【中３数学】関数 $y = ax^2$

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 関数 $y = ax^2$ 1

1.1 2 乗に比例する関数 1

1.2 2 乗に比例する関数の決定 2

1.3 2 乗に比例する関数の性質 3

2 関数 $y = ax^2$ のグラフ 5

2.1 関数 $y = ax^2$ のグラフ 5

2.2 放物線の式 8

2.3 関数の変域 9

2.4 変化の割合（基本） 12

2.5 変化の割合（公式） 14

3 関数 $y = ax^2$ の利用 15

3.1 放物線と直線の式 15

3.2 放物線と直線の交点 17

4 いろいろな関数 19

4.1 いろいろな関数 19

1　関数 $y = ax^2$

1.1　2 乗に比例する関数

一般的に、「□は○に比例する」という関係は、

□ =（定数）× ○

という形で表されます。そのため、2 つの変数 x, y の間に、

$y = ax^2$（$a \fallingdotseq 0$）

の関係があれば、**y は x の 2 乗に比例する**といい、a を**比例定数**といいます。

【例題 1 − 1】

次の (ア)〜(ウ) について、y が x の 2 乗に比例するものはどれですか。記号で答えなさい。

(ア) 1 辺の長さが x cm の正方形の面積 y cm^2

(イ) 底面の半径が x cm、高さが 5 cm の円柱の体積 y cm^3

(ウ) 縦の長さが 3 cm、横の長さが 5 cm の長方形の縦、横をそれぞれ x cm ずつ延ばしてできる長方形の面積 y cm^2

<解説>

y を x の式で表したとき、$y = ax^2$ の関係があるのかどうかを確認します。

(ア) 1 辺の長さが x cm である正方形の面積は、

$$\begin{aligned}(\text{正方形の面積}) &= (1\text{ 辺の長さ})^2 \\ y &= x^2\end{aligned}$$

と表されるので、y は x の 2 乗に比例します。

(イ) 円柱の体積は、

$$\begin{aligned}(\text{円柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \\ y &= \pi x^2 \times 5 = 5\pi x^2\end{aligned}$$

と表されるので、y は x の 2 乗に比例します。

(ウ) 縦、横を x cm ずつ延ばした長方形の面積は、

$$\begin{aligned}(\text{長方形の面積}) &= (\text{縦の長さ}) \times (\text{横の長さ}) \\ y &= (3 + x) \times (5 + x) \\ &= x^2 + 8x + 15\end{aligned}$$

と表されるので、y は x の 2 乗に比例しません。

1.2　2 乗に比例する関数の決定

y が x の 2 乗に比例するとき、a を 0 でない定数として、$y = ax^2$ とおくことができます。この式に問題の条件をあてはめて、2 乗に比例する関数を決定します。

【例題 1 − 2】

次の各問いに答えなさい。

(1) y は x の 2 乗に比例し、比例定数が 8 になるとき、y を x の式で表しなさい。

(2) y は x の 2 乗に比例し、$x = 2$ のとき $y = 1$ でした。y を x の式で表しなさい。

＜解説＞

(1) 比例定数が 8 のとき、$a = 8$ とあるので、

$$y = 8x^2$$

となります。

(2) 「$x = 2$ のとき $y = 1$」になるので、$x = 2,\ y = 1$ を $y = ax^2$ に代入すると、

$$\begin{aligned} a \times 2^2 &= 1 \\ 4a &= 1 \\ a &= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

のようにして比例定数 a の値が決まります。このことから、

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

となります。

1.3　2 乗に比例する関数の性質

関数 $y = 2x^2$ について、$x = -5,\ -4,\ -3,\ \cdots$ と x の値を代入して計算することにより、次のような x と y の対応表を作ることができます。

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
x^2	$\cdots$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	$\cdots$
y	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$

2 つの数量が比例しているような関係では、一方を 2 倍、3 倍、4 倍、$\cdots$ とすると、もう一方も 2 倍、3 倍、4 倍、$\cdots$ という関係になりました。この表からもわかるように、x^2 の値が

$$1 \longrightarrow 4, \qquad 1 \longrightarrow 9$$

のように、4 倍、9 倍されると、y の値も

$$2 \longrightarrow 8, \qquad 2 \longrightarrow 18$$

と 4 倍、9 倍されるので、x^2 の値が 2 倍、3 倍、 $\cdots$、 n 倍されると、y の値も 2 倍、3 倍、$\cdots$, n 倍になり、y が x の 2 乗に比例していることがわかります。

しかし、x の値が、

$$1 \longrightarrow 2, \qquad 1 \longrightarrow 3$$

のように、2 倍、3 倍されると、y の値は、

$$2 \longrightarrow 8, \qquad 2 \longrightarrow 18$$

と $4(= 2^2)$ 倍、$9(= 3^2)$ 倍になっているので、x の値が 2 倍、3 倍、$\cdots$、n 倍されると、y の値は、2^2 倍、3^2 倍、$\cdots$、n^2 倍されることになります。

【例題 1 － 3】

右の表は、平らな板に垂直に風をあて、板が風によって受ける力を、風速をいろいろ変えて測定した結果です。

風速 (m/秒)	2	4	6	8	10
受ける力 (N)	0.4	1.6	3.6	6.4	10

(1) 風速が 2 倍、3 倍、$\cdots$ になると、受ける力はそれぞれ何倍になりますか。

(2) 風速が 5m/秒のとき、受ける力は何 N（ニュートン）になりますか。

＜解説＞

(1) 風速が、

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8$$

のように 2 倍ずつされると、受ける力は、

$$0.4 \longrightarrow 1.6 \longrightarrow 6.4$$

と $4\ (=2^2)$ 倍ずつされていて、風速が、

$$2 \longrightarrow 6$$

と 3 倍になると、受ける力は、

$$0.4 \longrightarrow 3.6$$

と $9\ (=3^2)$ 倍されています。このことから、風速が 2 倍、3 倍、$\cdots$ になると、受ける力は 2^2 倍、3^2 倍、$\cdots$ になります。

(2) (1) より、受ける力は風速の 2 乗に比例している関係になります。そこで、風速を x m/秒、受ける力を y N とすると、a を定数として、

$$y = ax^2$$

と表すことができるので、$x = 2$ のとき、$y = 0.4$ となることから、

$$\begin{aligned} a \times 2^2 &= 0.4 \\ 4a &= 0.4 \\ a &= 0.4 \times \frac{1}{4} = 0.1 \end{aligned}$$

つまり、$y = 0.1x^2$ となります。よって、$x = 5$ のとき、

$$y = 0.1 \times 5^2 = 2.5$$

となるので、風速が 5 m/秒のとき、受ける力は 2.5N になります。

2　関数 $y = ax^2$ のグラフ

2.1　関数 $y = ax^2$ のグラフ

まずは、関数 $y = ax^2$ のグラフの基本となる、$a = 1$ のときのグラフ、つまり、関数 $y = x^2$ のグラフについて考えていきます。

グラフをかくには、

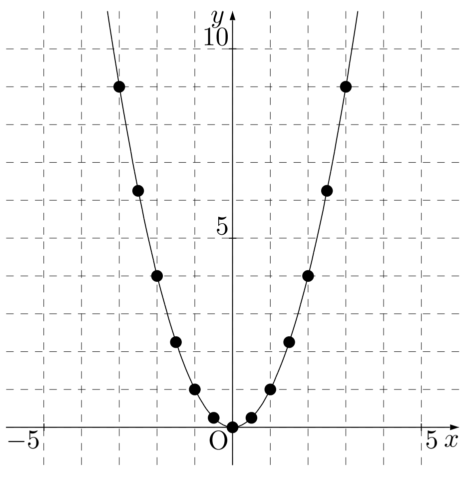
① x と y の対応表を完成させる。
② ①の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

という手順によってかくことができるので、ここでもその手順によって、関数 $y = x^2$ のグラフをかいてみます。

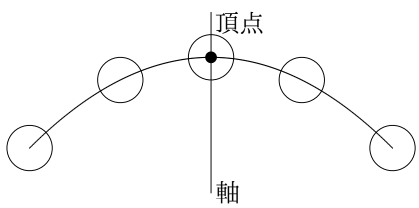
① x と y の対応表を完成させる。
x の値を多く細かくすれば、それだけグラフはかきやすくはなりますが、その分手間がかかってしまうので、ここでは次のような表を作成しました。

x	$\cdots$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	$\cdots$

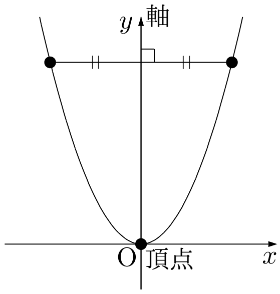
② ①の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。
対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶと、次のような曲線をかくことができます。



サッカーボールや野球のボールなど、ある物体を斜めに投げたときを考えると、その物体がたどる道筋は右のようになります。このように、「物を放ったときにできる線」を放物線といいます。関数 $y = ax^2$ のグラフも上下さかさまになっていますが、同じ形なので放物線になります。



また、放物線はあるところを基準にして左右対称な形（線対称）になるため対称軸をもち、この対称軸のことを単に**軸**といい、対称軸と放物線の交点のことを、放物線の**頂点**といいます。関数 $y = x^2$ のグラフでは、軸は y 軸、原点が頂点になります。一般的に、関数 $y = ax^2$ のグラフは、「**原点を通り、y 軸について対称な放物線**」になります。



関数 $y = ax^2$ のグラフをかくときには、

① x と y の対応表を作る。
② 点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

という手順でかくことが基本になりますが、y 軸に対称なグラフになるので、右の表のように $x \geqq 0$ となる部分の数値を考えて、

x	0	1	2	3	$\cdots$
y	0	a	$4a$	$9a$	$\cdots$

点 $(1,\ a)$ を図にかき入れる $\longrightarrow$ その点と y 軸について対称な点 $(-1,\ a)$ も図にかき入れる

点 $(2,\ 4a)$ を図にかき入れる $\longrightarrow$ その点と y 軸について対称な点 $(-2,\ 4a)$ も図にかき入れる

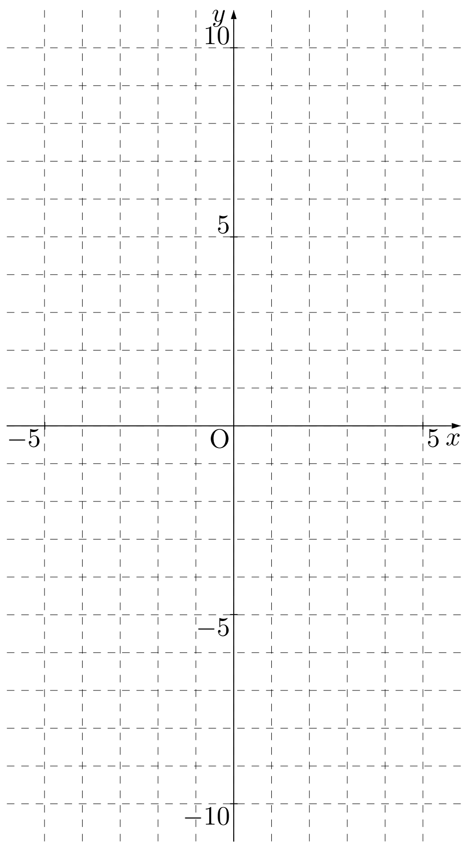
のように、y 軸について対称になる点を合わせて図にかき入れるようにすると、効率よくグラフをかくことができます。

【例題 2 − 1】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$



＜解説＞

$x = 0, 1, 2, 3, 4$ を代入して、x と y の対応表を作成すると次のようになります。

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

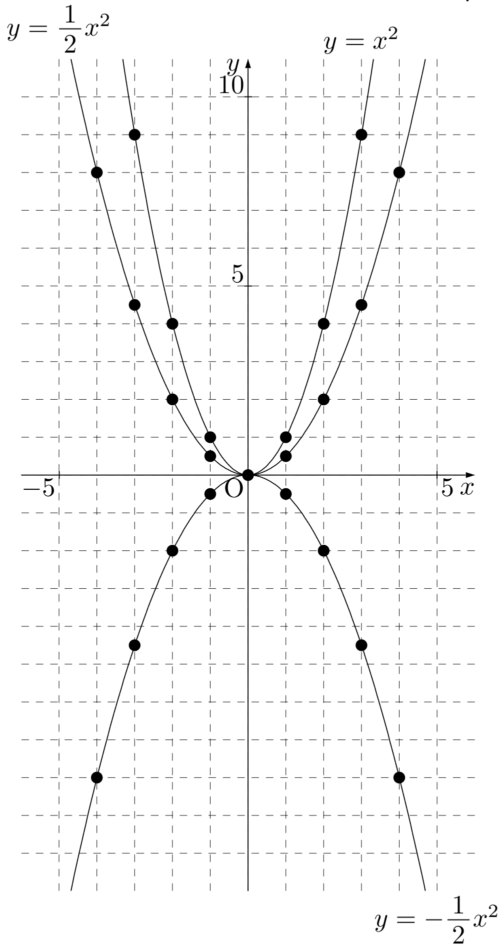
(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8

表の対応する点と、その点と y 軸について対称となる点も図にかき入れてなめらかに結ぶと、右のようなグラフをかくことができます。

また、$y = x^2$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを見比べてみるとわかるように、関数 $y = ax^2$ のグラフでは、$|a|$ の値が大きいほどグラフの開き方は小さく、よりとがった形になります

そして、$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフは、x 軸をはさんで上下逆さまで、x 軸に関して対称なグラフになっています。つまり、$a > 0$ とすると、関数 $y = ax^2$ のグラフと $y = -ax^2$ のグラフは、x 軸について対称なグラフということになります。



2.2　放物線の式

関数 $y = ax^2$ のグラフは、原点を通り、y 軸について対称な放物線になりますが、逆に、原点を通り、y 軸について対称な放物線であるグラフの式は、$y = ax^2$ と表すことができます。

また、関数 $y = ax^2$ のグラフが点 $(p,\ q)$ を通るとき、$y = ax^2$ に $x = p,\ y = q$ を代入すると、等式が成り立ちます。

【例題 2 − 2】

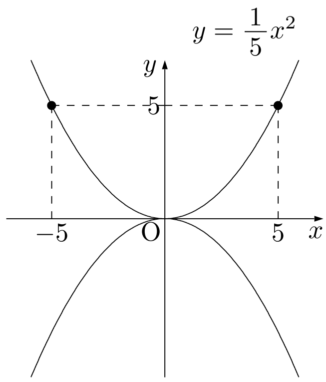
(1) 関数 $y = ax^2$ のグラフが、点 $(2,\ 3)$ を通るとき、a の値を求めなさい。

(2) グラフが $y = \dfrac{1}{5}x^2$ のグラフと x 軸について対称になる関数の式を求めなさい。

＜解説＞

(1) グラフが点 $(2,\ 3)$ を通るので、$y = ax^2$ に $x = 2,\ y = 3$ を代入して、

$$
\begin{aligned}
a \times 2^2 &= 3 \\
a \times 4 &= 3 \\
a &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$



(2) $y = \dfrac{1}{5}x^2$ のグラフと、そのグラフと x 軸について対称になるグラフは右のようになります。
$y = ax^2$ のグラフが x 軸について対称になるとき、比例定数 a の符号が逆になるので、求める関数の式は、

$$y = -\frac{1}{5}x^2$$

【演習 2 − 2】

次の条件にあてはまる放物線は、それぞれどのような関数のグラフになりますか。

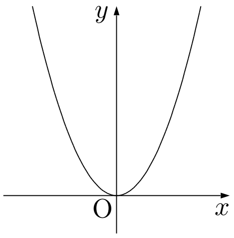
(1) 原点を頂点とし、点 $(-2,\ 2)$ を通る放物線

(2) y 軸を対称軸とし、2 点 $(0,\ 0),\ (-3,\ -3)$ を通る放物線

2.3 関数の変域

関数 $y = ax^2$ のグラフには次のような特徴があります。

(i) $a > 0$ のとき（上に開いている形）



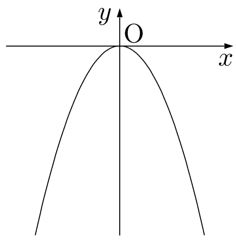
$x \leqq 0$ の範囲で、y の値が減少

$x = 0$ で、y の値は 0（最小）

$x \geqq 0$ の範囲で、y の値が増加

y の変域は、$y \geqq 0$

(ii) $a < 0$ のとき（下に開いている形）



$x \leqq 0$ の範囲で、y の値が増加

$x = 0$ で、y の値は 0（最大）

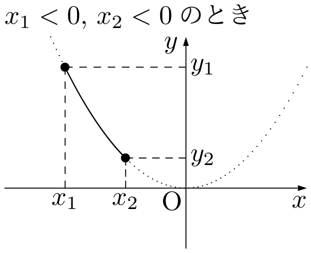
$x \geqq 0$ の範囲で、y の値が減少

y の変域は、$y \leqq 0$

そのため、x の変域 $x_1 \leqq x \leqq x_2$ において、y の変域は次のような場合が考えられます。

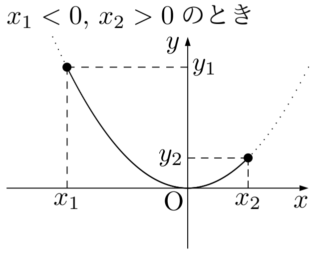
(i) $a > 0$ のとき（上に開いている形）

① $x_1 < 0,\ x_2 < 0$ のとき



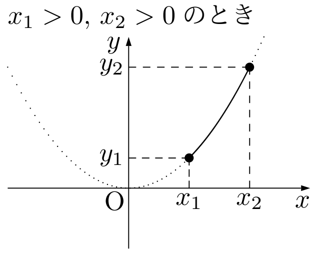
y の変域：$y_2 \leqq y \leqq y_1$

② $x_1 < 0,\ x_2 > 0$ のとき



y の変域：$0 \leqq y \leqq y_1$

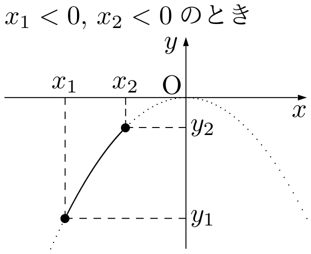
③ $x_1 > 0,\ x_2 > 0$ のとき



y の変域：$y_1 \leqq y \leqq y_2$

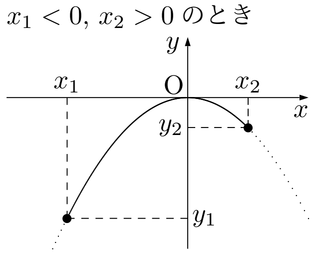
(ii) $a < 0$ のとき（下に開いている形）

① $x_1 < 0,\ x_2 < 0$ のとき



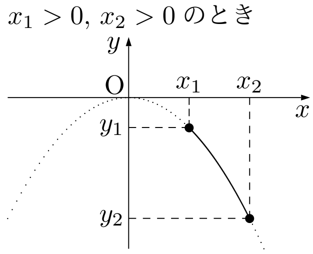
y の変域：$y_1 \leqq y \leqq y_2$

② $x_1 < 0,\ x_2 > 0$ のとき



y の変域：$y_1 \leqq y \leqq 0$

③ $x_1 > 0,\ x_2 > 0$ のとき



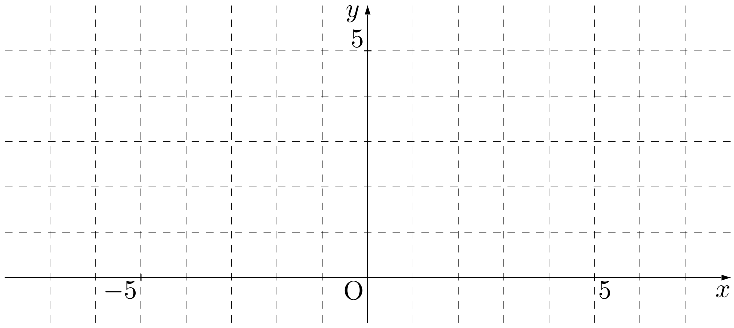
y の変域：$y_2 \leqq y \leqq y_1$

x の変域に制限のある関数のグラフをかくときは、x のとりうることのできる範囲のグラフを実線、それ以外の範囲のグラフはかかないでおくか、点線にしてかくようにします。

【例題２－３】

次の関数についてグラフをかき、y の変域を求めなさい。

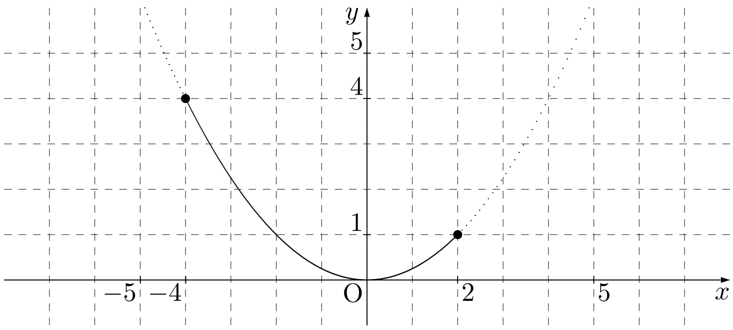
(1) $y=\dfrac{1}{4}x^2 \quad (-4 \leqq x \leqq 2)$　　(2) $y=\dfrac{1}{9}x^2 \quad (3 \leqq x \leqq 6)$



＜解説＞

変域を考える問題では、問題に指示がなくても必ずグラフを用いて考えるようにします。

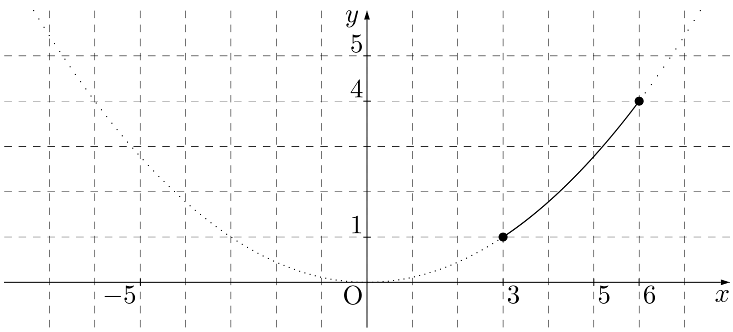
(1) 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の $-4 \leqq x \leqq 2$ におけるグラフは、次の図の放物線の実線部分になります。



このことから、y の変域（y のとりうる値の範囲）は、

$0 \leqq y \leqq 4$

(2) 関数 $y=\dfrac{1}{9}x^2$ の $3 \leqq x \leqq 6$ におけるグラフは、次の図の放物線の実線部分になります。



このことから、y の変域（y のとりうる値の範囲）は、

$$1 \leqq y \leqq 4$$

【演習 2 − 3】

関数 $y = ax^2$ について、x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき、y の変域は $b \leqq y \leqq 27$ になります。このとき、a, b の値を求めなさい。

2.4　変化の割合（基本）

関数 $y = ax^2$ の変化の割合は、1 次関数と同じように「x の増加量に対する y の増加量」になるので、

$$(\text{変化の割合}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

で求めることができます。

【例題 2 − 4】

下のそれぞれの関数について、x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 1 から 2 まで　　② 2 から 4 まで

(1) $y = 2x$　(2) $y = -4x - 1$　(3) $y = 3x^2$　(4) $y = -x^2$

＜解説＞

(1) ① $y = 2x$ に $x = 1, 2$ を代入すると、

(i) $x = 1$ を代入：$y = 2 \times 1 = 2$

(ii) $x = 2$ を代入：$y = 2 \times 2 = 4$

となるので、変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = \frac{2}{1} = 2 \qquad (x\text{ の係数と一致})$$

				増加量
y	2	$\longrightarrow$	4	$4 - 2 = 2$
x	1	$\longrightarrow$	2	$2 - 1 = 1$

② $y = 2x$ に $x = 2, 4$ を代入すると、

(i) $x = 2$ を代入：$y = 2 \times 2 = 4$

(ii) $x = 4$ を代入：$y = 2 \times 4 = 8$

となるので、変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = 2 \qquad (x\text{ の係数と一致})$$

				増加量
y	4	$\longrightarrow$	8	$8 - 4 = 4$
x	2	$\longrightarrow$	4	$4 - 2 = 2$

(2) ① $y = -4x - 1$ に $x = 1, 2$ を代入すると、

(i) $x = 1$ を代入：$y = -4 \times 1 - 1 = -5$

(ii) $x = 2$ を代入：$y = -4 \times 2 - 1 = -9$

となるので、変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = -\frac{4}{1} = -4 \qquad (x\text{ の係数と一致})$$

				増加量
y	-5	$\longrightarrow$	-9	$-9 - (-5) = -4$
x	1	$\longrightarrow$	2	$2 - 1 = 1$

② $y = -4x - 1$ に $x = 2, 4$ を代入すると、

(i) $x = 2$ を代入：$y = -4 \times 2 - 1 = -9$

(ii) $x = 4$ を代入：$y = -4 \times 4 - 1 = -17$

となるので、変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = -\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}^{1}} = -4 \qquad (x\text{ の係数と一致})$$

				増加量
y	-9	$\longrightarrow$	-17	$-17 - (-9) = -8$
x	2	$\longrightarrow$	4	$4 - 2 = 2$

(3) ① $y = 3x^2$ に $x = 1, 2$ を代入すると、
（ｉ）$x = 1$ を代入：$y = 3 \times 1^2 = 3$
（ii）$x = 2$ を代入：$y = 3 \times 2^2 = 12$
となるので、変化の割合は、

				増加量
y	3	$\longrightarrow$	12	$12 - 3 = 9$
x	1	$\longrightarrow$	2	$2 - 1 = 1$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{9}{1} = 9$$

② $y = 3x^2$ に $x = 2, 4$ を代入すると、
（ｉ）$x = 2$ を代入：$y = 3 \times 2^2 = 12$
（ii）$x = 4$ を代入：$y = 3 \times 4^2 = 48$
となるので、変化の割合は、

				増加量
y	12	$\longrightarrow$	48	$48 - 12 = 36$
x	2	$\longrightarrow$	4	$4 - 2 = 2$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{\cancel{36}^{18}}{\cancel{2}^{1}} = 18$$

(4) ① $y = -x^2$ に $x = 1, 2$ を代入すると、
（ｉ）$x = 1$ を代入：$y = -1^2 = -1$
（ii）$x = 2$ を代入：$y = -2^2 = -4$
となるので、変化の割合は、

				増加量
y	-1	$\longrightarrow$	-4	$-4 - (-1) = -3$
x	1	$\longrightarrow$	2	$2 - 1 = 1$

$$(\text{変化の割合}) = -\frac{3}{1} = -3$$

② $y = -x^2$ に $x = 2, 4$ を代入すると、
（ｉ）$x = 2$ を代入：$y = -2^2 = -4$
（ii）$x = 4$ を代入：$y = -4^2 = -16$
となるので、変化の割合は、

				増加量
y	-4	$\longrightarrow$	-16	$-16 - (-4) = -12$
x	2	$\longrightarrow$	4	$4 - 2 = 2$

$$(\text{変化の割合}) = -\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{2}^{1}} = -6$$

1 次関数でも学習しましたが、x がどの値からどの値まで増加するかにかかわらず、1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = a$$

と比例定数（x の係数）になり、一定の値になります。しかし、関数 $y = ax^2$ では、変化の割合は一定の値になるのではなく、①, ②で異なる値になりました。x がどの値からどの値まで増加するかによって異なるので注意しましょう。

【演習 2 − 4】

2 つの関数 $y = x^2$ と $y = 6x - 1$ について、x の値が a から $a + 2$ まで増加するときの変化の割合が等しくなるとき、a の値を求めなさい。

2.5　変化の割合（公式）

関数 $y=ax^2$ について、x の値が p から q まで増加するときの変化の割合を考えてみると、

				増加量
y	ap^2	$\longrightarrow$	aq^2	aq^2-ap^2
x	p	$\longrightarrow$	q	$q-p$

$$
\begin{aligned}
(\text{変化の割合}) &= \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{aq^2-ap^2}{q-p} \\
&= \frac{a(q^2-p^2)}{q-p} \\
&= \frac{a(q+p)\cancel{(q-p)}}{\cancel{q-p}} \\
&= a(p+q)
\end{aligned}
$$

という式を導くことができ、この式を公式として利用します。

【例題２－５】

下のそれぞれの関数について、x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 1 から 2 まで　　② 2 から 4 まで

(1) $y=3x^2$　　(2) $y=-x^2$

＜解説＞

(1) ① $(\text{変化の割合})=3\times(1+2)=9$　　② $(\text{変化の割合})=3\times(2+4)=18$

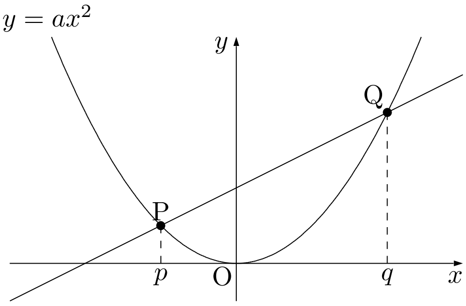
(2) ① $(\text{変化の割合})=-1\times(1+2)=-3$　　② $(\text{変化の割合})=-1\times(2+4)=-6$

【演習２－５】

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ において、x の値が a から $a+2$ まで増加したときの変化の割合が 4 であるとします。このとき、a の値を求めなさい。

3　関数 $y = ax^2$ の利用

3.1　放物線と直線の式



右の図のように、放物線 $y = ax^2$ 上の 2 点 P, Q を通る直線の式について考えます。

2 点 P, Q は $y = ax^2$ 上の点なので、

$$\mathrm{P}(p,\ ap^2), \qquad \mathrm{Q}(q,\ aq^2)$$

このことから、2 点 P, Q を通る直線の式は、

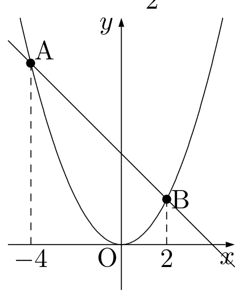
$$\begin{aligned} y &= \frac{aq^2 - ap^2}{q - p}(x - p) + ap^2 \\ &= a(p + q)(x - p) + ap^2 \\ &= a(p + q)x - ap(p + q) + ap^2 \\ &= a(p + q)x - \cancel{ap^2} - apq + \cancel{ap^2} \\ &= a(p + q)x - apq \end{aligned}$$

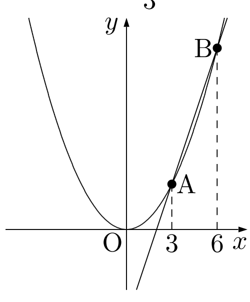
となり、直線 PQ の傾きは $a(p + q)$、直線の y 切片は $-apq$ と表され、これらを公式と利用することができます。このとき、直線 PQ の傾きは、x の値が p から q まで変化するときの変化の割合になり、直線 PQ の式は、2 点の x 座標のみで求められるということがポイントです。

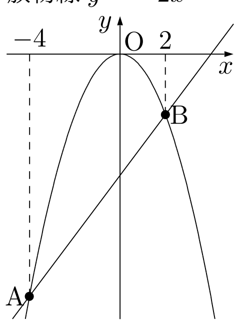
【例題 3 − 1】

次の放物線において、直線 AB の式を求めなさい。

(1) 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$　(2) 放物線 $y = \dfrac{1}{3}x^2$　(3) 放物線 $y = -2x^2$







＜解説＞

公式にあてはめて直線の式を求めていきます。図（グラフ）が与えられているので、直線の傾きや切片が妥当かどうかもチェックするようにしましょう。

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(-4 + 2)x - \frac{1}{2} \times (-4) \times 2 \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(3 + 6)x - \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \\ &= 3x - 6 \end{aligned}$$

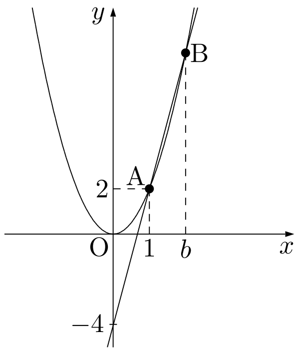
(3)

$$
\begin{aligned}
y &= -2(-4+2)x - (-2)\times(-4)\times 2 \\
&= 4x - 16
\end{aligned}
$$

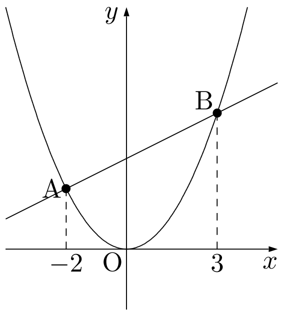
【演習 3 − 1】

放物線 $y = ax^2$ において、a, b の値を求めなさい。

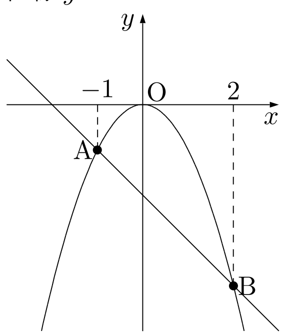
(1)



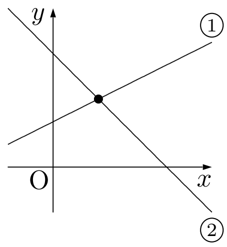
(2) 直線 $y = \dfrac{1}{2}x + b$



(3) 直線 $y = bx - 4$



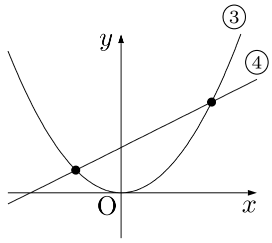
3.2　放物線と直線の交点



右の図のように、2 つの直線 $y = ax + b \cdots\cdots$ ① と $y = mx + n \cdots\cdots$ ② との交点の座標を求める場合、2 つの式に共通な x と y の値を求めるので、連立方程式

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = mx + n \end{cases}$$

を解くことにより、交点の座標を求めることができました。



同じようにして、放物線 $y = ax^2 \cdots\cdots$ ③ と直線 $y = px + q \cdots\cdots$ ④ との交点の座標を求める場合にも、連立方程式

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = px + q \end{cases}$$

を解くことにより、2 つの式に共通な x と y の値が求まることになるので、交点の座標を求めることができます。

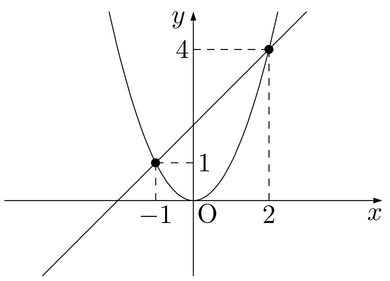
【例題 3 − 2】

次の 2 つの関数のグラフの交点の座標を求めなさい。

(1) $y = x^2,\ y = x + 2$　　(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2,\ y = x$　　(3) $y = -x^2,\ y = -2x - 3$

<解説>

(1) 2 つの式から y を消去して、



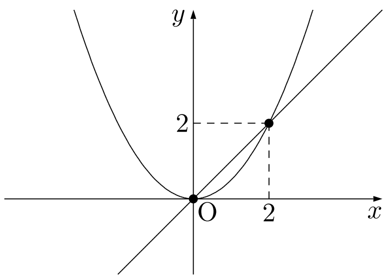
$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x &= -1,\ 2 \end{aligned}$$

① $x = -1$ のとき $y = 1$　　② $x = 2$ のとき $y = 4$

よって、交点の座標は、

$$(-1,\ 1),\qquad (2,\ 4)$$

(2) 2 つの式から y を消去して、



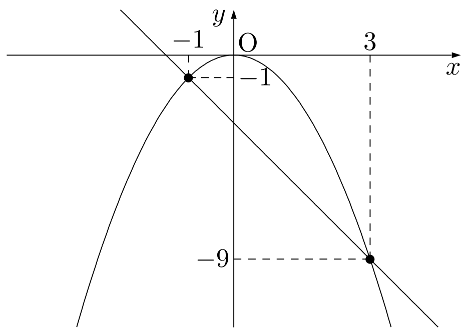
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= x \\ x^2 &= 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x &= 0,\ 2 \end{aligned}$$

① $x = 0$ のとき $y = 0$　　② $x = 2$ のとき $y = 2$

よって、交点の座標は、

$(0,\ 0),\qquad (2,\ 2)$

(3) 2 つの式から y を消去して、



$$
\begin{aligned}
-x^2 &= -2x-3\\
x^2-2x-3 &= 0\\
(x+1)(x-3) &= 0\\
x &= -1,\ 3
\end{aligned}
$$

① $x=-1$ のとき $y=-1$ ② $x=3$ のとき $y=-9$

よって、交点の座標は、

$(-1,\ -1),\qquad (3,\ -9)$

【演習 3 − 2】

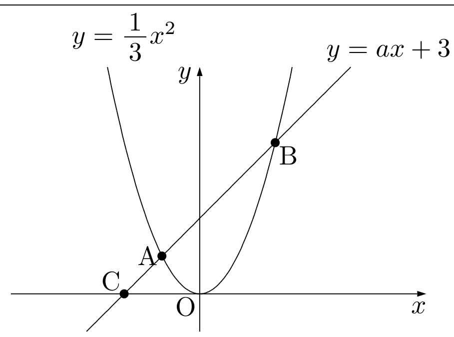
放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ と直線 $y=ax+3$ との交点を A, B とし、A の x 座標を -1 とします。また、直線 $y=ax+3$ と x 軸との交点を C とします。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 点 A の y 座標を求めなさい。

(2) 点 B の座標を求めなさい。

(3) 点 C の座標を求めなさい。



4 いろいろな関数

4.1 いろいろな関数

比例、反比例、1 次関数、関数 $y = ax^2$ など、様々な関数のグラフについて学習しました。それらの関数は、x の変域に制限がない場合、ずっとつながったものでしたが、関数のグラフには、ずっとつながっているのではなく、途切れてしまうようなものもあります。身近な例では、電車の運賃や電話料金などに関するグラフです。

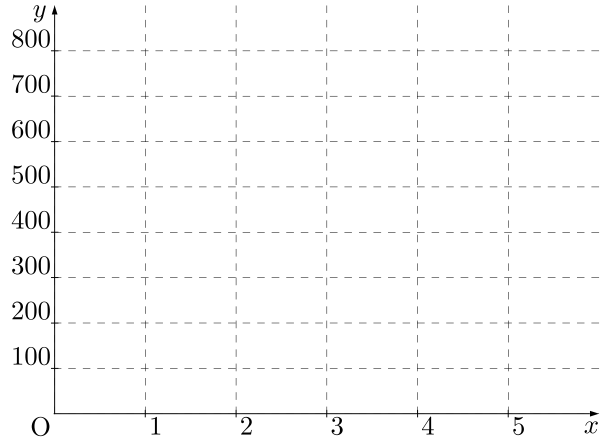
また、そのようなグラフでは、白丸「○」はその点を「含まない」ことを、黒丸「●」はその点を「含む」ことを表すために利用します。

【例題 4 − 1】

あるタクシー会社の料金表は、次のようになっていました。

走行距離 x km	2km まで	2.5km まで	3km まで	3.5km まで	4km まで	4.5km まで
料金 y 円	420	490	560	630	700	770

このとき、走行距離 x km $(0 < x \leqq 4.5)$ と料金 y 円の関係をグラフに表しなさい。



＜解説＞

走行距離 x が $0 < x \leqq 2$ の範囲では、料金は常に 420 円になるので、そのグラフは右のように x 軸に平行な線分になります。

同じようにして、走行距離 x が $2 < x \leqq 2.5$ の範囲では、料金は常に 490 円になり、$2.5 < x \leqq 3$ の範囲では、料金は常に 560 円、$3 < x \leqq 3.5$ の範囲では、料金は常に 630 円、$3.5 < x \leqq 4$ の範囲では、料金は常に 700 円、$4 < x \leqq 4.5$ の範囲では、料金は常に 770 円になるので、そのことをグラフに表すと右のようになります。