【中３数学】２次方程式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　2次方程式の解法

1.1　2次方程式と解

方程式を等式の性質を利用して整理したとき、

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

のように、$a,\ b,\ c$ を数として

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad （ただし、a \fallingdotseq 0）$$

のような形になる方程式を、x の 2 次式の方程式であるので、x についての **2 次方程式**といいます。

x についての方程式では、その方程式を成り立たせる x の値を、その方程式の**解**といい、方程式の解を求めることを、**方程式を解く**といいました。2 次方程式でも同じように、2 次方程式を成り立たせる文字の値を、その **2 次方程式の解**といい、解をすべて求めることを **2 次方程式を解く**といいます。

ただ、ここで注意してほしいのが、「解をすべて求める」とあるように、2 次方程式の解は「1 つだけとは限らない」ということです。方程式は基本的に文字の数だけ解が存在するので、今まで学習してきた 1 次方程式では、文字 1 つに対してその解も 1 つとなっていました。しかし、2 次方程式では、文字の種類は 1 つですが文字の数は 2 つあることになるので、解も 2 つある可能性があります。そのため、2 次方程式では、解を 1 つだけ求めて終わりにするのではなく、「すべて求める」とあるように、解が 2 つあれば 2 つ求めなくてはいけません。

【例題 1 − 1】

次の方程式のうち、$x = 1$ が解となるものを選びなさい。

① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + x - 12 = 0$　　③ $x^2 - 4x - 12 = 0$　　④ $x^2 - 3x + 2 = 0$

＜解説＞

x についての方程式の解とは、その方程式を成り立たせる x の値なので、方程式に x の値を代入したとき、等式が成り立つことになります。

① $x = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1^2 - 5 \times 1 + 6 \\ &= 1 - 5 + 6 = 2\end{aligned} \qquad (\text{右辺}) = 0$$

となり、左辺と右辺の値は一致しません。つまり、等式は成り立たないので、$x = 1$ はこの方程式の解ではありません。

② $x = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1^2 + 1 - 12 \\ &= 1 + 1 - 12 = -10\end{aligned} \qquad (\text{右辺}) = 0$$

となり、左辺と右辺の値は一致しません。つまり、等式は成り立たないので、$x = 1$ はこの方程式の解ではありません。

③ $x=1$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = 1^2 - 4\times 1 - 12 \qquad\qquad (\text{右辺}) = 0$$
$$= 1 - 4 - 12 = -15$$

となり、左辺と右辺の値は一致しません。つまり、等式は成り立たないので、$x=1$ はこの方程式の解ではありません。

④ $x=1$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = 1^2 - 3\times 1 + 2 \qquad\qquad (\text{右辺}) = 0$$
$$= 1 - 3 + 2 = 0$$

となり、左辺と右辺の値が一致します。つまり、等式が成り立つことになるので、$x=1$ はこの方程式の解になります。

以上のことから、$x=1$ が解となる方程式は

④ $x^2-3x+2=0$

となります。

【演習1－1】

次の方程式のうち、$x=3$ が解となるものをすべて選びなさい。

① $x^2-5x+6=0$　② $x^2+x-12=0$　③ $x^2-4x-12=0$　④ $x^2-3x+2=0$

1.2　$ax^2 = b$ の解

$k \geqq 0$ で、$x^2 = k$ のような形に変形できる 2 次方程式は、2 乗（平方）して k になる x の値を求めることになります。これは、「2 乗して k になるもとの数 x」を求めることであるので、「k の平方根」 を求めればよいということになります。このことから、$x^2 = k$ の形で表される 2 次方程式の解は、

2 次方程式 $x^2 = k$ の解：$x = \pm\sqrt{k}$

となります。

また、$ax^2 = b$ のような形の 2 次方程式も、x^2 の係数 a を右辺に移してあげることで、$x^2 = \dfrac{b}{a}$ となり、「2 乗して $\dfrac{b}{a}$ になるもとの数 x」を求めることから、

2 次方程式 $ax^2 = b$ の解：$x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

のようにして同じ考え方で解くことができます。

【例題 1 － 2】

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 49$　　(2) $5x^2 = 30$

＜解説＞

(1) 「2 乗して 49 になるもとの数 x」を求める、つまり、「49」の平方根を求めればよいので、

$$x = \pm 7$$

(2) まずは $x^2 = k$ の形に変形するために、x^2 の係数の「5」を右辺に移して

$$x^2 = \cancel{30}^{\,6} \times \frac{1}{\cancel{5}^{\,1}} = 6$$

すると、「2 乗して 6 になるもとの数 x」を求める、つまり、「6」の平方根を求めればよいので

$$x = \pm\sqrt{6}$$

分数の計算では、最後に必ず約分できるかどうかをチェックして、約分できる場合には約分をして数を簡単にしますが、根号のついた数も同じようにして、根号の中の数が簡単にできるかどうかをチェックし、できる場合には必ず根号の中の数を簡単にすることを忘れないでください。

【演習 1 － 2】

次の方程式を解きなさい。

(1) $5x^2 = 45$　　(2) $4x^2 = 3$　　(3) $9x^2 - 8 = 0$　　(4) $2x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$

1.3 $(x+m)^2 = n$ の解き方

$n \geqq 0$ で、$(x+m)^2 = n$ のような形の x についての 2 次方程式では、$x+m = X$ とすると、

$$(x+m)^2 = n \longrightarrow X^2 = n$$

と変形できるので、X の 2 次方程式だと考えることができます。すると、X は n の平方根になるので

2 次方程式 $X^2 = n$ の解：$X = \pm\sqrt{n}$

となります。この X を元に戻してあげると、

$$x+m = \pm\sqrt{n}$$
$$x = -m \pm \sqrt{n}$$

となり、このようにして 2 次方程式の解を求めることができます。ここで、$x = -m \pm \sqrt{n}$ は、

$$x = -m + \sqrt{n}, \qquad x = -m - \sqrt{n}$$

をまとめて表したものになります。

【例題 1 − 3】

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $(x+5)^2 = 36$　　(2) $(x+3)^2 = 2$

<解説>

(1) $x+5 = X$ とすると、$X^2 = 36$ になります。このことから、X は 36 の平方根になるので、

$$X = \pm 6$$

そして、X を元に戻すと

$$x+5 = \pm 6$$
$$x = -5 \pm 6$$

となります。このとき、$x = -5 \pm 6$ は、

$$x = -5+6, \qquad x = -5-6$$

という 2 つの式をまとめて表しているので、

(i) $x = -5+6$ のとき

$$x = -5+6 = 1$$

(ii) $x = -5-6$ のとき

$$x = -5-6 = -11$$

となり、この 2 次方程式の解は、

$$x = 1 \text{ と } x = -11$$

です。このことをまとめて

$$x = 1,\ -11$$

のように表します。

(2) $x+3=X$ とすると、$X^2=2$ となります。このことから、X は 2 の平方根になるので、

$$X = \pm\sqrt{2}$$

そして、X を元に戻すと

$$x + 3 = \pm\sqrt{2}$$

となり、左辺の 3 を右辺に移項して、

$$x = -3 \pm \sqrt{2}$$

となります。

根号がついているような場合では、これ以上計算することができないので、(1) のように計算する必要はありません。ただし、根号の中が簡単にできるかどうかのチェックは忘れないようにしましょう。

【演習 1 − 3】

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $(x-1)^2 = 9$　(2) $(x+5)^2 = 5$　(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

1.4 平方完成

$(x+p)^2=q$ のような x についての 2 次方程式は、平方根の考え方を利用して、

$$\begin{aligned}(x+p)^2 &= q\\ x+p &= \pm\sqrt{q}\\ x &= -p\pm\sqrt{q}\end{aligned}$$

と解くことができました。このように、左辺に x^2 や $(\quad)^2$ などの 2 乗（平方）の形があり、右辺が定数であるような 2 次方程式は、平方根を利用して解くことができます。そこで、2 次方程式の左辺が x^2 や $(\quad)^2$ などの 2 乗（平方）の形になっていないような場合、その 2 次方程式の左辺を 2 乗（平方）の形に変形（このことを「**平方完成**する」といいます）することを考えます。

$(x+p)^2=q$ の左辺を、平方公式を利用して展開すると、

$$x^2+2px+p^2=q$$

となります。このことから、左辺に「$x^2+2px+p^2$」という形があれば、左辺を平方公式を利用して因数分解することで、

$$(x+p)^2=q$$

という、左辺に 2 乗（平方）のある形に変形（平方完成）することができます。そのため、平方完成は次のような手順で行うことができます。

(i) 定数項を右辺に移項する。

$$x^2+2px-q=0 \longrightarrow x^2+2px=q$$

(ii) 「x の係数の半分の 2 乗」を両辺に加える。

$$x^2+2px=q \longrightarrow x^2+2px+p^2=q+p^2$$

(iii) 左辺を因数分解して、平方の形にする。

$$x^2+2px+p^2=q+p^2 \longrightarrow (x+p)^2=q+p^2$$

【例題 1 − 4】

次の 2 次方程式を $(x+p)^2=q$ の形に変形して解きなさい。

(1) $x^2+2x=4$　　(2) $x^2-6x+8=0$

<解説>

(1) x の係数が「2」であるので、その半分は「1」です。その 2 乗である「1^2」を左辺に必要なので、等式の性質から、両辺に加えます。

$$x^2+2x+1^2=4+1^2$$

すると、左辺は因数分解できるので、元の 2 次方程式は

$$(x+1)^2=5$$

と表せます。この形に変形できれば、$x+1=X$ として、

$$X^2=5$$

と表せ、X は 5 の平方根になるので

$$X=\pm\sqrt{5}$$

X を元に戻して

$$\begin{aligned} x+1&=\pm\sqrt{5} \\ x&=-1\pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

のようにして解を求めることができます。つまり、

$$\begin{aligned} x^2+2x&=4 \\ x^2+2x+1^2&=4+1^2 \\ (x+1)^2&=5 \\ x+1&=\pm\sqrt{5} \\ x&=-1\pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

のような流れで解くことができます。

(2) まずは邪魔な定数項を右辺に移項します。

$$x^2-6x=-8$$

そして、x の係数「-6」の半分「-3」(もしくは、「3」) の 2 乗を両辺に加えます。

$$x^2-6x+(-3)^2=-8+(-3)^2$$

すると左辺は因数分解することができるので、元の 2 次方程式は、

$$(x-3)^2=1$$

と表せます。ここで、$x-3=X$ とすると、

$$X^2=1$$

となり、X は 1 の平方根であるので、

$$X=\pm1$$

次に X を元に戻して

$$\begin{aligned} x-3&=\pm1 \\ x&=3\pm1 \end{aligned}$$

となります。このことから

(i) $x=3+1$ のとき

$$x=3+1=4$$

(ii) $x=3-1$ のとき

$$x=3-1=2$$

となるので、この 2 次方程式の解は

$$x = 2,\ 4$$

となります。このことから、

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
x^2 - 6x &= -8 \\
x^2 - 6x + 3^2 &= -8 + 3^2 \\
(x-3)^2 &= 1 \\
x - 3 &= \pm 1 \\
x &= 3 \pm 1 \\
&= 2,\ 4
\end{aligned}$$

のような流れで解くことができます。

【演習 1 − 4】

次の 2 次方程式を $(x+p)^2 = q$ の形に変形して解きなさい。

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (2) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (3) $x^2 + x - 1 = 0$

1.5 解の公式

平方完成することで 2 次方程式を解くことができることを学習しましたが、解を求めるまでにかなり手間がかかります。そこで、その手間を省くために、あらかじめ平方完成してしまった式を作ってしまえば、2 次方程式の解を求めるのが楽になるはずですよね。ここでは、値を代入するだけで 2 次方程式の解を求めることができてしまう、**2 次方程式の解の公式**を導出します。

x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0 \quad (a>0)$ を平方完成しますが、まずは、計算しやすくするために、左辺の x^2 の係数である a で両辺を割ります ($\dfrac{1}{a}$ を両辺に掛けます)。

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)\times\frac{1}{a}&=0\times\frac{1}{a}\\ \cancel{a}x^2\times\frac{1}{\cancel{a}}+bx\times\frac{1}{a}+c\times\frac{1}{a}&=0\\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\end{aligned}$$

次に、左辺にある定数項 $\dfrac{c}{a}$ を右辺に移項します。

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

そして、左辺にある x の係数 $\dfrac{b}{a}$ の半分の 2 乗である $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ を両辺に加えます。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

すると、左辺は平方の形に因数分解することができ、次のように変形できます。

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\\ &=-\frac{c\times4a}{a\times4a}+\frac{b^2}{4a^2}\\ &=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\\ &=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\ x+\frac{b}{2a}&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\ &=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\\ &=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}\\ &=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ x&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

この

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を、x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a \fallingdotseq 0$）の解を求める公式として利用します。

【例題 1 − 5】

次の 2 次方程式を解の公式を利用して解きなさい。

(1) $2x^2+5x-2=0$　　(2) $3x^2-x-1=0$

＜解説＞

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、解の公式より

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となるので、与えられた方程式の係数を読み取り、この式の a（x^2 の係数）, b（x の係数）, c（定数項）にあてはめていきます。

(1) 解の公式に、$a=2,\ b=5,\ c=-2$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-2)}}{2\times2} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{25+16}}{4} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

(2) 解の公式に、$a=3,\ b=-1,\ c=-1$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{1+12}}{6} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

この例題では、根号の中の数を簡単にする必要はありませんでしたが、根号の中の数を簡単にできる場合もあるので、そのときは必ず根号の中の数を簡単にしてください。

【演習 1 − 5】

次の 2 次方程式を解の公式を利用して解きなさい。

(1) $x^2+x-3=0$　　(2) $6x^2+11x+4=0$　　(3) $x^2-5x+6=0$

1.6　因数分解による解き方

x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺「ax^2+bx+c」は、2 次式であるので、因数分解して、

$$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow (\qquad)(\qquad)=0$$

のような形に変形することができる場合があります。このとき、次のように、

$$A \times B = 0$$

という形の式が成り立つためには、

$$0 \times B = 0, \qquad A \times 0 = 0, \qquad 0 \times 0 = 0$$

のように、A と B のどちらか一方、もしくは両方ともが「0」になるときしかありません。このことを数学では，

$A=0$　または　$B=0$

のようにいい、この性質を利用して 2 次方程式を解くこともできます。

また、日常で使う「または」という言葉は，

「パンまたはライスをお選びください。」

のように

「または」=「どちらか一方」

という意味ですが、数学の「または」という言葉は，

「または」=「どちらか一方、もしくは両方」

のように、日常使う言葉の意味と少し異なるので注意してください。

2 次方程式の解法には主に、次の 4 つの方法があります。

① 平方根を利用する。　② 平方の形に変形（平方完成）する。
③ 2 次方程式の解の公式を利用する。　④ 因数分解を利用する。

2 次方程式の解の公式を用いれば、解のある 2 次方程式であればすべて解くことができますが、計算がやや面倒です。そのため、2 次方程式を解くときには、まずは式の形を見て、

(i) 「$x^2=$ 数」，「$(\qquad)^2=$ 数」のような形になっている、もしくは、その形に簡単に変形ができる式かをチェックし、そのような式であれば平方根を利用して解く。
(ii) 等式の性質を利用して「$ax^2+bx+c=0$」の形に整理し、その式の左辺が因数分解ができるかどうかを確認し、できる場合には因数分解をして解を求める。
(iii) 左辺が因数分解ができない場合には、解の公式を利用（もしくは、平方完成）して解を求める。

というような考えで、2 次方程式に取り組むようにしてください。

ただし、2 次方程式の左辺 ax^2+bx+c が因数分解できるかどうかは厳密に判断する必要はなく、「できそう」か、「できなさそう」かの判断で十分です。因数分解できるかどうかに悩んでしまい、解くまでに時間がか

かってしまうくらいなら、少し面倒でも解の公式を利用して解いてしまった方がいいと思います。そのため、たとえ因数分解できたとしても、自分が因数分解「できなさそう」と判断したのなら、解の公式を利用して解いてしまいましょう。

【例題 1 − 6】

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-3)(x-5)=0$　(2) $(x-8)^2=0$　(3) $4x(x+9)=0$

＜解説＞

(1) $(x-3)(x-5)=0$ より、この等式が成り立つためには

$$x-3=0 \quad \text{または} \quad x-5=0$$

となります。つまり、これは

$$x=3 \quad \text{または} \quad x=5$$

となるので、これを

$$x=3,\ 5$$

のように書き表し、これが方程式の解になります。

(2) $(x-8)^2=0$ は

$$(x-8)(x-8)=0$$

のように表すことができるので、このことから、等式が成り立つためには

$$x-8=0 \quad \text{または} \quad x-8=0$$

となります。つまり、

$$x=8 \quad \text{または} \quad x=8$$

となりますが、このことを

$$x=8,\ 8$$

のように表すのではなく、2 つの解が同じなので、

$$x=8$$

と 1 つだけで表します。

2 次方程式は文字の数が 2 つある方程式なので、解の個数も通常 2 つあります。しかし、この 2 次方程式の解のように、2 つの解が重なって 1 つになるような場合もあります。（このような解のことを「**重解**」ということがあります。）

(3) $4x(x+9)=0$ より、等式が成り立つためには

$$4x=0 \quad \text{または} \quad x+9=0$$

つまり、

$$x=0 \quad \text{または} \quad x=-9$$

となります。このことから

$$x=0,\ -9$$

となり、これがこの 2 次方程式の解になります。

【演習 1 − 6】

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2-5x+6=0$ (2) $x^2+x-12=0$ (3) $x^2-4x-12=0$

(4) $x^2=2x+8$ (5) $x^2+6x+5=x-1$ (6) $x(x-4)=x$

1.7　2 次方程式の解と係数

【例題 1 − 7】

2 次方程式 $x^2 + px - 24 = 0$ の 1 つの解が 2 であるとき、p の値と残りの解を求めなさい。

＜解説＞

方程式の解は、その方程式を成り立たせるものであるので、$x = 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 2^2 + 2p - 24 &= 0 \\ 4 + 2p - 24 &= 0 \\ 2p - 20 &= 0 \\ 2p &= 20 \\ p &= 20 \times \frac{1}{2} = 10 \end{aligned}$$

このことから、2 次方程式は、

$$x^2 + px - 24 = 0 \longrightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$$

この 2 次方程式を解くと、

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 24 &= 0 \\ (x - 2)(x + 12) &= 0 \\ x &= 2,\ -12 \end{aligned}$$

となるので、この 2 次方程式の残りの解は、

$$x = -12$$

【演習 1 − 7】

2 次方程式 $x^2 - x + 3a + 1 = 0$ の 1 つの解が a であるとき、a の値を求め、もう 1 つの解も求めなさい。

2　2次方程式の利用

ここでは、2 次方程式を利用して、文章問題を解いていくことを学習します。そのときの解法手順は、今まで学習してきた文章問題の手順と同じように、主に次のような流れになります。

(i) 適当な数量を文字で表す。
(ii) その文字を使って 2 次方程式を立てる。
(iii) その 2 次方程式を解いて、解を求める。
(iv) その解が問題の条件に適するかを検討する。

2 次方程式は、文字の数が 2 つあることから、解が 2 つと複数存在する場合があります。そのため、そのいずれかの解が、問題の条件に適さない可能性が、1 次方程式以上に高くなります。そのことから、2 次方程式を利用する文章問題では、2 次方程式を解いて安心するのではなく、手順 (iv) をしっかり行うようにしてください。

2.1　整数と 2 次方程式

【例題 2 − 1】

連続する 3 つの正の整数があり、これらのうち真ん中の数を x とするとき、次の問いに答えなさい。
(1) 連続する 3 つの正の整数のうちで、真ん中の数の 20 倍に 24 を加えた数を x を用いて表しなさい。
(2) 連続する 3 つの正の整数のうちで、最も大きい数の平方と最も小さい数の平方の和を x を用いて表しなさい。
(3) 連続する 3 つの正の整数のうちで、真ん中の数の 20 倍に 24 を加えた数と、最も大きい数の平方と最も小さい数の平方の和が等しいとき、真ん中の数を求めなさい。

＜解説＞

問題文「真ん中の数を x とする」ので、連続する 3 つの正の整数は、x を用いて

$$x-1,\ x,\ x+1$$

と表すことができます。

(1) 「真ん中の数 x の 20 倍に 24 を加えた数」は

$$x \times 20 + 24 = 20x + 24$$

と表すことができます。

(2) 「最も大きい数 $x+1$ の平方（2 乗）と最も小さい数 $x-1$ の平方（2 乗）の和」は、

$$(x+1)^2 + (x-1)^2$$

と表すことができます。

(3) 「真ん中の数の 20 倍に 24 を加えた数と、最も大きい数の平方と最も小さい数の平方の和が等しい」ことから、(1), (2) より

$$20x + 24 = (x+1)^2 + (x-1)^2$$

という 2 次方程式を立てることができます。あとは、この 2 次方程式を解いていけばよいのですが、「$(\quad)^2 =$ 数」という形にはなっていないので、かっこをはずして整理して、「$ax^2 + bx + c = 0$」という形にします。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 + (x-1)^2 &= 20x + 24 \\
x^2 \cancel{+2x} + 1 + x^2 \cancel{-2x} + 1 &= 20x + 24 \\
2x^2 + 2 - 20x - 24 &= 0 \\
2x^2 - 20x - 22 &= 0
\end{aligned}
$$

この式の左辺が因数分解できるかどうかを考えますが、x^2 の係数が「1」でないと判断が難しいと思います。そこで、係数と定数項はそれぞれ、

x^2の係数：2,　　x の係数：-20,　　定数項：-22

と 2 の倍数になっていることから、両辺を 2 で割って（$\frac{1}{2}$ を掛けて)、

$$
\begin{aligned}
(2x^2 - 20x - 22) \times \frac{1}{2} &= 0 \times \frac{1}{2} \\
2x^2 \times \frac{1}{2} - 20x \times \frac{1}{2} - 22 \times \frac{1}{2} &= 0 \\
x^2 - 10x - 11 &= 0
\end{aligned}
$$

この式の左辺が因数分解できるかどうかを考えます。すぐに因数分解できるかどうか判断できない場合は、2 次方程式の解の公式を利用して解けばいいのですが、この例題の求める「x」は整数なので、まず間違いなく因数分解できます。そのことから、

$$
\begin{aligned}
x^2 - 10x - 11 &= 0 \\
(x+1)(x-11) &= 0 \\
x &= -1,\ 11
\end{aligned}
$$

と 2 次方程式を解くことができます。ただし、

① $x = -1$ のとき

連続する 3 つの正の整数：$-2,\ -1,\ 0$

② $x = 11$ のとき

連続する 3 つの正の整数：$10,\ 11,\ 12$

となり、「$x = -1$」のときは「正の整数」という問題文の条件に適さないことになります。このことから、

真ん中の数：11

2.2　図形と 2 次方程式

【例題 2 − 2】

縦が横より 5 cm 長い長方形があります。この長方形の縦の長さを 3 cm 短くして、横の長さを 2 倍にすると面積は 20 cm^2 増加しました。このとき、次の問いに答えなさい。

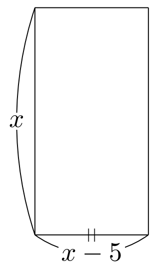
(1) もとの長方形の縦の長さを x cm として、x を求める 2 次方程式をつくりなさい。

(2) もとの長方形の縦の長さを求めなさい。

＜解説＞

図形に関する問題では、問題文にかかれている様子を図で表しておくと理解しやすくなります。この例題でも、問題文のようすを図に表してみると、次のようになります。

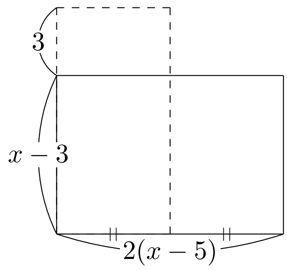
① もとの長方形



縦の長さを x cm としたとき、横の長さは縦の長さよりも 5 cm 短いので $(x-5)$ cm になります。また、このとき、長方形の面積は

$$(\text{もとの長方形の面積}) = x(x-5)$$

② 変形後の長方形



縦の長さはもとの長方形よりも 3 cm 短いので $(x-3)$ cm となり、横の長さはもとの長方形の 2 倍なので、$2(x-5)$ cm となります。また、このとき、長方形の面積は

$$(\text{変形後の長方形の面積}) = 2(x-5)(x-3)$$

(1) 変形後の長方形の面積は、もとの長方形の面積よりも 20 cm^2 だけ大きいので、

$$(\text{変形後の長方形の面積}) = (\text{もとの長方形の面積}) + 20\ \mathrm{cm}^2$$

という関係が成り立ちます。このことから、次のような 2 次方程式をつくることができます。

$$2(x-5)(x-3) = x(x-5) + 20$$

(2) (1) で求めた 2 次方程式を解きます。このとき、「$(\quad)^2 =$ 数」という形にはなっていないので、展開して整理し、2 次方程式を「$ax^2+bx+c=0$」の形に変形します。

$$\begin{aligned}
2(x-5)(x-3) &= x(x-5) + 20 \\
2(x^2-8x+15) &= x^2-5x+20 \\
2x^2-16x+30 &= x^2-5x+20 \\
2x^2-16x+30-x^2+5x-20 &= 0 \\
x^2-11x+10 &= 0
\end{aligned}$$

そして、左辺が因数分解できるのかどうかを判断します。この 2 次方程式は因数分解できるので

$$
\begin{aligned}
x^2 - 11x + 10 &= 0 \\
(x-1)(x-10) &= 0 \\
x &= 1,\ 10
\end{aligned}
$$

と解くことができます。
しかし、$x = 1$ の場合、もとの長方形の横の長さが

$$\text{横の長さ} = 1 - 5 = -4\ (\text{cm})$$

となってしまい、長方形を作ることができません。そのため、この答えは問題には合わないことになります。
$x = 10$ の場合であれば、縦の長さも横の長さも

$$\text{縦の長さ} = 10\ \text{cm}, \qquad \text{横の長さ} = 10 - 5 = 5\ \text{cm}$$

となり問題ありません。
よって、もとの長方形の縦の長さは

もとの長方形の縦の長さ：10 cm

となります。