2 &= cy \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

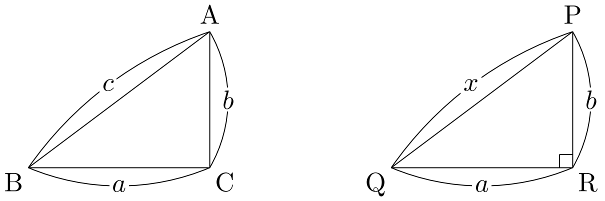
ここで、① + ② を考えると、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c(x + y) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

となるので、$a^2 + b^2 = c^2$ は成り立つ。

1.2　三平方の定理の逆

図のような 3 辺の長さで、$a^2+b^2=c^2$ である △ABC と、$\angle R=90^\circ$ である △PQR があります。



△PQR は $\angle R=90^\circ$ の直角三角形であるので、三平方の定理より、

$$a^2+b^2=x^2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

また、仮定より、

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

であるので、①, ②より

$$x^2=c^2$$

x も c も辺の長さであるので、

$$x>0,\ c>0 \text{ より} \quad x=c$$

よって、△ABC と △PQR は、3 辺の長さがそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}$$

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{R}=90^\circ$$

となります。

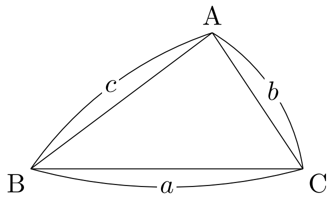
このことから、次の図のような △ABC で、$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき、三角形 ABC が $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形であれば、

$$a^2+b^2=c^2$$

という三平方の定理が成り立ちましたが、これとは逆に、三角形 ABC で、

$$a^2+b^2=c^2 \text{ ならば } \angle\mathrm{C}=90^\circ$$

という関係が成り立つことになります。



【例題 1 − 2】

次の △ABC の中で、直角三角形になるのはどれですか。また、そのときの直角はどの角ですか。

(1) $\mathrm{AB}=15$, $\mathrm{BC}=8$, $\mathrm{CA}=17$

(2) $\mathrm{AB}=8\sqrt{2}$, $\mathrm{BC}=8$, $\mathrm{CA}=8$

(3) $\mathrm{AB}=7$, $\mathrm{BC}=9$, $\mathrm{CA}=4$

(4) $\mathrm{AB}=\sqrt{15}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{11}$, $\mathrm{CA}=\sqrt{26}$

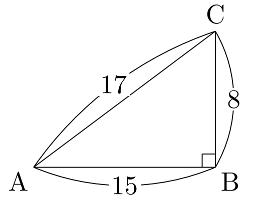
(5) $\mathrm{AB}=3+\sqrt{2}$, $\mathrm{BC}=3-\sqrt{2}$, $\mathrm{CA}=\sqrt{22}$

＜解説＞

それぞれの辺を平方し、2 辺の平方の和が残りの辺の平方に等しくなるものを選び出します。

また、直角となる角は斜辺に対する角になり、斜辺の長さが、直角三角形の 3 辺の中で一番長いこともポイントです。

(1) それぞれの辺を平方します。



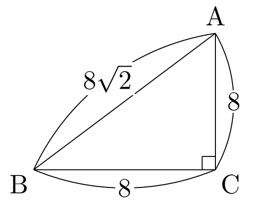
$$\mathrm{AB}^2 = 15^2 = 225, \quad \mathrm{BC}^2 = 8^2 = 64, \quad \mathrm{CA}^2 = 17^2 = 289$$

すると、

$$\begin{aligned} 225 + 64 &= 289 \\ \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2 \end{aligned}$$

となり三平方の定理が成り立つので、△ABC は直角三角形になります。また、「直角をはさむ 2 辺の平方の和 = 斜辺の平方」であるので、斜辺は CA になります。このことから、直角となる角は、斜辺に対する角である ∠B になります。

(2) それぞれの辺を平方します。



$$\mathrm{AB}^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128, \quad \mathrm{BC}^2 = 8^2 = 64, \quad \mathrm{CA}^2 = 8^2 = 64$$

すると、

$$\begin{aligned} 64 + 64 &= 128 \\ \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AB}^2 \end{aligned}$$

となり三平方の定理が成り立つので、△ABC は直角三角形になります。また、直角となる角は、斜辺 AB に対する角 ∠C になります。

(3) それぞれの辺を平方します。

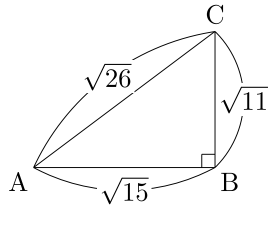
$$\mathrm{AB}^2 = 7^2 = 49, \quad \mathrm{BC}^2 = 9^2 = 81, \quad \mathrm{CA}^2 = 4^2 = 16$$

このとき、

$$49 + 16 \fallingdotseq 81$$

となるので、三平方の定理は成り立ちません。つまり、△ABC は直角三角形にはなりません。

(4) それぞれの辺を平方します。



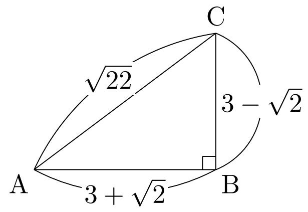
$$\mathrm{AB}^2 = (\sqrt{15})^2 = 15, \quad \mathrm{BC}^2 = (\sqrt{11})^2 = 11, \quad \mathrm{CA}^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$$

すると、

$$\begin{aligned} 15 + 11 &= 26 \\ \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2 \end{aligned}$$

となり三平方の定理が成り立つので、△ABC は直角三角形になります。また、直角となる角は、斜辺 CA に対する角 ∠B になります。

(5) それぞれの辺を平方します。



$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (3+\sqrt{2})^2 \\ &= 9+6\sqrt{2}+2 \\ &= 11+6\sqrt{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= (3-\sqrt{2})^2 \\ &= 9-6\sqrt{2}+2 \\ &= 11-6\sqrt{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{CA}^2 &= (\sqrt{22})^2 \\ &= 22\end{aligned}$$

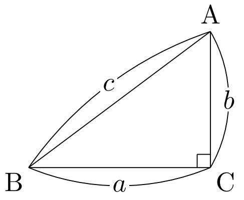
すると、

$$\begin{aligned}(11\cancel{+6\sqrt{2}})+(11\cancel{-6\sqrt{2}}) &= 22 \\ \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CA}^2\end{aligned}$$

となり三平方の定理が成り立つので、△ABC は直角三角形になります。また、直角となる角は、斜辺 CA に対する角 ∠B になります。

1.3 直角三角形の辺の長さ

右のような直角三角形 ABC では、三平方の定理より、



$$a^2 + b^2 = c^2$$

という関係が成り立つので、三平方の定理を用いることで、直角三角形の 2 辺の長さから残りの 1 辺の長さを求めることができます。そのとき、三平方の定理をそのまま用いてもいいのですが、平方（2 乗）の形が残ったままだと辺の長さを直接求めることができないので、次のように三平方の定理から導かれる式を、公式として利用することもできます。

① $a = \sqrt{c^2 - b^2}$　② $b = \sqrt{c^2 - a^2}$　③ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 &= c^2 - b^2 \\ a &= \sqrt{c^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

【例題 1 − 3】

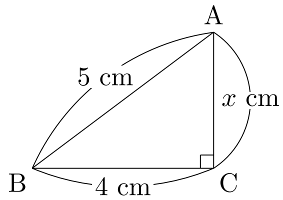
直角三角形 ABC で、$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ のとき、次の x を求めなさい。

(1) $\mathrm{AB} = 5$ cm, $\mathrm{BC} = 4$ cm, $\mathrm{AC} = x$ cm　(2) $\mathrm{BC} = 5$ cm, $\mathrm{AC} = 12$ cm, $\mathrm{AB} = x$ cm

＜解説＞

図形に関する問題なので、イメージしやすいように $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ である直角三角形 ABC をかいて、問題に与えられた条件を図にあてはめて考えます。このとき、図のイメージがわかればよいので、実際の長さや形と異なっても問題ありません。

(1) 問題の条件を直角三角形 ABC に当てはめると右の図のようになるので、三平方の定理を利用して、



$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 \\ 4^2 + x^2 &= 5^2 \\ 16 + x^2 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 16 = 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

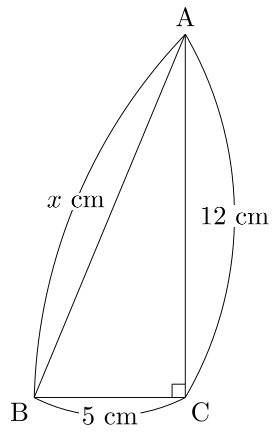
となります。しかし、x は辺の長さなので $x > 0$ となることから、

$$x = 3 \text{ (cm)}$$

また、公式を利用すると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2} \\
x &= \sqrt{5^2 - 4^2} \\
&= \sqrt{25 - 16} \\
&= \sqrt{9} = 3
\end{aligned}
$$

(2) 問題の条件を直角三角形 ABC に当てはめると右の図のようになるので、三平方の定理を利用して、



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 \\
x^2 &= 5^2 + 12^2 \\
&= 25 + 144 = 169 \\
x &= \pm 13
\end{aligned}
$$

ただし、$x > 0$ なので、

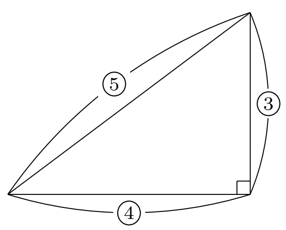
$$x = 13 \ (\mathrm{cm})$$

また、公式を利用すると、

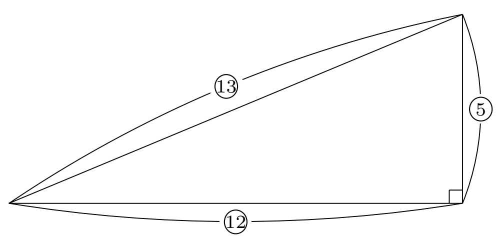
$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2} \\
&= \sqrt{5^2 + 12^2} \\
&= \sqrt{25 + 144} \\
&= \sqrt{169} = 13
\end{aligned}
$$

この例題で扱った 2 つの直角三角形は、3 辺の比が整数比で表される有名な直角三角形になるので覚えておきましょう。

(1) 3 辺の比が 3 : 4 : 5 となる直角三角形



(2) 3 辺の比が 5 : 12 : 13 となる直角三角形



【演習 1 − 3】

直角三角形 ABC で、$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ のとき、次の x を求めなさい。

(1) $\mathrm{AB} = x,\ \mathrm{BC} = 2,\ \mathrm{AC} = \sqrt{3}$

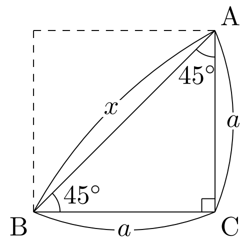
(2) $\mathrm{AB} = 11,\ \mathrm{BC} = x,\ \mathrm{AC} = 5$

(3) $\mathrm{AB} = x,\ \mathrm{BC} = 2.1,\ \mathrm{AC} = 2.8$

(4) $\mathrm{AB} = 3.9,\ \mathrm{BC} = 3.6,\ \mathrm{AC} = x$

1.4 三角定規の 3 辺の比

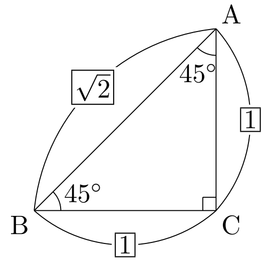
1.4.1 45° の角をもつ直角三角形



45° の角をもつ直角三角形は、正方形を対角線で半分にしたときにできる図形で、直角二等辺三角形です。

正方形の 1 辺の長さを a とすると、直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さは a となります。また、斜辺の長さを x とすると、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2}\\ x &= \sqrt{a^2+a^2}\\ &= \sqrt{2a^2}\\ &= \sqrt{2}a\end{aligned}$$

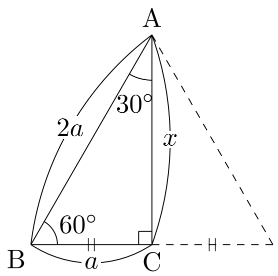


このことから、3 辺の長さの比は

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB} &= a:a:\sqrt{2}a\\ &= 1:1:\sqrt{2}\end{aligned}$$

となります。

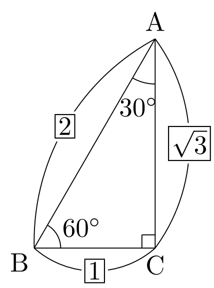
1.4.2 60° の角をもつ直角三角形



60° の角をもつ直角三角形は、正三角形を半分に折り曲げたときにできる図形です。正三角形の 1 辺の長さを $2a$ とすると、BC はその半分の a になります。AC の長さを x とすると、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{CA} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}\\ x &= \sqrt{(2a)^2-a^2}\\ x &= \sqrt{4a^2-a^2}\\ &= \sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a\end{aligned}$$

となります。



このことから、3 辺の長さの比は、

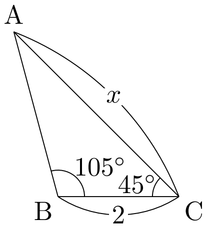
$$\begin{aligned}\mathrm{BC}:\mathrm{AB}:\mathrm{CA} &= a:2a:\sqrt{3}a\\ &= 1:2:\sqrt{3}\end{aligned}$$

となります。

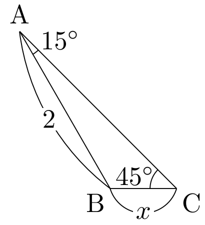
【例題 1 − 4】

次の図で、x の値を求めなさい。

(1)



(2)



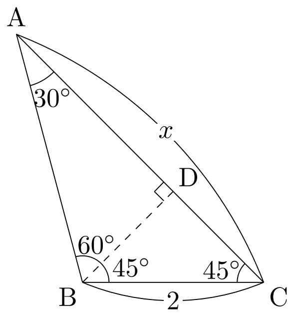
＜解説＞

三角定規の形（45° の角をもつ直角三角形と 60° の角をもつ直角三角形）では、三角形の辺の比が決まっているので、1 辺の長さがわかれば残りの 2 辺の長さを求めることができます。そのため、辺の長さを求める問題なのに角の大きさに関する条件があれば、補助線を引いて三角定規の形を作り出すことできる場合があります。三角定規の形では、30°, 45°, 60° の角が含まれているので、その角が含まれる直角三角形はそうですが、その和や差に関する角

- 和：$75^\circ\ (= 30^\circ + 45^\circ)$, $105^\circ\ (= 45^\circ + 60^\circ)$
- 差：$15^\circ\ (= 45^\circ - 30^\circ = 60^\circ - 45^\circ)$

が含まれる三角形も、三角定規の形を利用できる場合があります。

(1) 右図のように、点 B から辺 CA に垂線を引き、その交点を D とします。すると、△BCD は 45° の角をもつ直角三角形になるので、



$$\begin{aligned} \mathrm{CD} : \mathrm{BD} : \mathrm{BC} &= 1 : 1 : \sqrt{2} \\ \mathrm{CD} : \mathrm{BD} : 2 &= 1 : 1 : \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} : \sqrt{2} : 2 \\ \mathrm{CD} = \mathrm{BD} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

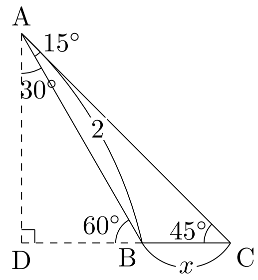
また、△ABD は 60° の角をもつ直角三角形なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{BD} : \mathrm{AB} : \mathrm{AD} &= 1 : 2 : \sqrt{3} \\ \sqrt{2} : \mathrm{AB} : \mathrm{AD} &= 1 : 2 : \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2} : 2\sqrt{2} : \sqrt{6} \\ \mathrm{AB} = 2\sqrt{2}, \quad \mathrm{AD} &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

よって、

$$x = \mathrm{AD} + \mathrm{DC} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

(2) 右図のように、点 A から BC に垂線を引き、その延長との交点を D とします。すると、△ADB は 60° の角をもつ直角三角形になるので、



$$\mathrm{DB} : \mathrm{AB} : \mathrm{AD} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$
$$\mathrm{DB} : 2 : \mathrm{AD} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$
$$\mathrm{DB} = 1,\quad \mathrm{AD} = \sqrt{3}$$

また、△ADC は 45° の角をもつ直角三角形になるので、

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} : \mathrm{CA} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$
$$\sqrt{3} : \mathrm{DC} : \mathrm{CA} = 1 : 1 : \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{6}$$
$$\mathrm{DC} = \sqrt{3},\quad \mathrm{CA} = \sqrt{6}$$

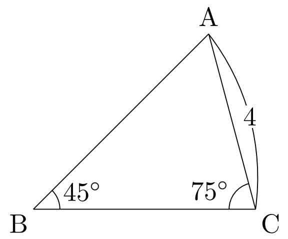
よって、

$$x = \mathrm{DC} - \mathrm{DB} = \sqrt{3} - 1$$

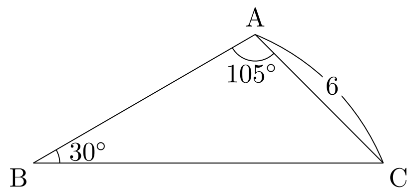
【演習 1 − 4】

次の図で、辺 AB, BC の長さを求めなさい。

(1)

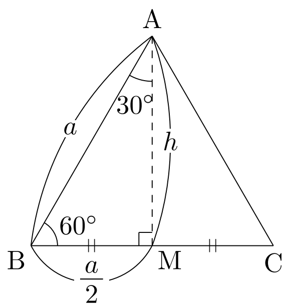


(2)



2　三平方の定理と平面図形

2.1　正三角形の高さと面積



右の図のように、1 辺の長さが a の正三角形 ABC の頂点 A から、辺 BC に垂線を下ろし、その交点を M、高さ（AM）を h とします。このとき、AM は BC の垂直二等分線になるので、$\mathrm{BM}=\dfrac{a}{2}$ となり、△ABM は 60° の角をもつ直角三角形になります。このことから、△ABM の 3 辺の比は、

$$\begin{aligned}\mathrm{BM}:\mathrm{AB}:\mathrm{AM}&=1:2:\sqrt{3}\\ \frac{a}{2}:a:h&=1:2:\sqrt{3}\end{aligned}$$

となるので、

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

と表され、正三角形 ABC の面積 S は、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AM}=\frac{1}{2}ah\\ &=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\end{aligned}$$

となります。

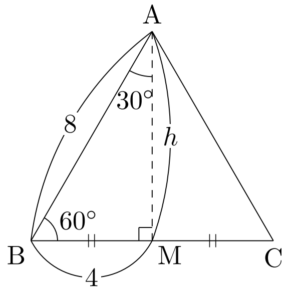
このようにして、正三角形の高さや面積は簡単に導出できるものなので、絶対に覚えなければいけないというものではありませんが、余裕があれば公式として覚え利用してください。

【例題 2 − 1】

1 辺の長さが 8 cm の正三角形について、次の問いに答えなさい。

(1) 高さを求めなさい。　　(2) 面積を求めなさい。

＜解説＞



右の図のような 1 辺の長さが 8 cm の正三角形 ABC について考えます。

(1) △ABM は 60° の角をもつ直角三角形であるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{BM}:\mathrm{AM}&=1:\sqrt{3}\\ 4:h&=1:\sqrt{3}\\ h&=4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})\end{aligned}$$

(2) (1) より、正三角形の面積 S は、

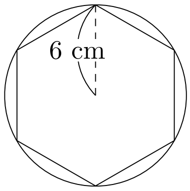
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AM} \\
&= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)
\end{aligned}
$$

また、公式を利用すれば、

(1) $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$ (cm)　　(2) $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$ (cm^2)

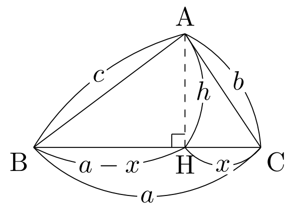
【演習 2 − 1】

図のような半径 6 cm の円の内部にある正六角形の面積を求めなさい。



2.2　三角形の高さ

右の図の △ABC において、頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を下ろし、AH $= h$, HC $= x$, BH $= a - x$ とします。



△ABH は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$h^2 = c^2 - (a-x)^2 \ \cdots\cdots \ ①$$

同様に、△AHC も直角三角形なので、三平方の定理より、

$$h^2 = b^2 - x^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

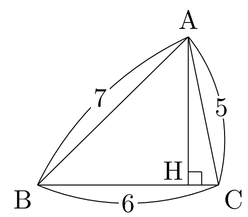
①, ②より、文字 h を消去すると、x の方程式を作ることができます。

$$c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$$

この方程式から x の値を求め、その値を①、もしくは②の式に代入することで、3 辺の長さがわかっている三角形の高さ h を求めることができます。

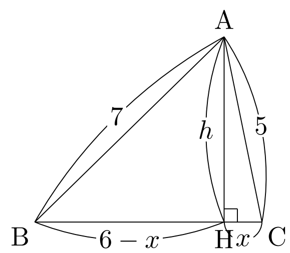
【例題 2 − 2】

△ABC において、AB = 7 cm, BC = 6 cm, CA = 5 cm である。頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を下ろすとき AH の長さを求めなさい。



＜解説＞

右の図のように、△ABC において、AH $= h$, HC $= x$, BH $= 6 - x$ とします。



△ABH は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} h^2 &= 7^2 - (6-x)^2 \\ &= 49 - (36 - 12x + x^2) \\ &= -x^2 + 12x + 13 \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

同様に、△AHC も直角三角形なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} h^2 &= 5^2 - x^2 \\ &= -x^2 + 25 \ \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

①, ②より、

$$\begin{aligned} -x^2 + 12x + 13 &= -x^2 + 25 \\ 12x &= 25 - 13 = 12 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

これを②に代入して、

$$h^2 = -1^2 + 25 = 24$$

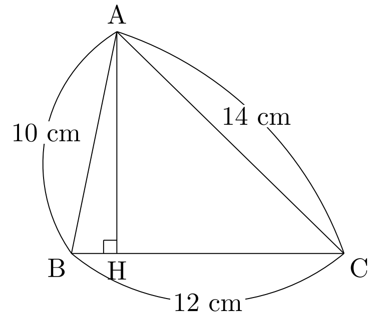
$h > 0$ より　$h = 2\sqrt{6}$ (cm)

【例題 2 − 2】

右の図のように、AB = 10 cm, BC = 12 cm, CA = 14 cm の △ABC があります。頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) BH の長さを求めなさい。

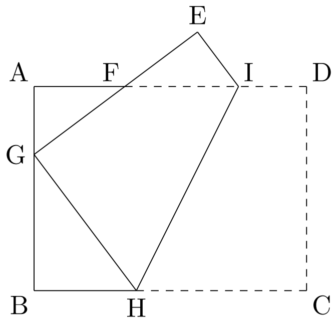
(2) △ABC の面積を求めなさい。



2.3　図形の折り返し

右の図は、長方形 ABCD を HI を折り目として折り返した図形です。

折り返した図形は、折り目（HI）についてもとの図形と線対称になるので、次のような特徴があります。



① 対応する図形は合同（対応する線分の長さや角の大きさが等しい）

② 折り目は、対応する点を結ぶ線分の垂直二等分線になる

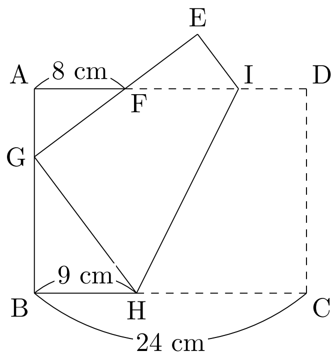
そのため、折り返しに関する問題では、この特徴を念頭に置きながら、直角三角形に三平方の定理や相似を利用します。

【例題 2 − 3】

右の図は HI を折り目として、長方形 ABCD を折り曲げた図です。

AF = 8 cm, BC = 24 cm, BH = 9 cm のとき、次の長さを求めなさい。

(1) BG　　(2) AB　　(3) IH



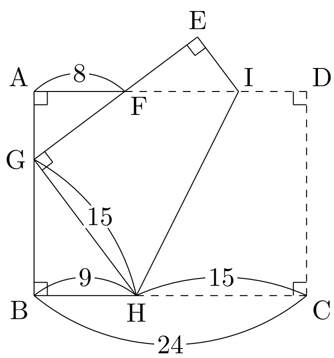
<解説>

(1) 折り返した図形は、対応する線分の長さや角の大きさが等しくなるので、

$$HG = HC = BC - BH$$
$$= 24 - 9 = 15\ (\mathrm{cm})$$

△GBH は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$BG = \sqrt{15^2 - 9^2}$$
$$= \sqrt{225 - 81}$$
$$= \sqrt{144} = 12\ (\mathrm{cm})$$



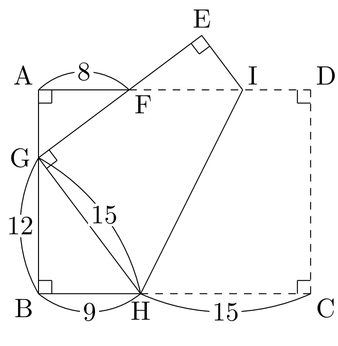
(2)

△GBH と △FAG で、

$$\angle GBH = \angle FAG = 90^\circ\ \cdots\cdots\ ①$$

三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle HGB + \angle GBH + \angle BHG = 180^\circ$$
$$\angle HGB + 90^\circ + \angle BHG = 180^\circ$$
$$\angle HGB + \angle BHG = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ\ \cdots\cdots\ ②$$



また、一直線のつくる角も 180° になるので、

$$\angle AGF + \angle EGH + \angle HGB = 180^\circ$$
$$\angle AGF + 90^\circ + \angle HGB = 180^\circ$$
$$\angle AGF + \angle HGB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \ \cdots\cdots \ ③$$

②, ③より、

$$\angle HGB + \angle BHG = \angle AGF + \angle HGB$$
$$\angle BHG = \angle AGF \ \cdots\cdots \ ④$$

①, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle GBH \backsim \triangle FAG$$

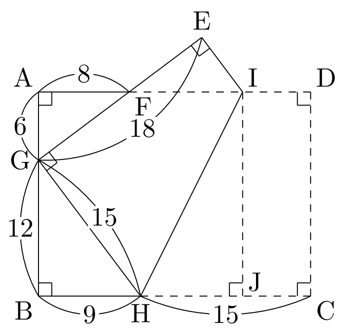
このことから、対応する線分の長さの比は等しいので、

$$AF : AG = GB : BH$$
$$8 : AG = \cancel{12}^{4} : \cancel{9}^{3}$$
$$AG = 3 \times 8 \times \frac{1}{2} = 6$$

よって、

$$AB = AG + GB = 6 + 12 = 18 \text{ (cm)}$$

(3) (2) より、$\triangle GBH \backsim \triangle FAG$ であるので、



$$BG : HG = AF : GF$$
$$\cancel{12}^{4} : \cancel{15}^{5} = 8 : GF$$
$$GF = 5 \times 8 \times \frac{1}{4} = 10 \text{ (cm)}$$

また、四角形 ABCD は長方形なので、

$$AB = DC = EG = 18 \text{ (cm)}$$

このことから、

$$EF = EG - GF = 18 - 10 = 8 \text{ (cm)}$$

$\triangle AGF$ と $\triangle EIF$ で、

$$\angle FAG = \angle FEI = 90^\circ \ \cdots\cdots \ ⑤$$

対頂角は等しいので、

$$\angle GFA = \angle IFE \ \cdots\cdots \ ⑥$$

また、

$$AF = EF = 8 \text{ (cm)} \ \cdots\cdots \ ⑦$$

であるので、⑤〜⑦より、三角形の 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{AGF} \equiv \triangle\mathrm{EIF}$$

対応する線分の長さは等しいので、

$$\mathrm{GF} = \mathrm{IF} = 10 \text{ (cm)}$$

よって、

$$\begin{aligned}\mathrm{BJ} &= \mathrm{AI} \\ &= \mathrm{AF} + \mathrm{FI} \\ &= 8 + 10 = 18 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

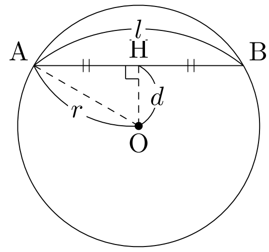
ここで図のように、点 I から BC に垂線を下ろしその交点を J とすると、

$$\mathrm{HJ} = \mathrm{BJ} - \mathrm{BH} = 18 - 9 = 9 \text{ (cm)}$$

△IHJ は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{IH} &= \sqrt{\mathrm{HJ}^2 + \mathrm{IJ}^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} \\ &= \sqrt{9^2 + 9^2 \times 2^2} \\ &= \sqrt{9^2 \times (1 + 2^2)} = 9\sqrt{5} \text{ (cm)}\end{aligned}$$

2.4 円の弦の長さ



右の図のような半径 r の円において、円の中心 O からの距離が d である弦 AB の長さを l とします。また、円の中心から弦に垂線を下ろし、その交点を H とすると、弦と円は OH に関して線対称な図形になるので、

$$\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \frac{l}{2}$$

このとき、△AOH は直角三角形になるので、三平方の定理より、

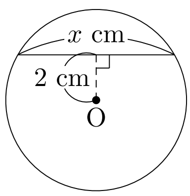
$$\frac{l}{2} = \sqrt{r^2 - d^2}$$
$$l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

となり、弦の長さを求めることができます。この式を公式として覚える必要はありませんが、弦の長さを求める手順はしっかり理解しておいてください。

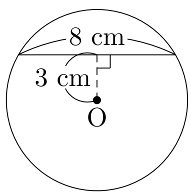
【例題 2 − 4】

次の図について、x の大きさを求めなさい。

(1) 円の半径は 4 cm

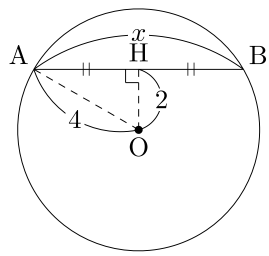


(2) 円の半径は x cm



＜解説＞

(1) 右の図のように A, B, H を定めると、円の半径が 4 cm であるので、



$$\mathrm{AO} = 4\ (\mathrm{cm}), \qquad \mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \frac{x}{2}$$

このとき、△AOH は直角三角形になるので、三平方の定理より、

$$\mathrm{AH} = \sqrt{4^2 - 2^2}$$
$$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

このことから x の大きさは、

$$x = \mathrm{AB} = \mathrm{AH} + \mathrm{BH}$$
$$= \mathrm{AH} \times 2$$
$$= 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

また、

$$\mathrm{OH} : \mathrm{AO} = 2 : 4 = 1 : 2$$

という関係から、

$$\mathrm{OH} : \mathrm{AO} : \mathrm{AH} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

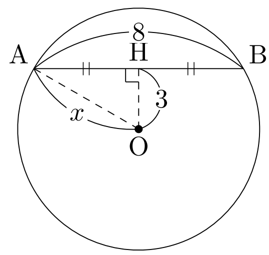
に気付くことができれば、

$$\begin{aligned} \mathrm{OH} : \mathrm{AH} &= 1 : \sqrt{3} \\ 2 : \mathrm{AH} &= 1 : \sqrt{3} \\ \mathrm{AH} &= 2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

のようにして、辺の比の関係を利用することでも長さを求めることができます。

(2) 右の図のように A, B, H を定めると、円の半径が x cm になるので、

$$\mathrm{AO} = 3\ (\mathrm{cm}), \qquad \mathrm{AH} = \mathrm{BH} = 4\ (\mathrm{cm})$$



このとき、△AOH は直角三角形になるので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5\ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

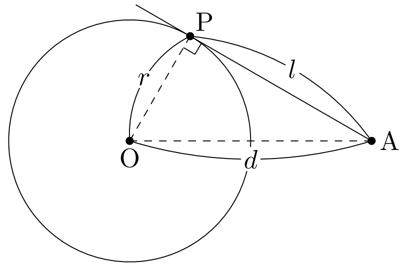
【演習 2 − 4】

(1) 半径が 13 cm の円 O について、中心 O からの距離が 5 cm である弦 AB の長さを求めなさい。

(2) 半径が 7 cm の円 O について、長さ 10 cm の弦と中心 O との距離を求めなさい。

2.5 円の接線の長さ

右の図のように、半径 r の円 O の中心からの距離が d である点を A とし、点 A から引いた接線の長さを l、接点を P とします。円の中心と接点とを結ぶ直線は接線と垂直に交わるので、



$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{AP}$$

よって、△POA は直角三角形になるので、三平方の定理より円の接線の長さは、

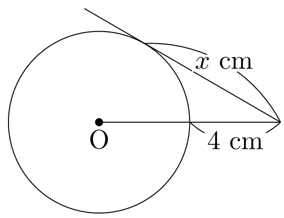
$$l = \sqrt{d^2 - r^2}$$

のようにして表されます。

円の接線に関する問題では、円の中心と円の接点とを結ぶ線（補助線）を引くと求めやすくなることが多くあります。

【例題 2 − 5】

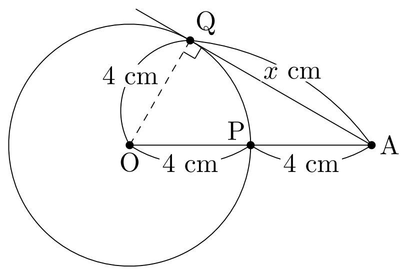
右の図の円の半径が 4 cm であるとき、x の大きさを求めなさい。



＜解説＞

右の図のように A, P, Q を定めます。

円の中心と接点を結ぶ半径は、接線と垂直に交わるので、$\angle\mathrm{OQA} = 90^\circ$ になり、△QOA は直角三角形になります。また、半径である OQ, OP の長さは 4 cm です。以上のことから、△QOA に三平方の定理を用いて、



$$\mathrm{QA} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OQ}^2}$$
$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

また、

$$\mathrm{OQ} : \mathrm{OA} = 4 : 8 = 1 : 2$$

という関係から

$$\mathrm{OQ} : \mathrm{OA} : \mathrm{QA} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

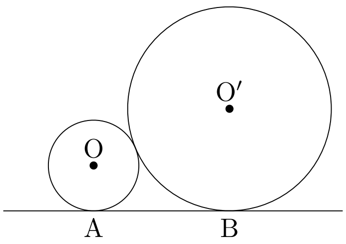
という関係に気付けます。そのため、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OQ} : \mathrm{QA} &= 1 : \sqrt{3} \\
4 : x &= 1 : \sqrt{3} \\
x &= 4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

のようにして、辺の比の関係を利用することでも長さを求めることもできます。

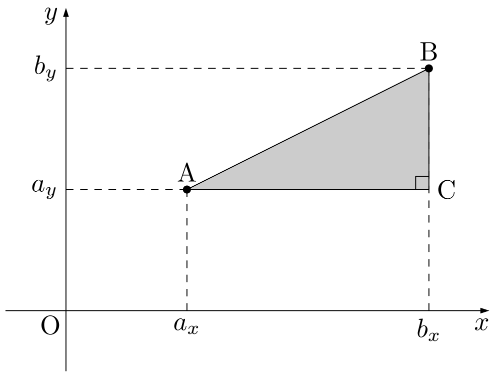
【演習 2 − 5】

右の図において、2 つの円 O, O′ は外接しています。点 A, B が、この 2 つの円 O, O′ に共通な接線の接点で、円の半径がそれぞれ 4 cm, 9 cm であるとき、線分 AB の長さを求めなさい。



2.6 座標平面上の 2 点間の距離

座標平面上に、2 点 A$(a_x,\ a_y)$, B$(b_x,\ b_y)$ があり、線分 AB が x 軸や y 軸と平行でない場合には、右の図のように、AB を斜辺とする直角三角形を作ることができます。このとき、



$$\mathrm{AC} = b_x - a_x, \qquad \mathrm{CB} = b_y - a_y$$

であるので、△BAC に三平方の定理を利用すると、AB の長さは、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CB}^2}\\ &= \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}\end{aligned}$$

と表されます。AB は 2 点間の距離を表すので、座標平面上の 2 点間の距離は,

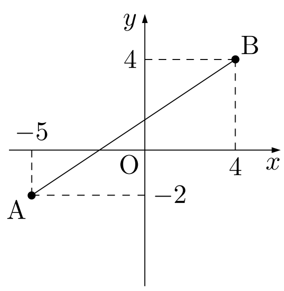
$$(2\text{ 点間の距離}) = \sqrt{(x\text{ 座標の差})^2 + (y\text{ 座標の差})^2}$$

で求めることができます。

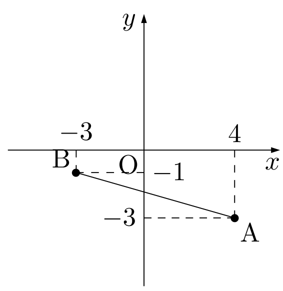
【例題 2 − 6】

座標平面上で、次の 2 点間の距離 AB を求めなさい。

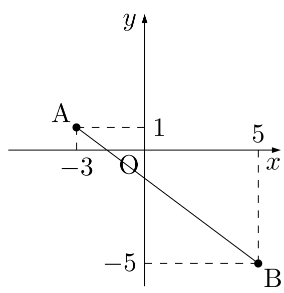
(1)



(2)



(3)

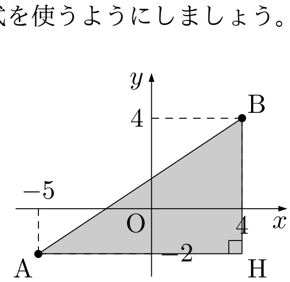


＜解説＞

公式に直接代入して答えを求めるのではなく、直角三角形をイメージしながら公式を使うようにしましょう。

(1) 右図のように、AB が直角三角形の斜辺となるように直角三角形を作ります。

この図から、

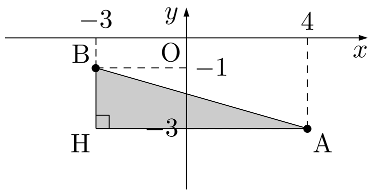


$$\mathrm{AH} = 4 - (-5) = 9, \qquad \mathrm{BH} = 4 - (-2) = 6$$

となるので、△BAH に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{9^2 + 6^2}\\ &= \sqrt{81 + 36}\\ &= \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\end{aligned}$$

(2) 右図のように、AB が直角三角形の斜辺となるように直角三角形を作ります。この図から、

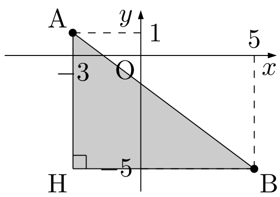


$$\mathrm{AH} = 4 - (-3) = 7, \qquad \mathrm{BH} = -1 - (-3) = 2$$

となるので、△BHA に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{53}\end{aligned}$$

(3) 右図のように、AB が直角三角形の斜辺となるように直角三角形を作ります。この図から、



$$\mathrm{AH} = 1 - (-5) = 6, \qquad \mathrm{BH} = 5 - (-3) = 8$$

となるので、△AHB に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} = 10\end{aligned}$$

【演習 2 − 6】

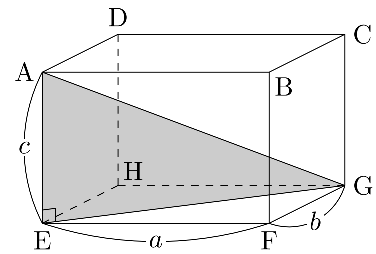
座標平面上で、次の 2 点間の距離 AB を求めなさい。

(1) A(2, 2), B(6, 6)　　(2) A(−1, 4), B(2, −2)　　(3) A(0, 3), B(4, 0)

3 三平方の定理と空間図形

空間図形は苦手という人が多いと思いますが、空間図形を空間図形のまま考えると難しくなります。「直方体の対角線」では、直方体という空間図形を、△AEG と △EFG という平面図形で考えます。このように、いかにして空間図形を平面図形で考えられるようにするかが、空間図形の問題を考える上でのポイントになります。このことを念頭に置きながら問題に取り組むようにしましょう。

3.1 直方体の対角線



右の図のような直方体があります。このとき、辺 AE は面 EFGH に垂直なので、

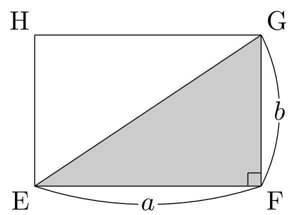
$$\mathrm{AE} \perp \mathrm{EG}$$

となり、△AEG は直角三角形になります。

そこで、△AEG に三平方の定理を用いると、

$$\mathrm{AG} = \sqrt{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{EG}^2} \quad \cdots\cdots ①$$

となります。



次に、△EFG に着目すると、EG は長方形 EFGH の対角線なので、△EFG は直角三角形になります。そこで、△EFG に三平方の定理を用いると、

$$\mathrm{EG}^2 = \mathrm{EF}^2 + \mathrm{GF}^2$$

となるので、これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{AG} &= \sqrt{\mathrm{AE}^2 + (\mathrm{EF}^2 + \mathrm{GF}^2)} = \sqrt{c^2 + (a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

と、線分 AG（直方体の**対角線**）の長さを求めることができます。

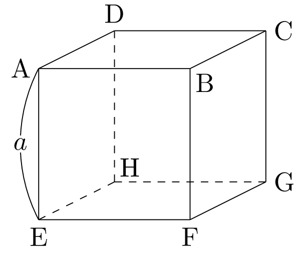
このことから、

$$(\text{直方体の対角線}) = \sqrt{(\text{縦})^2 + (\text{横})^2 + (\text{高さ})^2}$$

という関係が成り立つので、これを公式として利用していきます。

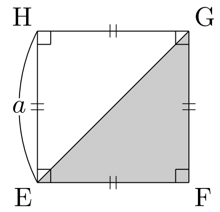
【例題 3 − 1】

右の図のような 1 辺の長さが a の立方体があります。このとき、立方体の対角線 AG の長さを求めなさい。



＜解説＞

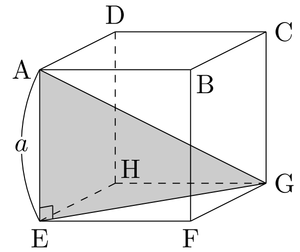
右の図のように、立方体の底面は 1 辺の長さが a の正方形になります。また、△EFG は直角三角形なので三平方の定理を利用すれば、



$$\begin{aligned} \mathrm{EG}^2 &= \mathrm{EF}^2 + \mathrm{GF}^2 \\ &= a^2 + a^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

となります。

このことから、立方体の対角線 AG は、右図のような △AEG（直角三角形）に着目して三平方の定理を用いれば、



$$\begin{aligned} \mathrm{AG} &= \sqrt{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{EG}^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a \end{aligned}$$

また、立方体を直方体の特別なものだと考えれば、直方体の対角線を求める公式

$$(\text{直方体の対角線}) = \sqrt{(\text{縦})^2 + (\text{横})^2 + (\text{高さ})^2}$$

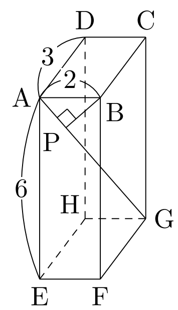
を利用することができ、

$$\begin{aligned} (\text{立方体の対角線}) &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a \end{aligned}$$

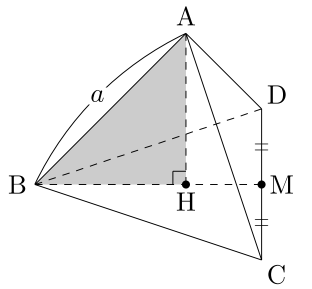
と求めることもでき、この結果を公式として利用してください。

【演習 3 − 1】

右図の直方体 ABCD-EFGH において、対角線 AG に頂点 B から垂線を下ろし、その交点を P とします。このとき、線分 BP の長さを求めなさい。

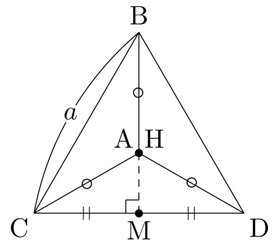


3.2 角錐の高さと体積



右の図のようなすべての辺の長さが a の正三角錐（正四面体）A-BCD について考えます。

頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引くと、この AH の長さが正四面体の高さになります。このとき、図のように △ABH に着目すると直角三角形であるので、三平方の定理を利用して AH の長さを求めることができますが、その前にまずは BH の長さを求める必要があります。



正四面体 A-BCD を上から見ると、右図のように点 A と点 H が重なって見えます。正四面体はすべての辺の長さが等しいので、AB = AC = AD であることから、

$$\mathrm{HB} = \mathrm{HC} = \mathrm{HD}$$

となるはずです。このようにして、正四面体のような正多角錐の垂線の足（点 H）は、底面の各頂点から等しい距離にある点（これを**外心**といいます）になります。また、正三角錐（正四面体）の底面は正三角形になりますが、正三角形の外心と重心（重さの中心）は一致し、重心は中線（三角形の頂点と辺の中点とを結ぶ線 BM）を 2 : 1 に分割する点になります。△BCM は 60° の角をもつ直角三角形なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{BC} : \mathrm{BM} &= 2 : \sqrt{3} \\ a : \mathrm{BM} &= 2 : \sqrt{3} \\ \mathrm{BM} &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned}$$

そして、BH : HM = 2 : 1 より、

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3}\mathrm{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

よって、△ABH に三平方の定理を利用して、正四面体の高さ AH は、

$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{aligned}$$

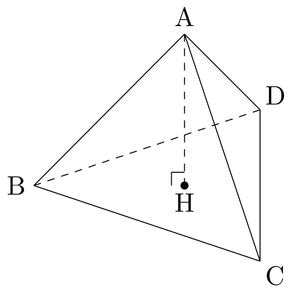
となり、正四面体の体積は、

$$\begin{aligned} (\text{正四面体の体積}) &= \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times \mathrm{AH} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

この正四面体の高さと体積を公式として利用できますが、この高さと体積を求めた考え方は、他の正多角錐の高さや体積を求めるときにも利用できるものになります。

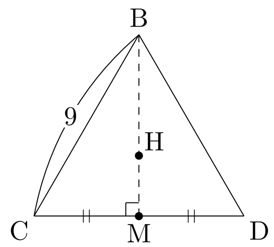
【例題 3 − 2】

正三角錐 A-BCD において、底面 BCD は 1 辺の長さが 9 cm の正三角形で、辺 AB, AC, AD の長さは 14 cm です。頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引くとき、この正三角錐の高さと体積を求めなさい。



＜解説＞

辺 CD の中点を M とすると、△BCD は 1 辺の長さ 9 cm の正三角形で、△BCM は 60° の角をもつ直角三角形になるので、

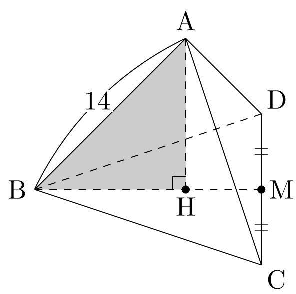


$$\begin{aligned} \mathrm{BC} : \mathrm{BM} &= 2 : \sqrt{3} \\ 9 : \mathrm{BM} &= 2 : \sqrt{3} \\ \mathrm{BM} &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

また、点 H は △BCD の重心になるので、BH : HM = 2 : 1 であることから、

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3}\mathrm{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

△ABH は直角三角形なので、三平方の定理より、正三角錐 A-BCD の高さ AH は、



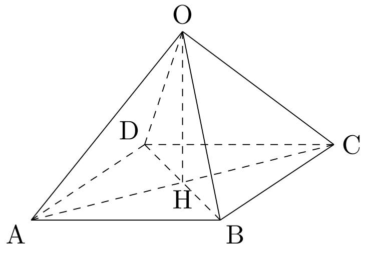
$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &= \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

よって、正三角錐の体積は、

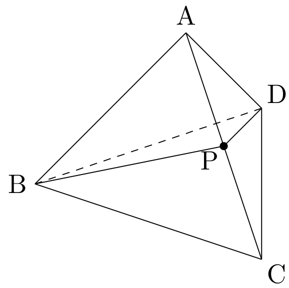
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times \mathrm{AH} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) \times 13 \\ &= \frac{351\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

【演習 3 − 2】

8 本の辺の長さがすべて 10 cm の正四角錐 O-ABCD があります。
この正四角錐の高さと体積を求めなさい。



3.3 立体の面上の最短距離



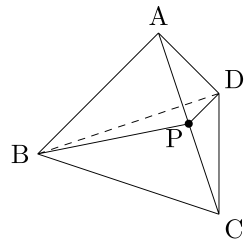
三角錐 A-BCD の辺 AC 上に点 P があり、BP + PD が最小となる長さを求めるような、立体の面上の最短距離について考える問題では、次のような手順で求めていきます。

(i) 立体の展開図をかく。
立体（空間図形）をそのまま考えるのは難しいので平面（展開図）にして考えます。

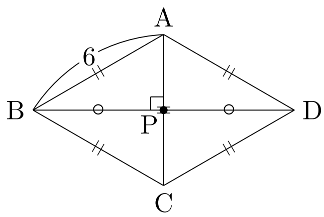
(ii) 三平方の定理などを利用して最短距離を求める。
複数の点を結ぶ線分は、一直線上に並ぶとき（最初の点と最後の点を結んだ線分）の長さが最短になるので、その長さを三平方の定理などを利用して求めます。

【例題 3 − 3】

右の図は 1 辺の長さが 6 cm の正四面体です。正四面体 ABCD の辺 AC 上に、点 P を BP + PD が最小になるようにとるとき、BP + PD の長さを求めなさい。



<解説>



複数の点を結ぶ線分の長さは、一直線上に並ぶときに最短となりますが、立体のままでは考えにくいので、まずは右図のように展開図（必要な部分だけでＯＫ）を作ります。このとき、図のように B, P, D が一直線上に並ぶときに BP + PD は最小になります。正四面体の各面は正三角形になるので、△ABP は直角三角形。よって、辺の比の関係から、

$$\mathrm{BP} : \mathrm{BA} = \sqrt{3} : 2$$
$$\mathrm{BP} : 6 = 3\sqrt{3} : 6$$
$$\mathrm{BP} = 3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

また、BP = PD となるので、

$$\mathrm{BP} + \mathrm{PD} = 2\mathrm{BP} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

【演習 3 − 3】

右の図のように、底面の半径が 4 cm、母線が 12 cm の円錐の点 A から、円錐の側面を通って OA の中点 M まで糸をかけます。かけた糸の長さが最も短くなるときの糸の長さを求めなさい。