【中３数学】円

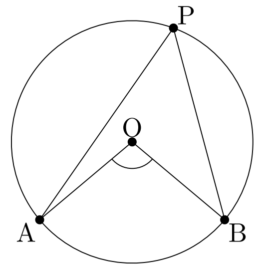
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　円と角度

1.1　円周角と中心角



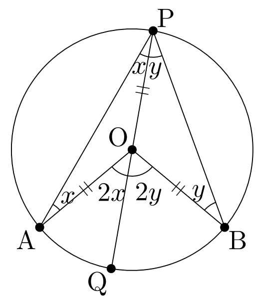
次の図のように、円 O の円周上に 3 点 A, B, P をとり、その 3 点を結びます。このとき、$\angle\mathrm{APB}$ を、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する**円周角**といい、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を、円周角 $\angle\mathrm{APB}$ に対する弧といいます。

さらに、点 A, O, B を結ぶと、おうぎ形 OAB を作ることができ、$\angle\mathrm{AOB}$ を、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する**中心角**といいます。

円周角と中心角は、

- 円周角：弧の両端の点と 円周 上の点を結んでできる 角
- 中心角：弧の両端の点と円の 中心 を結んでできる 角

であるので、そのことが理解できれば名前からどのような角か判断できると思います。



ここで、点 P, O を通る直線と円 O との交点で、点 P と異なる点を Q とします。

OA, OB, OP はそれぞれ円 O の半径なので、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OP}$$

となり、$\triangle\mathrm{OPA}$ と $\triangle\mathrm{OBP}$ は二等辺三角形です。二等辺三角形の 2 つの底角は等しいことから、

$$\angle\mathrm{OPA} = \angle\mathrm{OAP} = x, \qquad \angle\mathrm{OBP} = \angle\mathrm{OPB} = y$$

とすると、外角の定理から、「三角形の 1 つの外角は、その隣にない 2 つの内角の和に等しい」ので、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AOQ} &= \angle\mathrm{OPA} + \angle\mathrm{OAP} \\ &= x + x = 2x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\angle\mathrm{QOB} &= \angle\mathrm{OBP} + \angle\mathrm{OPB} \\ &= y + y = 2y\end{aligned}$$

となります。

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{APB}$ は、

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APO} + \angle\mathrm{OPB} = x + y$$

また、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角 $\angle\mathrm{AOB}$ は、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AOB} &= \angle\mathrm{AOQ} + \angle\mathrm{QOB} = 2x + 2y \\ &= 2(x + y) = 2\angle\mathrm{APB}\end{aligned}$$

という関係が成り立ちます。つまり、

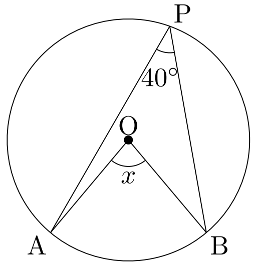
「1 つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の 2 倍の大きさになる」

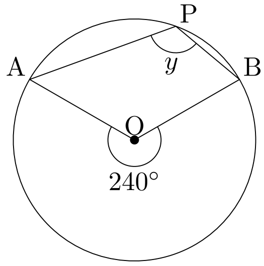
ことになります。

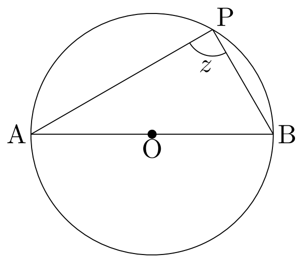
【例題１－１】

下の図で、$\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ の大きさを求めなさい。ただし、点 O は円の中心です。

(1)　(2)　(3) AB は円 O の直径







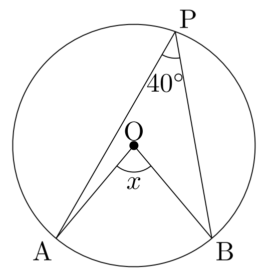
＜解説＞

「1 つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の 2 倍の大きさになる」ことから、「1 つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の $\frac{1}{2}$ 倍（半分）の大きさになる」ともいうことができます。つまり、ある弧に対して

$$(\text{中心角}) = (\text{円周角}) \times 2, \qquad (\text{円周角}) = (\text{中心角}) \times \frac{1}{2}$$

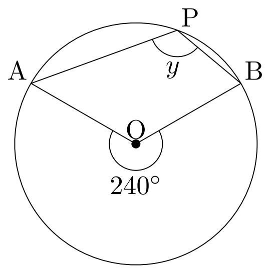
という関係式が成り立ちます。

(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角 $\angle\mathrm{AOB}$ が求める $\angle x$ になります。図より、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角が $\angle\mathrm{APB} = 40^\circ$ であるので、



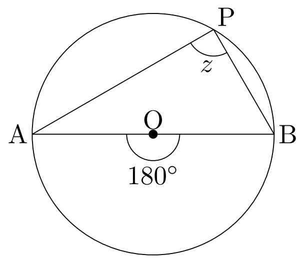
$$\begin{aligned}\angle x &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{に対する中心角})\\ &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{に対する円周角}) \times 2\\ &= \angle\mathrm{APB} \times 2\\ &= 40^\circ \times 2 = 80^\circ\end{aligned}$$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{APB}$ が求める $\angle y$ になります。ただし、(1) とは違い、(2) の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は長い方の弧になるので注意してください。また、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$（長い方）に対する中心角 $\angle\mathrm{AOB}$（鈍角）は、$\angle\mathrm{AOB} = 240^\circ$ であるので、



$$\begin{aligned}\angle y &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{に対する円周角})\\ &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{(長い方）に対する中心角}) \times \frac{1}{2}\\ &= \angle\mathrm{AOB} \times \frac{1}{2}\\ &= \cancel{240^\circ}^{\,120} \times \frac{1}{\cancel{2}_{\,1}} = 120^\circ\end{aligned}$$

(3) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{APB}$ が求める $\angle z$ になります。$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角 $\angle\mathrm{AOB}$ は、AB が円 O の直径であるので、$\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ$ となります。このことから、



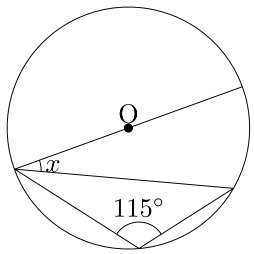
$$\begin{aligned}\angle z &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{に対する円周角}) \\ &= (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{に対する中心角}) \times \frac{1}{2} \\ &= \angle\mathrm{AOB} \times \frac{1}{2} \\ &= \cancel{180^\circ}^{\,90} \times \frac{1}{\cancel{2}_{\,1}} = 90^\circ\end{aligned}$$

このように、半円の弧に対する円周角は直角（90°）になるので、この性質もしっかりと覚えておきましょう。

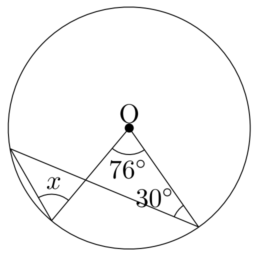
【演習 1 − 1】

下の図について、$\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし、点 O は円の中心です。

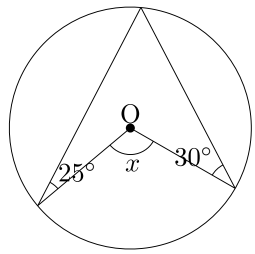
(1)



(2)



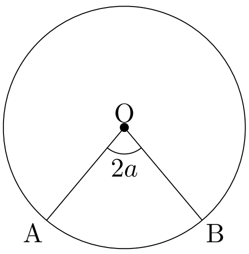
(3)



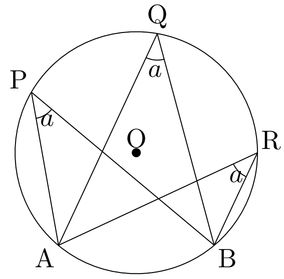
1.2 円周角の定理

次の図の円 O のように、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角は 1 つしかありませんが、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角は無数に存在します。

(i) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する中心角 :$\angle\mathrm{AOB}$



(ii) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角 :$\angle\mathrm{APB}$, $\angle\mathrm{AQB}$, $\angle\mathrm{ARB}$



しかし、1 つの弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の $\dfrac{1}{2}$ 倍の大きさになるので、

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AOB} \times \frac{1}{2}, \qquad \angle\mathrm{AQB} = \angle\mathrm{AOB} \times \frac{1}{2}, \qquad \angle\mathrm{ARB} = \angle\mathrm{AOB} \times \frac{1}{2}$$

となります。このことから、

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB} = \angle\mathrm{ARB}$$

となり、1 つの弧に対する円周角の大きさはどれも等しくなります。このように、円周角と中心角には、

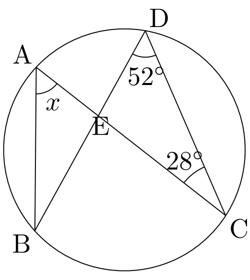
- **1 つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分になる。(1 つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の大きさの倍になる。)**
- **同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。**

という性質があり、これを**円周角の定理**といいます。

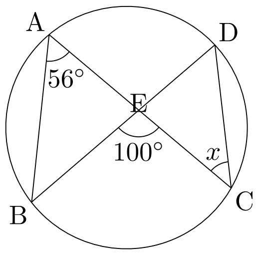
【例題 1 − 2】

次の図において、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



<解説>

(1) 求める $\angle x$ は、$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角です。しかし、$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角には $\angle\mathrm{BDC} = 52^\circ$ もあります。円

周角の定理から、1 つの弧に対する円周角の大きさは等しくなるので、

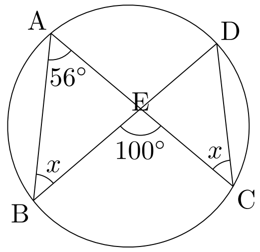
$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BDC}$$

つまり、

$$\angle x = 52^\circ$$

となります。

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する 2 つの円周角は等しくなるので、



$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ABD} = \angle x$$

ここで、△ABE に着目すると、外角の定理から、1 つの外角はその隣にない 2 つの内角の和に等しいので、

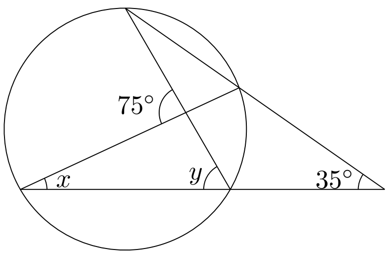
$$\begin{aligned} \angle \mathrm{EAB} + \angle \mathrm{ABE} &= \angle \mathrm{CEB} \\ 56^\circ + \angle x &= 100^\circ \\ \angle x &= 100^\circ - 56^\circ = 44^\circ \end{aligned}$$

角度を求めるような問題では、1 つの三角形に大きさのわかる角を集めることがポイントです。

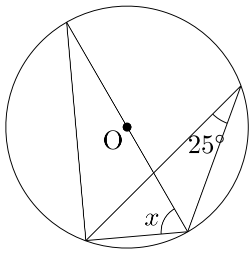
【演習 1 − 2】

次の図において、$\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。ただし、点 O は円の中心です。

(1)

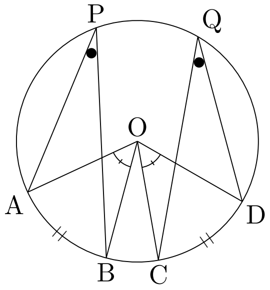


(2)



1.3 円周角と弧

右の図のおうぎ形 OAB とおうぎ形 OCD のように、1 つの円において、等しい長さの弧をもつ 2 つのおうぎ形は合同になるため、中心角の大きさは等しく、



$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} \quad \text{ならば} \quad \angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{COD}$$

となります。また、円周角の定理より、円周角は中心角の半分の大きさになるので、右の図のように、円周上に点 P, Q があるとき、

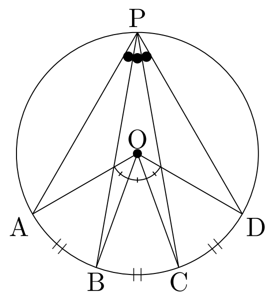
$$\angle\mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}, \qquad \angle\mathrm{CQD} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{COD}$$

となります。$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{COD}$ であることから、

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{CQD}$$

という関係が成り立ち、同じ長さの弧であれば円周角の大きさも等しくなることがわかります。

このことから、弧の長さが 2 倍、3 倍、$\cdots$ されると、その弧に対する中心角・円周角の大きさは 2 倍、3 倍、$\cdots$ となり、弧の長さとその弧に対する中心角・円周角の大きさは比例します。

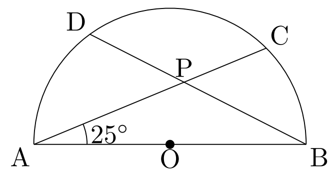


- $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = 2\overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \angle\mathrm{AOC} = 2\angle\mathrm{AOB}, \quad \angle\mathrm{APC} = 2\angle\mathrm{APB}$
- $\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = 3\overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \angle\mathrm{AOD} = 3\angle\mathrm{AOB}, \quad \angle\mathrm{APD} = 3\angle\mathrm{APB}$

$$\vdots$$

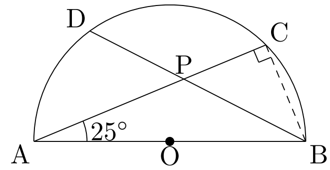
【例題 1 − 3】

右の図のように、AB を直径とする半円 O の弧 AB 上に $\angle\mathrm{CAB} = 25^\circ$ となる点 C をとります。また、弧 AC 上に、$\overset{\frown}{\mathrm{AD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = 2 : 3$ となる点 D をとり、AC と BD の交点を P とするとき、$\angle\mathrm{APD}$ の大きさを求めなさい。



＜解説＞

AB が直径なので、半円の弧に対する円周角は直角になることから、

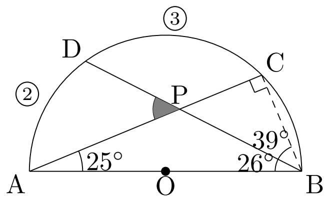


$$\angle\mathrm{BCA} = 90^\circ$$

$\triangle\mathrm{CAB}$ において、三角形の内角の和は 180° になるので、

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{CAB} + \angle\mathrm{ABC} &= 180^\circ \\ 90^\circ + 25^\circ + \angle\mathrm{ABC} &= 180^\circ \\ \angle\mathrm{ABC} &= 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ \end{aligned}$$

また、$\overset{\frown}{\mathrm{AD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = 2 : 3$ より、$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ に対するそれぞれの円周角 $\angle\mathrm{ABD}$, $\angle\mathrm{DBC}$ の比も $2 : 3$ になります。このことから、



$$\angle\mathrm{ABD} = \frac{2}{2+3}\angle\mathrm{ABC} = \frac{2}{5} \times 65^\circ = 26^\circ$$

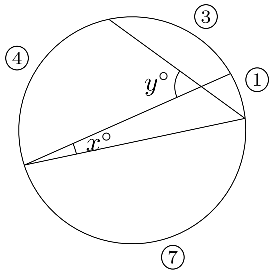
よって、$\triangle\mathrm{PAB}$ に外角の定理を用いて、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{APD} &= \angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{ABP} \\ &= 25^\circ + 26^\circ = 51^\circ\end{aligned}$$

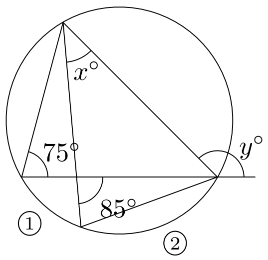
【演習 1 − 3】

図中の◯囲みの数字は弧の長さの比です。x, y の値を求めなさい。

(1)



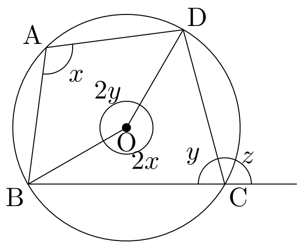
(2)



1.4 円に内接する四角形の性質

多角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき、その多角形は円の 内 側で 接 するので、円に**内接する**といい、円は多角形の 外 側で 接 するので、多角形の**外接円**といいます。

ここでは、右図のような円 O に内接する四角形 ABCD について考えます。



右図のように $\angle A = x$, $\angle C = y$ とすると、$\angle A$ は弧 BCD に対する円周角、$\angle C$ は弧 BAD に対する円周角であるので、それぞれの中心角は、円周角の定理より $2x$, $2y$ となります。

このことから、

$$2x + 2y = 360^\circ$$

$$x + y = 180^\circ \quad \cdots\cdots ①$$

となり、**円に内接する四角形の対角の和は** 180° になります。

また、$\angle C$ の外角を z とすると、

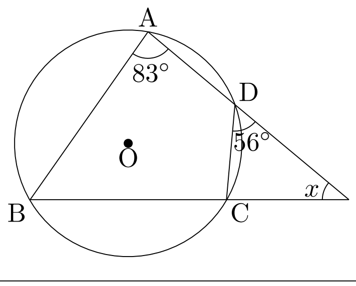
$$y + z = 180^\circ \quad \cdots\cdots ②$$

となるので、①, ②より $x = z$ となり、**円に内接する四角形の 1 つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しい**という関係も成り立ちます。

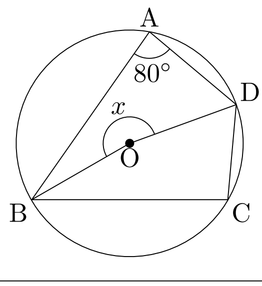
【例題 1 − 4】

点 O が円の中心であるとき、次の $\angle x$ の大きさを求めなさい。

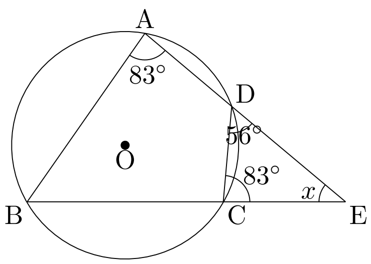
(1)



(2)



＜解説＞



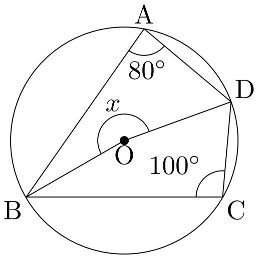
(1) AD と BC の交点を E とすると、円に内接する四角形の 1 つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しいので、

$$\angle DAB = \angle DCE = 83^\circ$$

$\triangle DCE$ において、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle x = 180^\circ - (56^\circ + 83^\circ) = 41^\circ$$

(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° になるので、



$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C} = 180^\circ$$
$$\angle\mathrm{C} = 180^\circ - \angle\mathrm{A}$$
$$= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

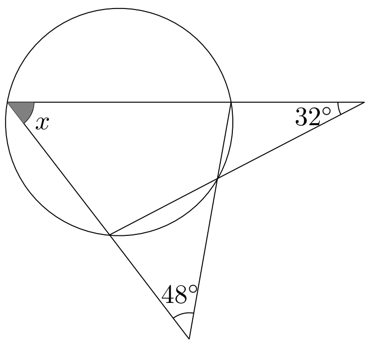
また、円周角の定理より、$\angle x$ は弧 DAB の中心角で、その円周角 $\angle$C の 2 倍になることから、

$$\angle x = 2\angle\mathrm{C}$$
$$= 2 \times 100^\circ = 200^\circ$$

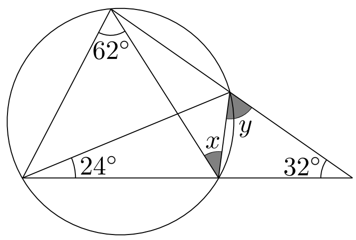
【演習 1 − 4】

次の $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。

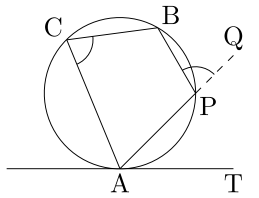
(1)



(2)



1.5 接弦定理

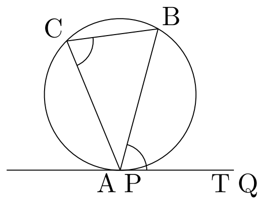


右図のような円に内接する四角形 APBC を考えます。（直線 AT は点 A における円の接線）

このとき、円に内接する四角形の性質から、1 つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しいので、

$$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BPQ}$$

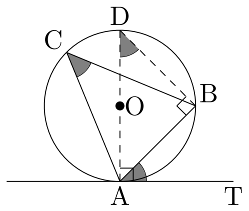
となります。



ここで、A, B, C を固定したまま P を円周上に沿って A に近づけていくと、$\angle$BPQ と $\angle$BAT は一致します。このことから、

$$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BAT} \quad (= \angle\mathrm{BPQ})$$

となることが予想されます。実際に、「**円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。**」ということが成り立ち、これを**接弦定理**といいます。



(i) $\angle$BAT が鋭角であるとき

直径 AD を引くと、$\angle$BDA, $\angle$BCA は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるので、

$$\angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{BCA} \quad \cdots\cdots ①$$

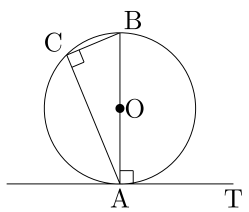
円の中心と接点を結んだ直線は、接線と垂直に交わるので $\angle\mathrm{DAT} = 90°$。
このことから、

$$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{DAT} - \angle\mathrm{DAB} = 90° - \angle\mathrm{DAB} \quad \cdots\cdots ②$$

また、AD は円 O の直径であるので、半円の弧に対する円周角 $\angle\mathrm{ABD} = 90°$。よって、$\triangle$DAB の内角の和は 180° になることから、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BDA} &= 180° - (\angle\mathrm{DAB} + \angle\mathrm{ABD}) \\ &= 180° - \angle\mathrm{DAB} - 90° \\ &= 90° - \angle\mathrm{DAB} \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

①〜③より、$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BAT}$

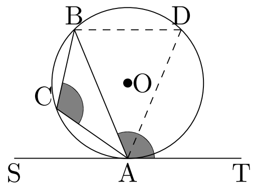


(ii) $\angle$BAT が直角（$\angle\mathrm{BAT} = 90°$）のとき

AB は円 O の直径であるので、半円の弧に対する円周角は 90° になることから、$\angle\mathrm{BCA} = 90°$。よって、

$$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{BAT}$$

(iii) $\angle$BAT が鈍角であるとき



図のように、線分 AB に対し C と反対側の円周上に点 D をとります。
$\angle$BAT が鈍角のとき、$\angle$SAB は鋭角であるので、(i) より、

$$\angle \mathrm{SAB} = \angle \mathrm{ADB} \quad \cdots\cdots ④$$

一直線の作る角は 180° であるので、

$$\angle \mathrm{SAT} = \angle \mathrm{SAB} + \angle \mathrm{BAT} = 180^\circ$$
$$\angle \mathrm{BAT} = 180^\circ - \angle \mathrm{SAB} \quad \cdots\cdots ⑤$$

また、円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° であるので、

$$\angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{ADB} = 180^\circ$$
$$\angle \mathrm{BCA} = 180^\circ - \angle \mathrm{ADB} \quad \cdots\cdots ⑥$$

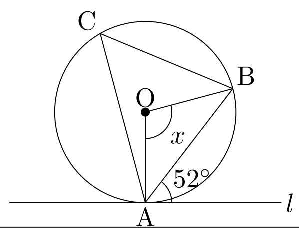
④〜⑥より、

$$\angle \mathrm{BCA} = \angle \mathrm{BAT}$$

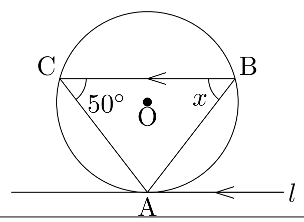
【例題 1 − 5】

次の図において、x を求めなさい。ただし、l は円 O の接線で、点 A は接点である。

(1)

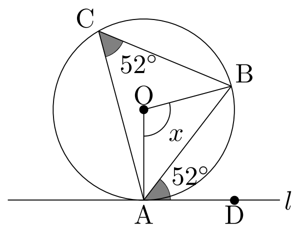


(2)



<解説>

(1) 右図のように、直線 l 上に点 D をとると、接弦定理より、

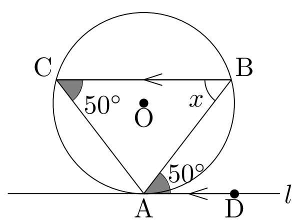


$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BCA} = 52^\circ$$

円周角の定理より、

$$\angle \mathrm{BOA} = 2\angle \mathrm{BCA}$$
$$x = 2 \times 52^\circ = 104^\circ$$

(2) 右図のように、直線 l 上に点 D をとると、接弦定理より、



$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BCA} = 50^\circ$$

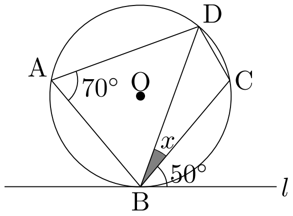
また、平行線における錯角は等しいので、

$$x = \angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{BAD} = 50^\circ$$

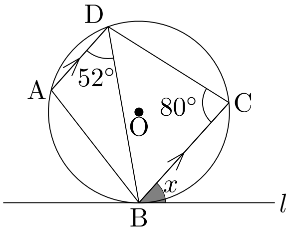
【演習 1 − 5】

次の図において、l は円 O の接線で、点 B が接点であるとき、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)

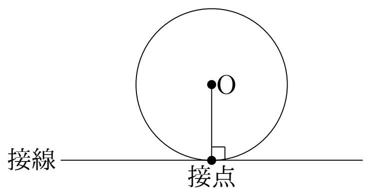


(2) AD // BC

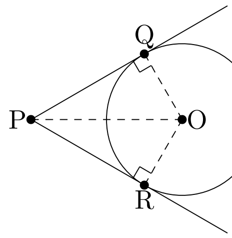


2　円と直線

2.1　円の接線の長さ



直線と円がただ 1 点を共有するとき、この直線は円に**接する**といい、この直線を円の**接線**、この共有点を**接点**といいます。また、円の中心と接点とを結ぶ直線は、円の接線に垂直になります。



右図のように、円 O の外部の点 P から円に接線を引くと、2 本の接線を引くことができ、そのときの接点をそれぞれ Q, R とすると、円外の点 P から接点 Q, R までの距離 PQ, PR を**接線の長さ**といいます。

ここで、△PQO と △PRO に着目すると、

$$\angle\mathrm{PQO} = \angle\mathrm{PRO} = 90^\circ \quad \cdots\cdots \text{①}$$

また、円の半径は等しいので

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

さらに、PO は共通であるので

$$\mathrm{PO} = \mathrm{PO} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

①～③より、直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので △PQO ≡ △PRO となり、合同な図形の対応する線分の長さは等しいので、PQ = PR となります。このことから、「**円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しい**」ということがわかります。

【例題 2 − 1】

AB = 3, BC = 7, CA = 5 である △ABC において、内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とします。

(1) BP = x とするとき、AQ, CQ の長さをそれぞれ x で表しなさい。

(2) BP の長さを求めなさい。

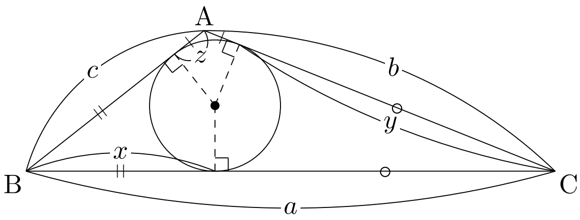
＜解説＞

一般に、右の図のような △ABC に円が内接しているとき、接線の長さをそれぞれ x, y, z とすると、

$$x = \frac{c+a-b}{2}$$

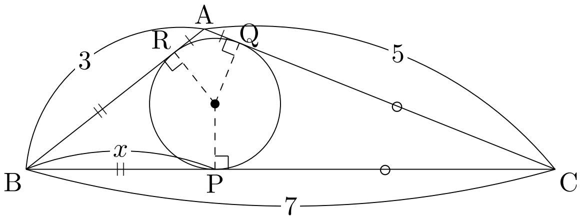
$$y = \frac{a+b-c}{2}$$

$$z = \frac{b+c-a}{2}$$



という長さの関係が成り立ちます。

(1) 円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の
接線の長さは等しいので、



$$\mathrm{BP} = \mathrm{BR} = x$$
$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AR} = \mathrm{AB} - \mathrm{BR} = 3 - x$$
$$\mathrm{CQ} = \mathrm{CP} = \mathrm{BC} - \mathrm{BP} = 7 - x$$

(2) (1) より、

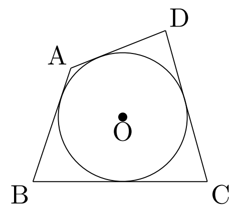
$$\begin{aligned} \mathrm{AQ} + \mathrm{CQ} &= \mathrm{AC} \\ (3 - x) + (7 - x) &= 5 \\ 10 - 2x &= 5 \\ 2x &= 10 - 5 = 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

【演習 2 − 1】

右の図のように、四角形 ABCD に円 O が内接しているとき、

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{BC} + \mathrm{DA}$$ (**2** 組の対辺の和が等しい)

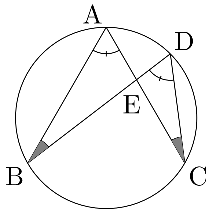
であることを証明しなさい。



2.2 円と相似

円周上の点を利用されて作られる図形（三角形）では、円周角の定理により、等しくなる角が複数存在します。そのため次の例のように、2 組の角がそれぞれ等しくなるので、2 つの三角形が相似になる場合が多くあります。

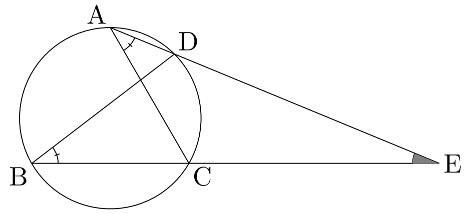
① $\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{DCE}$



$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{DCE}$　($\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角)

$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{CDE}$　($\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角)

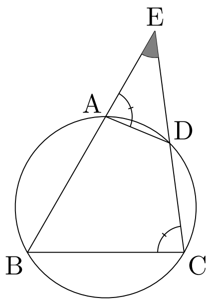
② $\triangle \mathrm{ACE} \backsim \triangle \mathrm{BDE}$



$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{EBD}$　($\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角)

$\angle \mathrm{CEA} = \angle \mathrm{DEB}$　(共通)

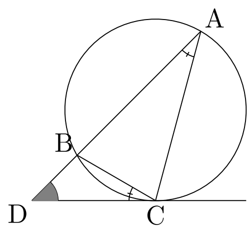
③ $\triangle \mathrm{EAD} \backsim \triangle \mathrm{ECB}$



$\angle \mathrm{DEA} = \angle \mathrm{BEC}$　(共通)

$\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{ECB}$　(内接四角形の性質)

④ $\triangle \mathrm{ADC} \backsim \triangle \mathrm{CDB}$

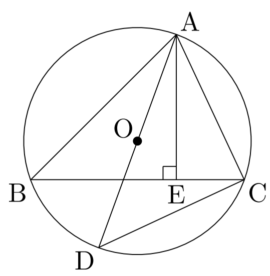


$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{CDB}$　(共通)

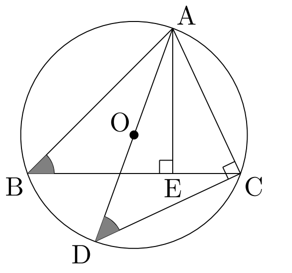
$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{BCD}$　(接弦定理)

【例題 2 − 2】

右の図のように円 O に内接する △ABC があり、AD は円 O の直径です。A から辺 BC に垂線をひき、BC との交点を E とします。
このとき、△ABE と △ADC は相似であることを証明しなさい。



＜解説＞



△ABE と △ADC で、$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に対する円周角は等しいので、

$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{ADC}$ ……· ①

また、半円の弧に対する円周角は直角になるので、仮定より、

$\angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{DCA} = 90^\circ$ ……· ②

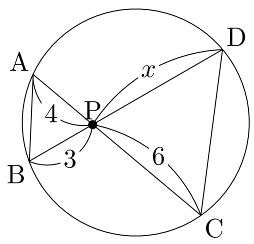
①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{ADC}$

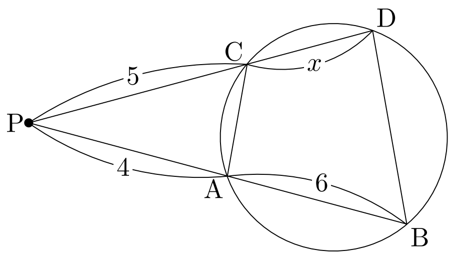
【演習 2 − 2】

次の図において、x の値を求めなさい。

(1)



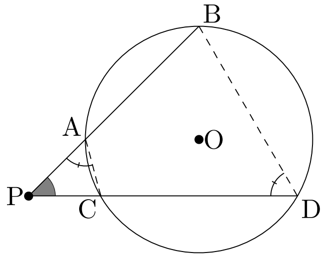
(2)



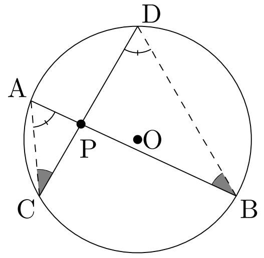
2.3 方べきの定理①

次の図のように、点 P を通る 2 本の直線が円 O と 4 つの交点を持つような 2 つの場合のどちらにおいても、2 組の角がそれぞれ等しいので、△PAC∽ △PDB となります。

(i) 点 P が円 O の外部にある



(ii) 点 P が円 O の内部にある



このとき、相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

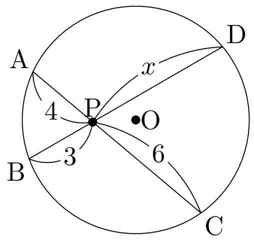
$$\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB}$$
$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$$

となり、「**2 直線の交点と直線と円との 2 交点までの距離の積は等しい**」という関係が成り立ち、これを**方べきの定理**といいます。

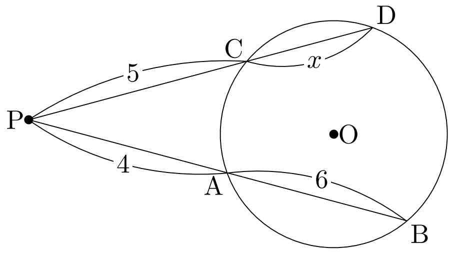
【例題 2 − 3】

次の図において、x の値を求めなさい。

(1)



(2)



＜解説＞

(1) 方べきの定理より

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PC} = \mathrm{PB} \times \mathrm{PD}$$
$$4 \times 6 = 3 \times x$$
$$x = 8$$

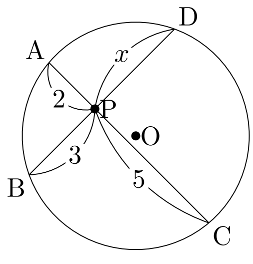
(2) 方べきの定理より

$$\mathrm{PC} \times \mathrm{PD} = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$$
$$5 \times (x + 5) = 4 \times (4 + 6)$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5 = 3$$

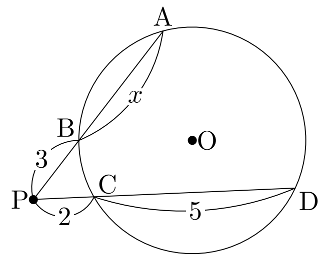
【演習２－３】

次の図において、x の値を求めなさい。

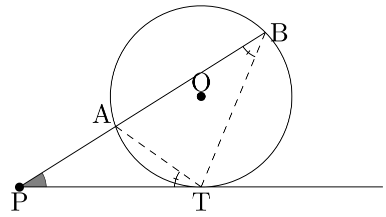
(1)



(2)



2.4 方べきの定理②



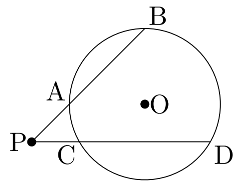
右図のように点 P が円 O の外部にあり、点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A, B で交わり、もう一方が点 T で接するような場合では、2 組の角がそれぞれ等しいので、△PAT∽ △PTB となります。このとき、相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PT} = \mathrm{PT} : \mathrm{PB}$$

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$

という関係が成り立ち、これも**方べきの定理**といいます。

これは、点 P が円 O の外部にあって円と 2 直線が 4 つの交点を持つ場合において、点 C と点 D が重なって点 T になったすると、



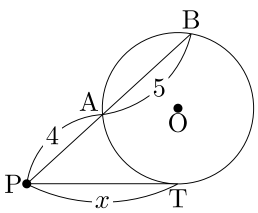
$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT} \times \mathrm{PT}$$

となり、どちらも同じ方べきの定理であると考えることができます。

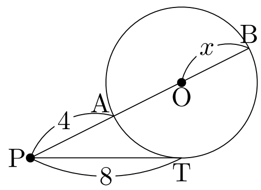
【例題 2 − 4】

次の図において、T が円の接点であるとき、x の値を求めなさい。

(1)



(2)



＜解説＞

(1) 方べきの定理より、

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$
$$4 \times (4+5) = x^2$$
$$x^2 = 36$$
$$x > 0 \text{ より} \quad x = 6$$

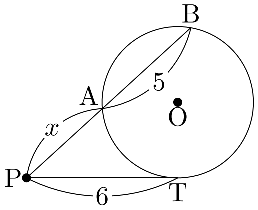
(2) 方べきの定理より、

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$
$$4 \times (2x+4) = 8^2$$
$$2x + 4 = 16$$
$$x = 6$$

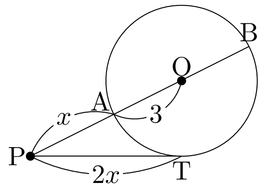
【演習 2 − 4】

次の図において、T が円の接点であるとき、x の値を求めなさい。

(1)



(2)

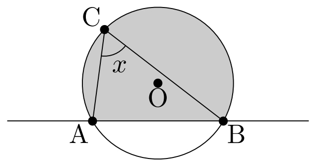


3　共円条件

3 つの点を通る円は必ずかくことができますが、4 つ以上の点を通る円は必ずかくことができるわけではありません。そこで、ここでは 4 つの点が同一円周上にある条件（**共円条件**）について考えます。

3.1　円周角の定理の逆

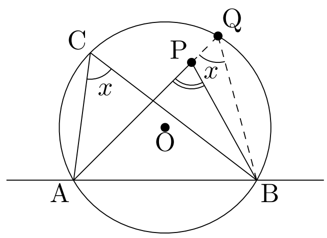
右の図のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C をとります。図の色付きの図形のように、円の弧と弦とでかこまれた図形を**弓形**といい、弦 AB と弧上の点 C を用いて、「弓形 ACB」といいます。



ここで、弧 AB に対する円周角 ∠BCA の大きさを x とし、直線 AB に対して C と同じ側に点 P をとりますが、点 P のとり方には、次の 3 つの場合が考えられます。

(i) 点 P が弓形 ACB の内部にある場合

AP の延長と円との交点を Q とすると、∠BQA は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるので、円周角の定理から、



$$\angle\mathrm{BQA} = \angle\mathrm{BCA} = x$$

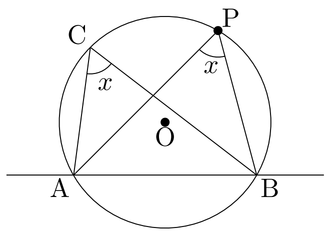
∠BPA は、△QPB に着目すると ∠QPB の外角になるので、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BPA} &= \angle\mathrm{BQP} + \angle\mathrm{PBQ}\\ &= x + \angle\mathrm{PBQ} > x\end{aligned}$$

となり、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角よりも大きくなります。

(ii) 点 P が弓形 ACB の弧上にある場合

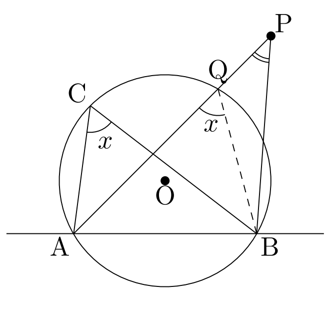
∠APB は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるので、円周角の定理から、



$$\angle\mathrm{BPA} = \angle\mathrm{BCA} = x$$

(iii) 点 P が弓形 ACB の外部にある場合

AP と円との交点を Q とすると、∠BQA は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるので、円周角の定理から、



$$\angle\mathrm{BQA} = \angle\mathrm{BCA} = x$$

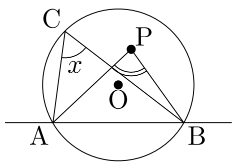
∠BQA は、△PQB に着目すると ∠PQB の外角になるので、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BQA} &= \angle\mathrm{BPQ} + \angle\mathrm{QBP}\\ x &= \angle\mathrm{BPA} + \angle\mathrm{QBP}\\ \angle\mathrm{BPA} &= x - \angle\mathrm{QBP} < x\end{aligned}$$

となり、∠APB は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角よりも小さくなります。

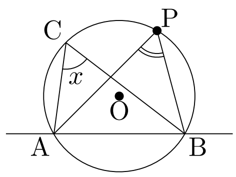
以上のことをまとめると、

(i) 点 P が弓形の内部にある



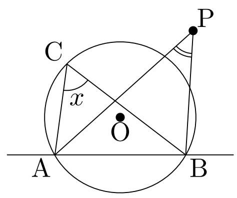
$\angle\mathrm{BPA} > x$

(ii) 点 P が弓形の弧上にある



$\angle\mathrm{BPA} = x$

(iii) 点 P が弓形の外部にある



$\angle\mathrm{BPA} < x$

という関係があることになります。

このことから、4 点 A, B, C, P について、点 C, P が直線 AB に対して同じ側にあり、

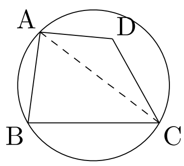
$$\angle\mathrm{BPA} = \angle\mathrm{BCA}$$

ならば、点 P は 3 点 A, B, C を通る円（円 O）の円周上に存在する（円の内部や外部には存在しない）ので、4 点 A, B, C, P は同一円周上にあることになり、円周角の定理の逆が成り立つことがわかります。

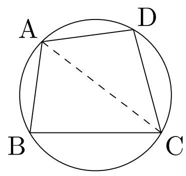
3.2 内接四角形の性質の逆

三角形は外接円を作図することができるので、必ず円に内接します。そのため、四角形 ABCD の 3 つの頂点 A, B, C を通るような円を作図することはできますが、次の図のように残りの頂点 D も円周上にあるとは限らないので、四角形の場合は必ず円に内接するとはかぎりません。

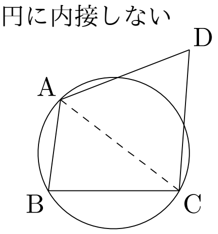
(i) 円に内接しない



(ii) 円に内接する

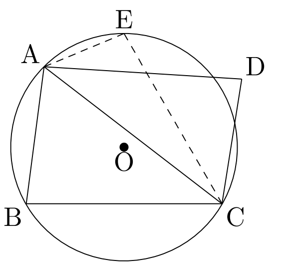


(iii) 円に内接しない



そこで、四角形が円に内接する条件（共円条件）について考えます。

右図のような四角形 ABCD において、



$$\angle B + \angle D = 180^\circ \quad \cdots\cdots \text{①}$$

であるとします。また、△ABC の外接円をかき、これを円 O とします。
さらに、AC に対して B と反対側の円周上に点 E をとります。

このとき、四角形 ABCE は円 O に内接するので、対角の和は 180° になり、

$$\angle B + \angle E = 180^\circ \quad \cdots\cdots \text{②}$$

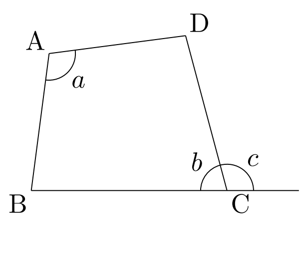
①, ②より

$$\angle D = \angle E$$

点 D, E は直線 AC に対して同じ側にあるので、円周角の定理の逆より、4 点 A, C, D, E は同一円周上にあることになります。このとき、△ACE の外接円は円 O であるので、点 D は円 O の円周上に存在します。つまり、4 点 A, B, C, D は円 O の円周上にあることになり、四角形 ABCD は円 O に内接することがわかります。

このように、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接します。

また、1 つの外角がそれと隣り合う内角の対角に等しい場合についても、右の図のように、



$$\angle a = \angle c, \qquad \angle b + \angle c = 180^\circ$$

という関係から、結局

$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$

のようになり、「1 組の対角の和が 180° である四角形」と同じ条件になるので、円に内接します。

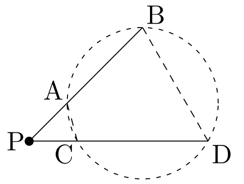
以上のことから、内接四角形の性質の逆が成り立ち、共円条件は次のようになります。

(i) 1 組の対角の和が 180°　　(ii) 外角が、それと隣り合う内角の対角に等しい

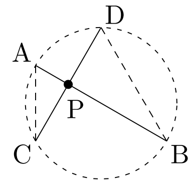
3.3 方べきの定理の逆

次の図のように、2 つの線分 AB, CD、またはその延長の交点を P とします。

(i) 線分 AB, CD の延長の交点 P



(ii) 線分 AB, CD の交点 P



このとき、$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$ であるとすると、$\triangle\mathrm{PAC}$ と $\triangle\mathrm{PDB}$ において、

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PD} = \mathrm{PC} : \mathrm{PB} \quad \cdots\cdots ①$$

また、

$$\angle\mathrm{APC} = \angle\mathrm{DPB} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle\mathrm{PAC} \backsim \triangle\mathrm{PDB}$$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle\mathrm{CAP} = \angle\mathrm{BDP}$$

となります。このことから、(i) は内接四角形の性質の逆、(ii) は円周角の定理の逆により、それぞれ 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあることがわかり、方べきの定理の逆が成り立ちます。