

【中3数学】円

まなびの学園

<http://www.manabino-academy.com>

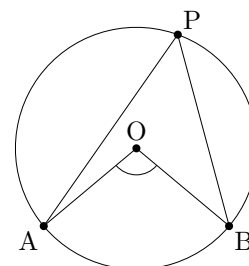
目次

1	円と角度	1
1.1	円周角と中心角	1
1.2	円周角の定理	4
1.3	円周角と弧	6
1.4	円に内接する四角形の性質	8
1.5	接弦定理	10
2	円と直線	13
2.1	円の接線の長さ	13
2.2	円と相似	15
2.3	方べきの定理①	17
2.4	方べきの定理②	19
3	共円条件	21
3.1	円周角の定理の逆	21
3.2	内接四角形の性質の逆	23
3.3	方べきの定理の逆	24

1 円と角度

1.1 円周角と中心角

次の図のように、円 O の円周上に 3 点 A, B, P をとり、その 3 点を結びます。このとき、 $\angle APB$ を、 \widehat{AB} に対する円周角といい、 \widehat{AB} を、円周角 $\angle APB$ に対する弧といいます。



さらに、点 A, O, B を結ぶと、おうぎ形 OAB を作ることができ、 $\angle AOB$ を、 \widehat{AB} に対する中心角といいます。

円周角と中心角は、

- 円周角：弧の両端の点と円周上の点を結んでできる角
- 中心角：弧の両端の点と円の中心を結んでできる角

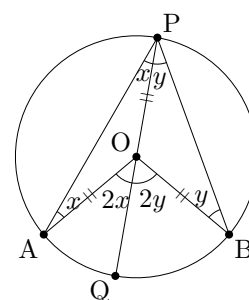
であるので、そのことが理解できれば名前からどのような角か判断できると思います。

ここで、点 P, O を通る直線と円 O との交点で、点 P と異なる点を Q とします。

OA, OB, OP はそれぞれ円 O の半径なので、

$$OA = OB = OP$$

となり、 $\triangle OPA$ と $\triangle OPB$ は二等辺三角形です。二等辺三角形の 2 つの底角は等しいことから、



$$\angle OPA = \angle OAP = x, \quad \angle OBP = \angle OPB = y$$

とすると、外角の定理から、「三角形の 1 つの外角は、その隣にない 2 つの内角の和に等しい」ので、

$$\begin{aligned} \angle AOQ &= \angle OPA + \angle OAP \\ &= x + x = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle QOB &= \angle OBP + \angle OPB \\ &= y + y = 2y \end{aligned}$$

となります。

\widehat{AB} に対する円周角 $\angle APB$ は、

$$\angle APB = \angle APO + \angle OPB = x + y$$

また、 \widehat{AB} に対する中心角 $\angle AOB$ は、

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB = 2x + 2y \\ &= 2(x + y) = 2\angle APB \end{aligned}$$

という関係が成り立ちます。つまり、

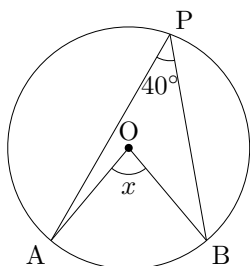
「1 つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の 2 倍の大きさになる」

こととなります。

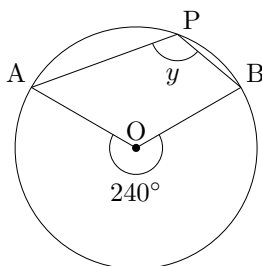
【例題 1 - 1】

下の図で、 $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ の大きさを求めなさい。ただし、点 O は円の中心です。

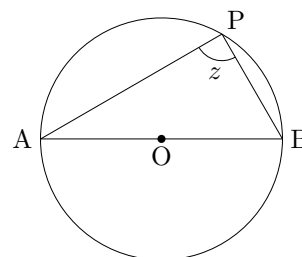
(1)



(2)



(3) AB は円 O の直径



<解説>

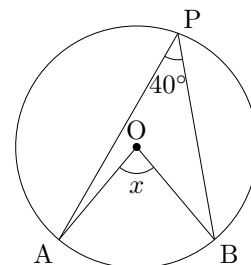
「1つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の2倍の大きさになる」ことから、「1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の $\frac{1}{2}$ 倍（半分）の大きさになる」ともいうことができます。つまり、ある弧に対して

$$(\text{中心角}) = (\text{円周角}) \times 2, \quad (\text{円周角}) = (\text{中心角}) \times \frac{1}{2}$$

という関係式が成り立ちます。

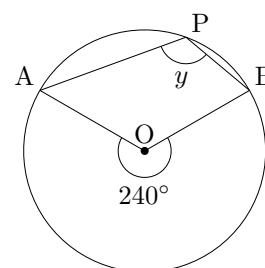
(1) \widehat{AB} に対する中心角 $\angle AOB$ が求める $\angle x$ になります。図より、 \widehat{AB} に対する円周角が $\angle APB = 40^\circ$ であるので、

$$\begin{aligned} \angle x &= (\widehat{AB} \text{ に対する中心角}) \\ &= (\widehat{AB} \text{ に対する円周角}) \times 2 \\ &= \angle APB \times 2 \\ &= 40^\circ \times 2 = 80^\circ \end{aligned}$$

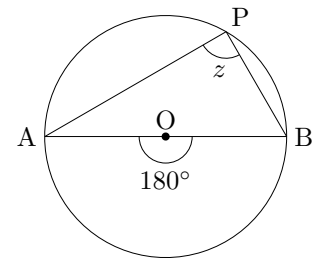


(2) \widehat{AB} に対する円周角 $\angle APB$ が求める $\angle y$ になります。ただし、(1) とは違い、(2) の \widehat{AB} は長い方の弧になるので注意してください。また、 \widehat{AB} (長い方) に対する中心角 $\angle AOB$ (鈍角) は、 $\angle AOB = 240^\circ$ であるので、

$$\begin{aligned} \angle y &= (\widehat{AB} \text{ に対する円周角}) \\ &= (\widehat{AB} \text{ (長い方) に対する中心角}) \times \frac{1}{2} \\ &= \angle AOB \times \frac{1}{2} \\ &= 240^\circ \times \frac{1}{2} = 120^\circ \end{aligned}$$



- (3) \widehat{AB} に対する円周角 $\angle APB$ が求める $\angle z$ になります。 \widehat{AB} に対する中心角 $\angle AOB$ は、 AB が円 O の直径であるので、 $\angle AOB = 180^\circ$ となります。このことから、



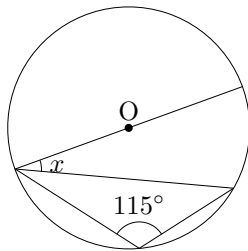
$$\begin{aligned} \angle z &= (\widehat{AB} \text{ に対する円周角}) \\ &= (\widehat{AB} \text{ に対する中心角}) \times \frac{1}{2} \\ &= \angle AOB \times \frac{1}{2} \\ &= 180^\circ \times \frac{1}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

このように、半円の弧に対する円周角は直角 (90°) になるので、この性質もしっかりと覚えておきましょう。

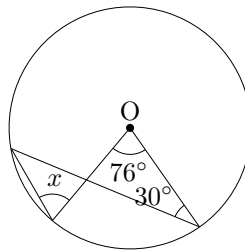
【演習 1 - 1】

下の図について、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし、点 O は円の中心です。

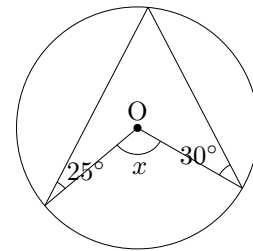
(1)



(2)



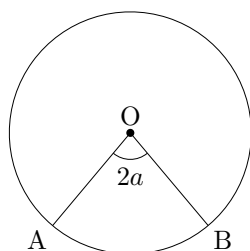
(3)



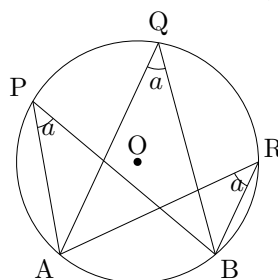
1.2 円周角の定理

次の図の円 O のように、 \widehat{AB} に対する中心角は 1 つしかありませんが、 \widehat{AB} に対する円周角は無数に存在します。

(i) \widehat{AB} に対する中心角 : $\angle AOB$



(ii) \widehat{AB} に対する円周角 : $\angle APB, \angle AQB, \angle ARB$



しかし、1 つの弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の $\frac{1}{2}$ 倍の大きさになるので、

$$\angle APB = \angle AOB \times \frac{1}{2}, \quad \angle AQB = \angle AOB \times \frac{1}{2}, \quad \angle ARB = \angle AOB \times \frac{1}{2}$$

となります。このことから、

$$\angle APB = \angle AQB = \angle ARB$$

となり、1 つの弧に対する円周角の大きさはどれも等しくなります。このように、円周角と中心角には、

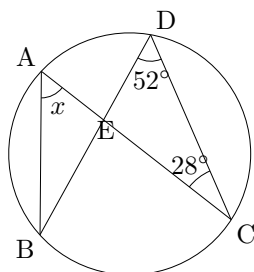
- 1 つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の大きさの半分になる。(1 つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の大きさの倍になる。)
- 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい。

という性質があり、これを円周角の定理といいます。

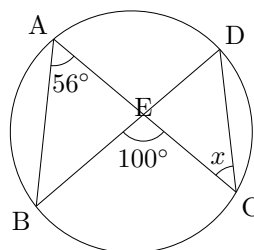
【例題 1 - 2】

次の図において、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



<解説>

(1) 求める $\angle x$ は、 \widehat{BC} に対する円周角です。しかし、 \widehat{BC} に対する円周角には $\angle BDC = 52^\circ$ もあります。円

周角の定理から、1つの弧に対する円周角の大きさは等しくなるので、

$$\angle BAC = \angle BDC$$

つまり、

$$\angle x = 52^\circ$$

となります。

(2) \widehat{AD} に対する2つの円周角は等しくなるので、

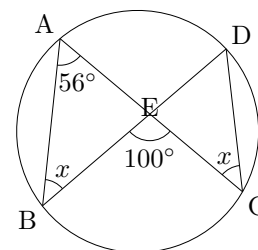
$$\angle ACD = \angle ABD = \angle x$$

ここで、 $\triangle ABE$ に着目すると、外角の定理から、1つの外角はその隣にない2つの内角の和に等しいので、

$$\angle EAB + \angle ABE = \angle CEB$$

$$56^\circ + \angle x = 100^\circ$$

$$\angle x = 100^\circ - 56^\circ = 44^\circ$$

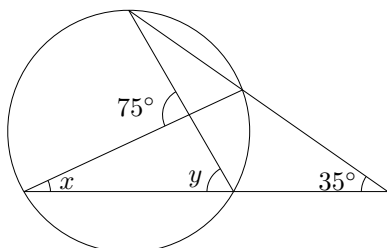


角度を求めるような問題では、1つの三角形に大きさのわかる角を集めることがポイントです。

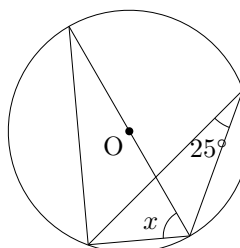
【演習1-2】

次の図において、 $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。ただし、点Oは円の中心です。

(1)



(2)



1.3 円周角と弧

右の図のおうぎ形 OAB とおうぎ形 OCD のように、1つの円において、等しい長さの弧をもつ2つのおうぎ形は合同になるため、中心角の大きさは等しく、

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \quad \text{ならば} \quad \angle AOB = \angle COD$$

となります。また、円周角の定理より、円周角は中心角の半分の大きさになるので、右の図のように、円周上に点 P, Q があるとき、

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB, \quad \angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$$

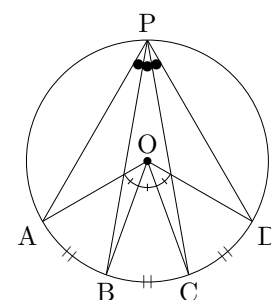
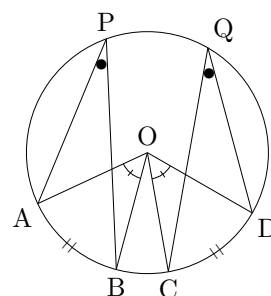
となります。 $\angle AOB = \angle COD$ であることから、

$$\angle APB = \angle CQD$$

という関係が成り立ち、同じ長さの弧であれば円周角の大きさも等しくなることがわかります。

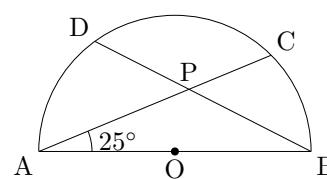
このことから、弧の長さが2倍、3倍、... されると、その弧に対する中心角・円周角の大きさは2倍、3倍、... となり、弧の長さとその弧に対する中心角・円周角の大きさは比例します。

- $\widehat{AC} = 2\widehat{AB} : \angle AOC = 2\angle AOB, \quad \angle APC = 2\angle APB$
- $\widehat{AD} = 3\widehat{AB} : \angle AOD = 3\angle AOB, \quad \angle APD = 3\angle APB$
- ⋮



【例題 1 - 3】

右の図のように、AB を直径とする半円 O の弧 AB 上に $\angle CAB = 25^\circ$ となる点 C をとります。また、弧 AC 上に、 $\widehat{AD} : \widehat{DC} = 2 : 3$ となる点 D をとり、AC と BD の交点を P とするとき、 $\angle APD$ の大きさを求めなさい。



<解説>

AB が直径なので、半円の弧に対する円周角は直角になることから、

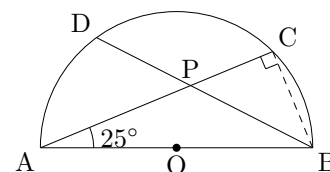
$$\angle BCA = 90^\circ$$

$\triangle CAB$ において、三角形の内角の和は 180° になるので、

$$\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$90^\circ + 25^\circ + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$$

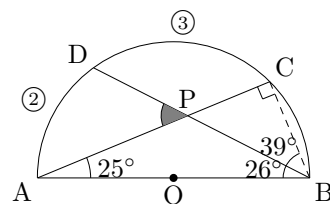


また、 $\widehat{AD} : \widehat{DC} = 2 : 3$ より、 \widehat{AD} , \widehat{DC} に対するそれぞれの円周角 $\angle ABD$, $\angle DBC$ の比も $2 : 3$ になります。このことから、

$$\angle ABD = \frac{2}{2+3} \angle ABC = \frac{2}{5} \times 65^\circ = 26^\circ$$

よって、 $\triangle PAB$ に外角の定理を用いて、

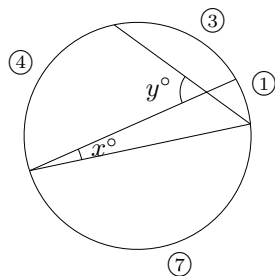
$$\begin{aligned} \angle APD &= \angle PAB + \angle ABP \\ &= 25^\circ + 26^\circ = 51^\circ \end{aligned}$$



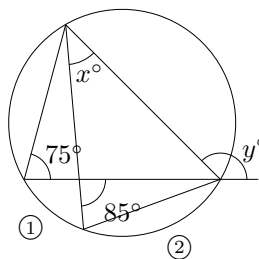
【演習 1 - 3】

図中の○囲みの数字は弧の長さの比です。 x, y の値を求めなさい。

(1)



(2)

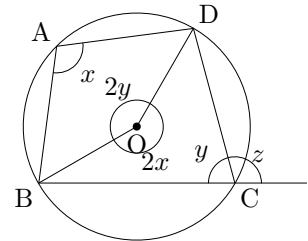


1.4 円に内接する四角形の性質

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき、その多角形は円の内側で接するので、円に内接するといひ、円は多角形の外側で接するので、多角形の外接円といひます。

ここでは、右図のような円Oに内接する四角形ABCDについて考えます。

右図のように $\angle A = x$ 、 $\angle C = y$ とすると、 $\angle A$ は弧BCDに対する円周角、 $\angle C$ は弧BADに対する円周角であるので、それぞれの中心角は、円周角の定理より $2x$ 、 $2y$ となります。



このことから、

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 360^\circ \\ x + y &= 180^\circ \dots\dots ① \end{aligned}$$

となり、円に内接する四角形の対角の和は 180° になります。

また、 $\angle C$ の外角を z とすると、

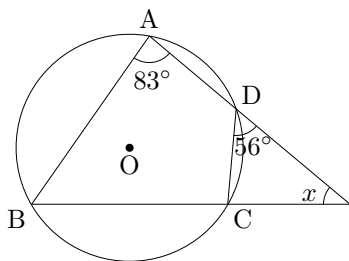
$$y + z = 180^\circ \dots\dots ②$$

となるので、①、②より $x = z$ となり、円に内接する四角形の1つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しいという関係も成り立ちます。

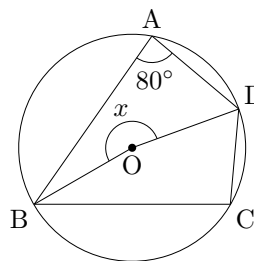
【例題1-4】

点Oが円の中心であるとき、次の $\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



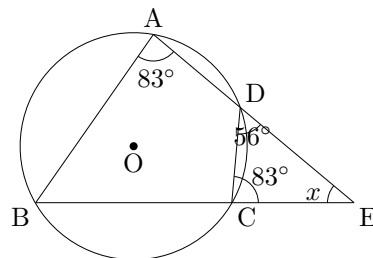
<解説>

(1) ADとBCの交点をEとすると、円に内接する四角形の1つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しいので、

$$\angle DAB = \angle DCE = 83^\circ$$

$\triangle DCE$ において、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle x = 180^\circ - (56^\circ + 83^\circ) = 41^\circ$$

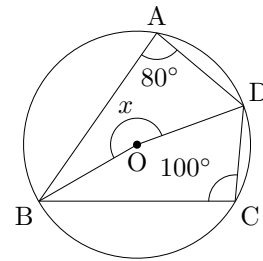


(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° になるので、

$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= 180^\circ \\ \angle C &= 180^\circ - \angle A \\ &= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ\end{aligned}$$

また、円周角の定理より、 $\angle x$ は弧 DAB の中心角で、その円周角 $\angle C$ の 2 倍になることから、

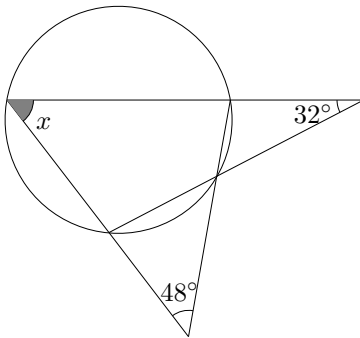
$$\begin{aligned}\angle x &= 2\angle C \\ &= 2 \times 100^\circ = 200^\circ\end{aligned}$$



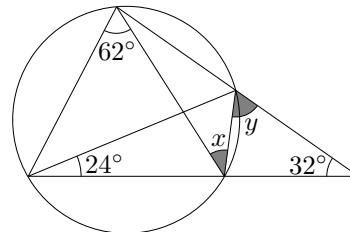
【演習 1 - 4】

次の $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



1.5 接弦定理

右図のような円に内接する四角形 APBC を考えます。(直線 AT は点 A における円の接線)

このとき、円に内接する四角形の性質から、1つの外角の大きさは、それと隣り合う内角の対角の大きさに等しいので、

$$\angle BCA = \angle BPQ$$

となります。

ここで、A, B, C を固定したまま P を円周上に沿って A に近づけていくと、 $\angle BPQ$ と $\angle BAT$ は一致します。このことから、

$$\angle BCA = \angle BAT \quad (= \angle BPQ)$$

となることが予想されます。実際に、「円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい」ということが成り立ち、これを接弦定理といいます。

(i) $\angle BAT$ が鋭角であるとき

直径 AD を引くと、 $\angle BDA$, $\angle BCA$ は \widehat{AB} に対する円周角であるので、

$$\angle BDA = \angle BCA \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

円の中心と接点を結んだ直線は、接線と垂直に交わるので $\angle DAT = 90^\circ$ 。
このことから、

$$\angle BAT = \angle DAT - \angle DAB = 90^\circ - \angle DAB \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

また、AD は円 O の直径であるので、半円の弧に対する円周角 $\angle ABD = 90^\circ$ 。よって、 $\triangle DAB$ の内角の和は 180° になることから、

$$\begin{aligned} \angle BDA &= 180^\circ - (\angle DAB + \angle ABD) \\ &= 180^\circ - \angle DAB - 90^\circ \\ &= 90^\circ - \angle DAB \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

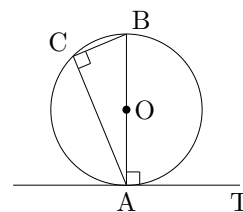
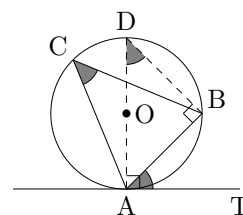
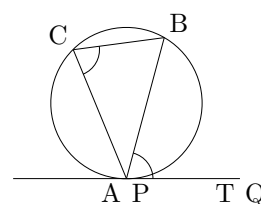
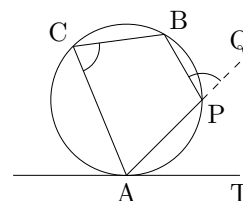
①~③より、 $\angle BCA = \angle BAT$

(ii) $\angle BAT$ が直角 ($\angle BAT = 90^\circ$) のとき

AB は円 O の直径であるので、半円の弧に対する円周角は 90° になることから、 $\angle BCA = 90^\circ$ 。よって、

$$\angle BCA = \angle BAT$$

(iii) $\angle BAT$ が鈍角であるとき



図のように、線分 AB に対し C と反対側の円周上に点 D をとります。
 $\angle BAT$ が鈍角のとき、 $\angle SAB$ は鋭角であるので、(i) より、

$$\angle SAB = \angle ADB \dots\dots ④$$

一直線の作る角は 180° であるので、

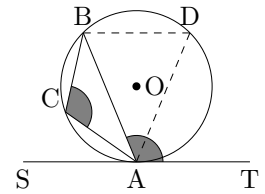
$$\begin{aligned} \angle SAT &= \angle SAB + \angle BAT = 180^\circ \\ \angle BAT &= 180^\circ - \angle SAB \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

また、円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° であるので、

$$\begin{aligned} \angle BCA + \angle ADB &= 180^\circ \\ \angle BCA &= 180^\circ - \angle ADB \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

④～⑥より、

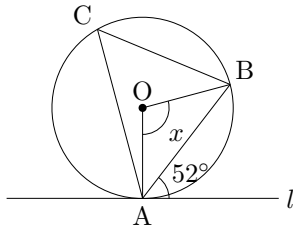
$$\angle BCA = \angle BAT$$



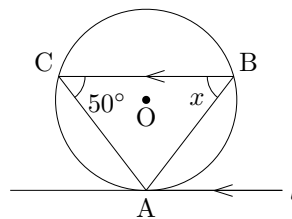
【例題 1 - 5】

次の図において、 x を求めなさい。ただし、 l は円 O の接線で、点 A は接点である。

(1)



(2)



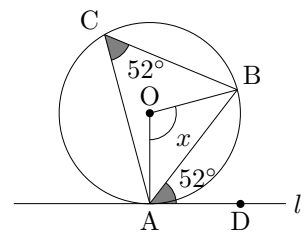
<解説>

(1) 右図のように、直線 l 上に点 D をとると、接弦定理より、

$$\angle BAD = \angle BCA = 52^\circ$$

円周角の定理より、

$$\begin{aligned} \angle BOA &= 2\angle BCA \\ x &= 2 \times 52^\circ = 104^\circ \end{aligned}$$

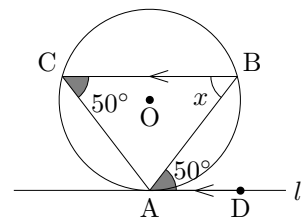


(2) 右図のように、直線 l 上に点 D をとると、接弦定理より、

$$\angle BAD = \angle BCA = 50^\circ$$

また、平行線における錯角は等しいので、

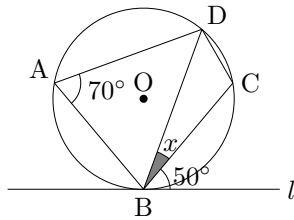
$$x = \angle ABC = \angle BAD = 50^\circ$$



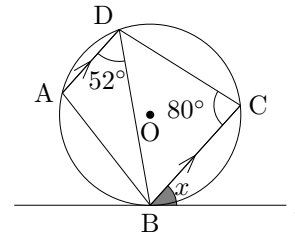
【演習 1 - 5】

次の図において、 l は円 O の接線で、点 B が接点であるとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



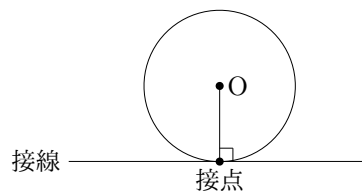
(2) $AD \parallel BC$



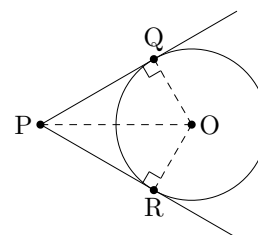
2 円と直線

2.1 円の接線の長さ

直線と円がただ 1 点を共有するとき、この直線は円に接するといい、この直線を円の接線、この共有点を接点といいます。また、円の中心と接点とを結ぶ直線は、円の接線に垂直になります。



右図のように、円 O の外部の点 P から円に接線を引くと、2 本の接線を引くことができ、そのときの接点をそれぞれ Q, R とすると、円外の点 P から接点 Q, R までの距離 PQ, PR を接線の長さといいます。



ここで、 $\triangle PQO$ と $\triangle PRO$ に着目すると、

$$\angle PQO = \angle PRO = 90^\circ \dots\dots ①$$

また、円の半径は等しいので

$$OQ = OR \dots\dots ②$$

さらに、PO は共通であるので

$$PO = PO \dots\dots ③$$

①～③より、直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので $\triangle PQO \equiv \triangle PRO$ となり、合同な図形の対応する線分の長さは等しいので、 $PQ = PR$ となります。このことから、「円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しい」ということがわかります。

—【例題 2 - 1】—

AB = 3, BC = 7, CA = 5 である $\triangle ABC$ において、内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とします。

- (1) $BP = x$ とするとき、AQ, CQ の長さをそれぞれ x で表しなさい。
- (2) BP の長さを求めなさい。

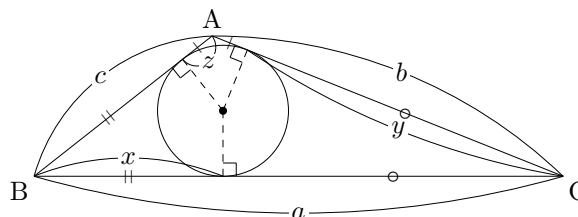
<解説>

一般に、右の図のような $\triangle ABC$ に円が内接しているとき、接線の長さをそれぞれ x, y, z とすると、

$$x = \frac{c + a - b}{2}$$

$$y = \frac{a + b - c}{2}$$

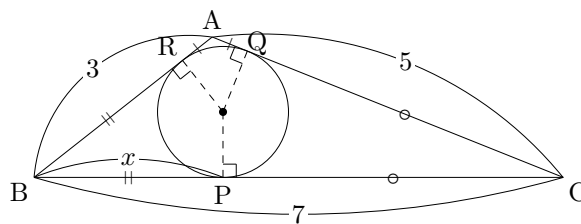
$$z = \frac{b + c - a}{2}$$



という長さの関係が成り立ちます。

- (1) 円の外部の1点からその円に引いた2本の接線の長さは等しいので、

$$\begin{aligned} BP &= BR = x \\ AQ &= AR = AB - BR = 3 - x \\ CQ &= CP = BC - BP = 7 - x \end{aligned}$$



- (2) (1) より、

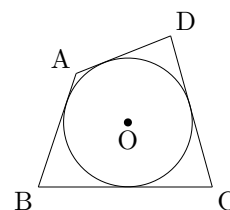
$$\begin{aligned} AQ + CQ &= AC \\ (3 - x) + (7 - x) &= 5 \\ 10 - 2x &= 5 \\ 2x &= 10 - 5 = 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

—【演習 2 - 1】—

右の図のように、四角形 ABCD に円 O が内接しているとき、

$$AB + CD = BC + DA \quad (\text{2組の対辺の和が等しい})$$

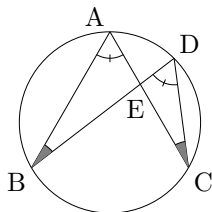
であることを証明しなさい。



2.2 円と相似

円周上の点を利用して作られる図形（三角形）では、円周角の定理により、等しくなる角が複数存在します。そのため次の例のように、2組の角がそれぞれ等しくなるので、2つの三角形が相似になる場合が多くあります。

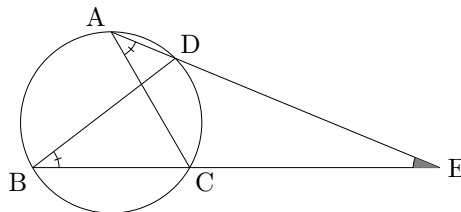
① $\triangle ABE \sim \triangle DCE$



$$\angle ABE = \angle DCE \quad (\widehat{AD} \text{ に対する円周角})$$

$$\angle BAE = \angle CDE \quad (\widehat{BC} \text{ に対する円周角})$$

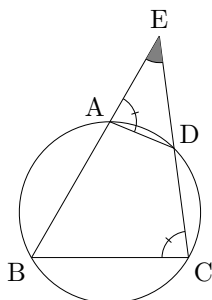
② $\triangle ACE \sim \triangle BDE$



$$\angle EAC = \angle EBD \quad (\widehat{CD} \text{ に対する円周角})$$

$$\angle CEA = \angle DEB \quad (\text{共通})$$

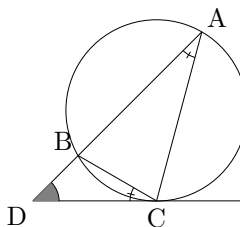
③ $\triangle EAD \sim \triangle ECB$



$$\angle DEA = \angle BEC \quad (\text{共通})$$

$$\angle EAD = \angle ECB \quad (\text{内接四角形の性質})$$

④ $\triangle ADC \sim \triangle CDB$

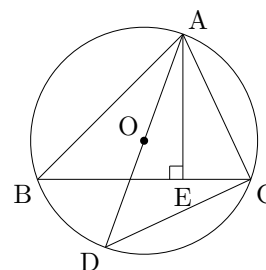


$$\angle ADC = \angle CDB \quad (\text{共通})$$

$$\angle CAD = \angle BCD \quad (\text{接弦定理})$$

【例題 2 - 2】

右の図のように円 O に内接する $\triangle ABC$ があり、AD は円 O の直径です。A から辺 BC に垂線をひき、BC との交点を E とします。このとき、 $\triangle ABE$ と $\triangle ADC$ は相似であることを証明しなさい。



<解説>

$\triangle ABE$ と $\triangle ADC$ で、 \widehat{AC} に対する円周角は等しいので、

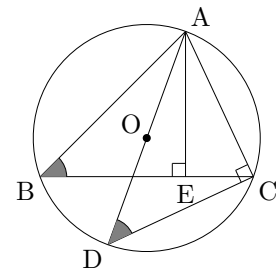
$$\angle ABE = \angle ADC \dots\dots ①$$

また、半円の弧に対する円周角は直角になるので、仮定より、

$$\angle BEA = \angle DCA = 90^\circ \dots\dots ②$$

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいので、

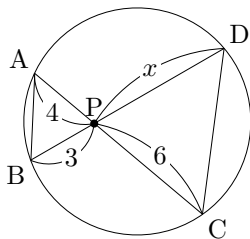
$$\triangle ABE \sim \triangle ADC$$



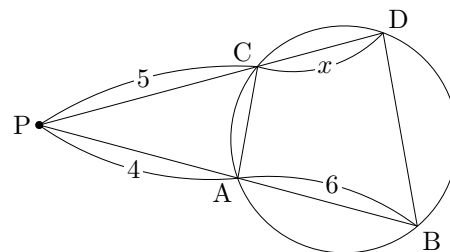
【演習 2 - 2】

次の図において、 x の値を求めなさい。

(1)



(2)

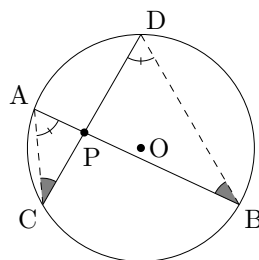
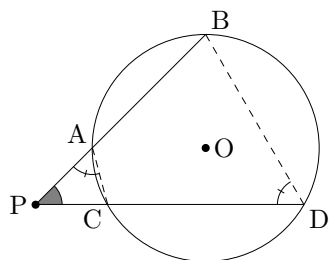


2.3 方べきの定理①

次の図のように、点 P を通る 2 本の直線が円 O と 4 つの交点を持つような 2 つの場合のどちらにおいても、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ となります。

(i) 点 P が円 O の外部にある

(ii) 点 P が円 O の内部にある



このとき、相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$PA : PD = PC : PB$$

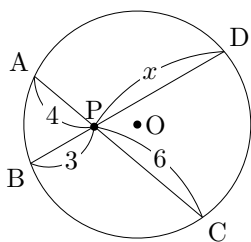
$$PA \times PB = PC \times PD$$

となり、「2 直線の交点と直線と円との 2 交点までの距離の積は等しい」という関係が成り立ち、これを方べきの定理といいます。

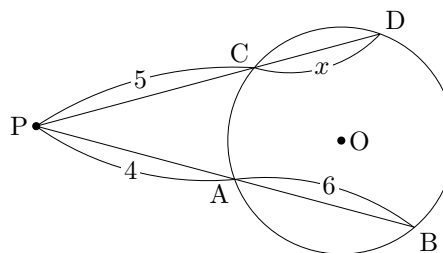
【例題 2 - 3】

次の図において、 x の値を求めなさい。

(1)



(2)



<解説>

(1) 方べきの定理より

$$PA \times PC = PB \times PD$$

$$4 \times 6 = 3 \times x$$

$$x = 8$$

(2) 方べきの定理より

$$PC \times PD = PA \times PB$$

$$5 \times (x + 5) = 4 \times (4 + 6)$$

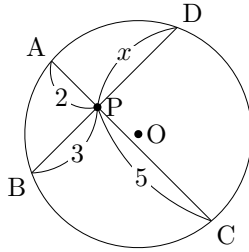
$$x + 5 = 8$$

$$x = 8 - 5 = 3$$

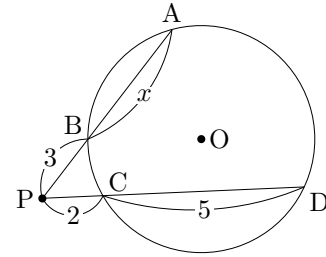
【演習 2 - 3】

次の図において、 x の値を求めなさい。

(1)



(2)



2.4 方べきの定理②

右図のように点 P が円 O の外部にあり、点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A, B で交わり、もう一方が点 T で接するような場合には、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ となります。このとき、相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので、

$$PA : PT = PT : PB$$

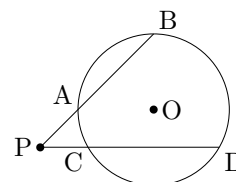
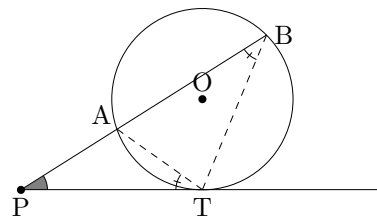
$$PA \times PB = PT^2$$

という関係が成り立ち、これも方べきの定理といいます。

これは、点 P が円 O の外部にあって円と 2 直線が 4 つの交点を持つ場合において、点 C と点 D が重なって点 T になったすると、

$$PA \times PB = PC \times PD \quad \longrightarrow \quad PA \times PB = PT \times PT$$

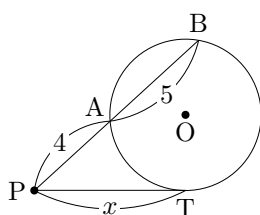
となり、どちらも同じ方べきの定理であると考えることができます。



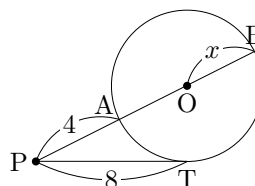
【例題 2 - 4】

次の図において、T が円の接点であるとき、 x の値を求めなさい。

(1)



(2)



<解説>

(1) 方べきの定理より、

$$PA \times PB = PT^2$$

$$4 \times (4 + 5) = x^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x > 0 \text{ より } x = 6$$

(2) 方べきの定理より、

$$PA \times PB = PT^2$$

$$4 \times (2x + 4) = 8^2$$

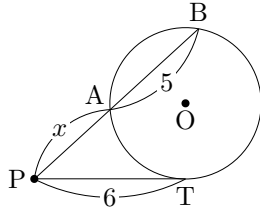
$$2x + 4 = 16$$

$$x = 6$$

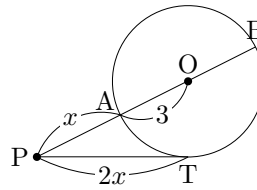
【演習 2 - 4】

次の図において、 T が円の接点であるとき、 x の値を求めなさい。

(1)



(2)

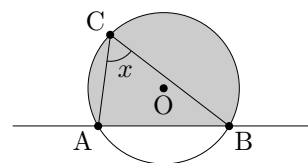


3 共円条件

3つの点を通る円は必ずかくことができますが、4つ以上の点を通る円は必ずかくことができるわけではありません。そこで、ここでは4つの点が同一円周上にある条件（共円条件）について考えます。

3.1 円周角の定理の逆

右の図のように、円Oの周上に3点A, B, Cをとります。図の色付きの図形のように、円の弧と弦とで囲まれた図形を弓形といい、弦ABと弧上の点Cを用いて、「弓形ACB」といいます。



ここで、弧ABに対する円周角 $\angle BCA$ の大きさを x とし、直線ABに対してCと同じ側に点Pをとりますが、点Pのとり方には、次の3つの場合が考えられます。

(i) 点Pが弓形ACBの内部にある場合

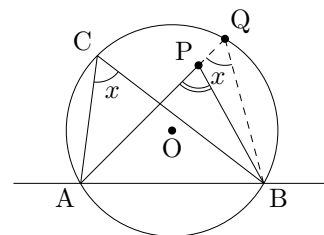
APの延長と円との交点をQとすると、 $\angle BQA$ は \widehat{AB} に対する円周角であるので、円周角の定理から、

$$\angle BQA = \angle BCA = x$$

$\angle BPA$ は、 $\triangle QPB$ に着目すると $\angle QPB$ の外角になるので、

$$\begin{aligned} \angle BPA &= \angle BQP + \angle PBQ \\ &= x + \angle PBQ > x \end{aligned}$$

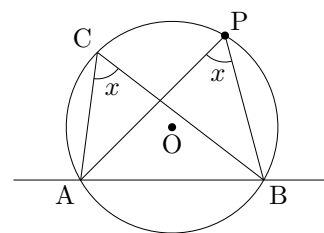
となり、 \widehat{AB} に対する円周角よりも大きくなります。



(ii) 点Pが弓形ACBの弧上にある場合

$\angle APB$ は \widehat{AB} に対する円周角であるので、円周角の定理から、

$$\angle BPA = \angle BCA = x$$



(iii) 点Pが弓形ACBの外部にある場合

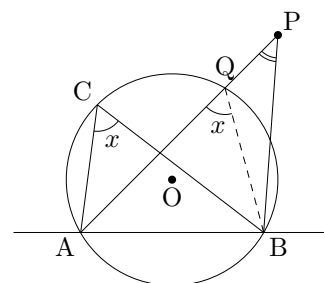
APと円との交点をQとすると、 $\angle BQA$ は \widehat{AB} に対する円周角であるので、円周角の定理から、

$$\angle BQA = \angle BCA = x$$

$\angle BQA$ は、 $\triangle PQB$ に着目すると $\angle PQB$ の外角になるので、

$$\begin{aligned} \angle BQA &= \angle BPQ + \angle QBP \\ x &= \angle BPA + \angle QBP \\ \angle BPA &= x - \angle QBP < x \end{aligned}$$

となり、 $\angle APB$ は \widehat{AB} に対する円周角よりも小さくなります。

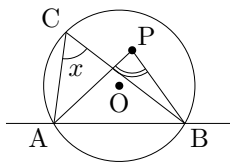


以上のことをまとめると、

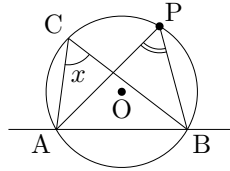
(i) 点 P が弓形の内部にある

(ii) 点 P が弓形の弧上にある

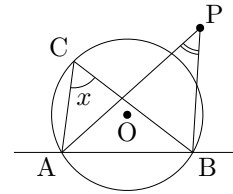
(iii) 点 P が弓形の外部にある



$$\angle BPA > x$$



$$\angle BPA = x$$



$$\angle BPA < x$$

という関係があることになります。

このことから、4点 A, B, C, P について、点 C, P が直線 AB に対して同じ側にあり、

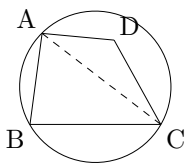
$$\angle BPA = \angle BCA$$

ならば、点 P は3点 A, B, C を通る円 (円 O) の円周上に存在する (円の内部や外部には存在しない) ので、4点 A, B, C, P は同一円周上にあることになり、円周角の定理の逆が成り立つことがわかります。

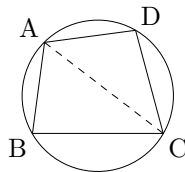
3.2 内接四角形の性質の逆

三角形は外接円を作図することができるので、必ず円に内接します。そのため、四角形 ABCD の 3 つの頂点 A, B, C を通るような円を作図することはできますが、次の図のように残りの頂点 D も円周上にあるとは限らないので、四角形の場合は必ず円に内接するとはかぎりません。

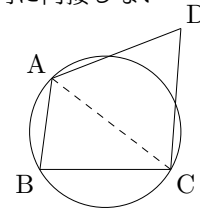
(i) 円に内接しない



(ii) 円に内接する



(iii) 円に内接しない



そこで、四角形が円に内接する条件（共円条件）について考えます。

右図のような四角形 ABCD において、

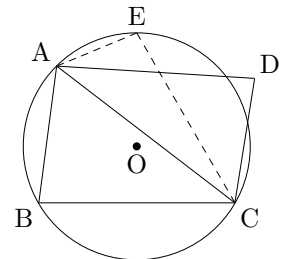
$$\angle B + \angle D = 180^\circ \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

であるとして。また、 $\triangle ABC$ の外接円をかき、これを円 O とします。

さらに、AC に対して B と反対側の円周上に点 E をとります。

このとき、四角形 ABCE は円 O に内接するので、対角の和は 180° になり、

$$\angle B + \angle E = 180^\circ \dots\dots\dots \textcircled{2}$$



①, ②より

$$\angle D = \angle E$$

点 D, E は直線 AC に対して同じ側にあるので、円周角の定理の逆より、4 点 A, C, D, E は同一円周上にあることとなります。このとき、 $\triangle ACE$ の外接円は円 O であるので、点 D は円 O の円周上に存在します。つまり、4 点 A, B, C, D は円 O の円周上にあることになり、四角形 ABCD は円 O に内接することがわかります。

このように、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接します。

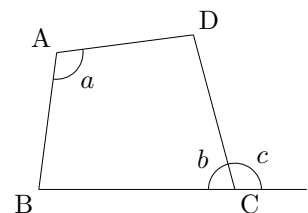
また、1 つの外角がそれと隣り合う内角の対角に等しい場合についても、

右の図のように、

$$\angle a = \angle c, \quad \angle b + \angle c = 180^\circ$$

という関係から、結局

$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$



のようになり、「1 組の対角の和が 180° である四角形」と同じ条件になるので、円に内接します。

以上のことから、内接四角形の性質の逆が成り立ち、共円条件は次のようになります。

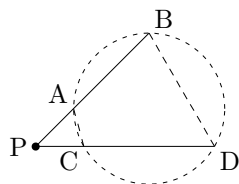
(i) 1 組の対角の和が 180°

(ii) 外角が、それと隣り合う内角の対角に等しい

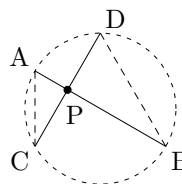
3.3 方べきの定理の逆

次の図のように、2つの線分 AB, CD、またはその延長の交点を P とします。

(i) 線分 AB, CD の延長の交点 P



(ii) 線分 AB, CD の交点 P



このとき、 $PA \times PB = PC \times PD$ であるとすると、 $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において、

$$PA : PD = PC : PB \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、

$$\angle APC = \angle DPB \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle CAP = \angle BDP$$

となります。このことから、(i) は内接四角形の性質の逆、(ii) は円周角の定理の逆により、それぞれ4点 A, B, C, D は同一円周上にあることがわかり、方べきの定理の逆が成り立ちます。