【中３数学】式の計算

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　式の乗法・除法

1.1　単項式と多項式の乗法

□や○、△を単項式であると考えると、多項式は「単項式を和の形で表したもの」であったので、「○ + △」などのようにして表すことができます。すると、「(単項式) × (多項式)」や「(多項式) × (単項式)」は次のような式で表され、それぞれ分配法則を利用することができます。

(i) (単項式) × (多項式)

$$\square \times (\bigcirc + \triangle) = \square \times \bigcirc + \square \times \triangle$$

(ii) (多項式) × (単項式)

$$(\bigcirc + \triangle) \times \square = \bigcirc \times \square + \triangle \times \square$$

そして、分配法則を利用してあらわれた「□ × ○」や「□ × △」は「(単項式) × (単項式)」になるので、それぞれの項を「単項式の乗法」の手順で計算を行います。

【例題 1 − 1】

次の式を計算しなさい。

(1) $-4ax(a-3b)$　　(2) $(4x-6y) \times \dfrac{1}{2}x$

＜解説＞

(1) 分配法則を利用して

$$\begin{aligned} -4ax(a-3b) &= -4ax \times a + (-4ax) \times (-3b) \\ &= -4a^2x + 12abx \end{aligned}$$

(2) 分配法則を利用して

$$\begin{aligned} (4x-6y) \times \frac{1}{2}x &= 4x \times \frac{1}{2}x + (-6y) \times \frac{1}{2}x \\ &= 2x^2 - 3xy \end{aligned}$$

【演習 1 − 1】

次の式を計算しなさい。

(1) $9a\left(3a - \dfrac{2}{3}b\right)$　　(2) $(x+3y) \times (-2xy)$

1.2 単項式と多項式の除法

除法は乗法に直すことができました。そこで、多項式と単項式の除法においても、まず除法を乗法に直すことで、乗法と同じように計算することができます。

【例題1－2】

次の式を計算しなさい。

(1) $(-12xy^2+3xy)\div(-3xy)$　　(2) $(6x^3-15x^2+3x)\div(-3x)$

＜解説＞

(1) 除法を乗法に直して分配法則を利用します。

$$\begin{aligned}(-12xy^2+3xy)\div(-3xy) &= (-12xy^2+3xy)\times\left(-\frac{1}{3xy}\right)\\ &= -12xy^2\times\left(-\frac{1}{3xy}\right)+3xy\times\left(-\frac{1}{3xy}\right)\\ &= 4y-1\end{aligned}$$

(2) 除法を乗法に直して分配法則を利用します。

$$\begin{aligned}(6x^3-15x^2+3x)\div(-3x) &= (6x^3-15x^2+3x)\times\left(-\frac{1}{3x}\right)\\ &= 6x^3\times\left(-\frac{1}{3x}\right)+(-15x^2)\times\left(-\frac{1}{3x}\right)+3x\times\left(-\frac{1}{3x}\right)\\ &= -2x^2+5x-1\end{aligned}$$

【演習1－2】

次の式を計算しなさい。

(1) $(21x^2y^2-14xy^2)\div\left(-\frac{7}{5}xy\right)$　　(2) $(5a^3b-20a^2b^2+15ab^3)\div 5ab$

1.3 多項式の乗法

積の形で書かれた式を計算して、和の形の式に書き表すこと（1 つの多項式で表すこと）をもとの式を**展開する**といいます。つまり、「かっこをはずしてバラバラにする」ことです。

$(a+b)(c+d)$ のような「(多項式) × (多項式)」を展開するには、主に次のような 2 つの方法があります。

(i) まとまりを 1 つのものと考える (ii) かっこの中に含まれるすべての項を分配する

そこで、この 2 つの展開の方法で $(a+b)(c+d)$ を展開してみます。

(i) $a+b$ または $c+d$ をひとまとまりにして展開する。

① $a+b=A$ とすると

$$(a+b)(c+d)=A\times(c+d)$$

という形に変形でき、こうすることで「(単項式) × (多項式)」 の形になります。そこで、分配法則を利用して

$$A\times(c+d)=A\times c+A\times d$$

となります。ここで、A を元に戻してあげると

$$A\times c+A\times d=(a+b)\times c+(a+b)\times d$$

となり、さらに「(多項式) × (単項式)」という形が出てくるので、再度分配法則を用いて

$$\begin{aligned}(a+b)\times c+(a+b)\times d&=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d\\&=ac+bc+ad+bd\end{aligned}$$

となります。

② ①と同じようにして、$c+d=B$ とすると

$$(a+b)(c+d)=(a+b)\times B$$

という形に変形でき、こうすることで「(多項式) × (単項式)」の形になります。よって、分配法則を利用して

$$(a+b)\times B=a\times B+b\times B$$

となります。ここで、B を元に戻してあげると

$$a\times B+b\times B=a\times(c+d)+b\times(c+d)$$

となり、「(単項式) × (多項式)」という形が出てくるので、再度分配法則を用いて

$$\begin{aligned}a\times(c+d)+b\times(c+d)&=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d\\&=ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

となります。

①と②では項の順番が違いますが、加法の交換法則を利用できるので、どちらも同じ答えです。

(ii) (i) の結果から、結局

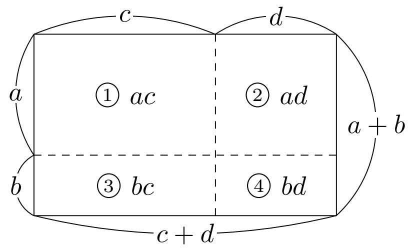
$$(a+b)\ (c+d) = \overset{①}{ac} + \overset{②}{ad} + \underset{③}{bc} + \underset{④}{bd}$$

のように、多項式の各項を順に分配して積を作り、その和を考えればよいことになります。

これは、$(a+b)\times(c+d)$ を

たての長さ：$a+b$　　横の長さ：$c+d$

である長方形の面積であると考えて、右の図のように長方形を 4 つに分割し、それぞれの長方形の面積の和が全体の面積になることから、



$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

になるのだと考えると、イメージがしやすいと思います。

【例題 1 − 3】

次の式を展開しなさい。

(1) $(2x+1)(x+3)$　　　(2) $(3x+5y)(2x-3y)$

＜解説＞

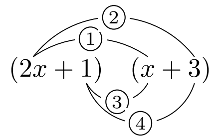
式を展開するには、

(i) まとまりを 1 つのものと考える　　　(ii) かっこの中に含まれるすべての項を分配する

という 2 つの方法がありますが、「かっこの中に含まれるすべての項を分配する」方法が一番楽に計算できるので、そちらに統一して展開するようにしてください。

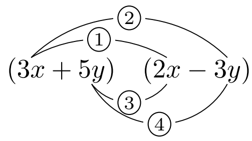
また、同類項はまとめることができるので、その計算を忘れないようにしましょう。

(1) 各項を順に分配して



$$\begin{aligned}(2x+1)(x+3)&=2x\times x+2x\times 3+1\times x+1\times 3\\&=2x^2+6x+x+3\\&=2x^2+7x+3\end{aligned}$$

(2) 各項を順に分配して



$$\begin{aligned}(3x+5y)(2x-3y)&=3x\times 2x+3x\times(-3y)+5y\times 2x+5y\times(-3y)\\&=6x^2+(-9xy)+10xy+(-15y^2)\\&=6x^2+xy-15y^2\end{aligned}$$

【演習 1 − 3】

次の式を展開しなさい。

(1) $(2a+3b)(3a-4b)$　　　(2) $(2x-a)(4x+3a)$

1.4 $(x+a)(x+b)$ の公式

$$(x+a)\quad(x+b) = \overset{\text{①}}{x^2} + \overset{\text{②}}{bx} + \underset{\text{③}}{ax} + \underset{\text{④}}{ab}$$

$(x+a)(x+b)$ を、各項を順に分配する方法で展開すると

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x \times x + x \times b + a \times x + a \times b \\ &= x^2 + bx + ax + ab \\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}$$

となります。こののように、それぞれの多項式に共通な項があるような式の展開では、

$$(\square + \bigcirc) \times (\square + \triangle) = \square^2 + (\bigcirc + \triangle) \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

を公式として利用できます。このとき、

「前の 2 乗、後ろどうし足して前掛ける、後ろどうしの積」

などのように、公式を文章で表し、それを呪文のように唱えながら公式を使う練習をすると、早く公式を習得することができます。

【例題 1 − 4】

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+5)(x+2)$　(2) $(x+5)(x-2)$　(3) $(x-5)(x+2)$　(4) $(x-5)(x-2)$

＜解説＞

(1) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(x+5)(x+2) &= x^2 + (5+2)x + 5 \times 2 \\ &= x^2 + 7x + 10\end{aligned}$$

(2) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(x+5)(x-2) &= x^2 + \{5 + (-2)\}x + 5 \times (-2) \\ &= x^2 + 3x + (-10) \\ &= x^2 + 3x - 10\end{aligned}$$

(3) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(x-5)(x+2) &= x^2 + (-5+2)x + (-5) \times 2 \\ &= x^2 + (-3)x + (-10) \\ &= x^2 - 3x - 10\end{aligned}$$

(4) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(x-5)(x-2) &= x^2 + \{(-5) + (-2)\}x + (-5) \times (-2) \\ &= x^2 + (-7)x + (+10) \\ &= x^2 - 7x + 10\end{aligned}$$

途中の計算過程も詳しく書きましたが、実際の計算では、公式を利用して一発で答えにたどりつくようにしてください。

【演習 1 − 4】

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+1)(x+3)$　(2) $(x+6)(x-2)$　(3) $(x-5)(x+3)$　(4) $(x-9)(x-2)$

1.5　平方公式

$(a+b)^2$ は、

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

と表せます。そこで、$(x+a)(x+b)$ の展開公式

$$(\square + \bigcirc) \times (\square + \triangle) = \square^2 + (\bigcirc + \triangle) \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

に、

$$\square = a, \quad \bigcirc = b, \quad \triangle = b$$

として当てはめると、

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + (b+b) \times a + b \times b \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

となります。このことから、

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

を公式として利用します。

また、$(a-b)^2$ も、

$$(a-b)^2 = \{a + (-b)\}^2$$

と表すことで、$\square = a,\ \bigcirc = -b$ を①の公式に当てはめることができます。すると、

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 + 2 \times a \times (-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

となるので、

$$(\square - \bigcirc)^2 = \square^2 - 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2$$

も新たな公式として利用することができます。

このとき、

「前 2 乗、2 倍の前後（の積）、後ろ 2 乗」

という形の公式になっているので、これを呪文のように唱えながら公式を利用してください。

【例題 1 − 5】

次の式を展開しなさい。

(1) $(3a+2)^2$　　(2) $(2a-3)^2$

＜解説＞

(1) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(3a+2)^2 &= (3a)^2 + 2\times 3a\times 2 + 2^2\\ &= 9a^2 + 12a + 4\end{aligned}$$

(2) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(2a-3)^2 &= (2a)^2 - 2\times 2a\times 3 + 3^2\\ &= 4a^2 - 12a + 9\end{aligned}$$

【演習 1 − 5】

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+5)^2$　　(2) $(2x-1)^2$

1.6　和と差の積

$(a+b)(a-b)$ のように、計算記号の「+」と「−」以外は同じである多項式の積を、「和と差の積」といいます。この式を、展開公式

$$(\square+\bigcirc)\times(\square+\triangle)=\square^2+(\bigcirc+\triangle)\times\square+\bigcirc\times\triangle$$

に、$\square=a,\ \bigcirc=b,\ \triangle=-b$ を当てはめて展開すると

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a^2+\{b+(-b)\}a+b\times(-b)\\&=a^2-b^2\end{aligned}$$

となります。そこで

$$(\square+\bigcirc)\times(\square-\bigcirc)=\square^2-\bigcirc^2$$

のように、和と差の積は平方の差になることを公式として利用します。このとき、

「前どうし（の積)、引く、後ろどうし（の積)」や「前の 2 乗、引く、後ろの 2 乗」

のように、公式を文章にして、この文章を呪文のように唱えながら使うことをお勧めします。

【例題 1 − 6】

次の式を展開しなさい。

(1) $(3x+2)(3x-2)$　　(2) $(-4a+3)(4a+3)$

<解説>

(1) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(3x+2)(3x-2)&=(3x)^2-2^2\\&=9x^2-4\end{aligned}$$

(2) 公式にあてはめて

$$\begin{aligned}(-4a+3)(4a+3)&=(3-4a)(3+4a)\\&=3^2-(4a)^2\\&=9-16a^2\end{aligned}$$

【演習 1 − 6】

次の式を展開しなさい。

(1) $\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}b\right)\left(\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{2}b\right)$　　(2) $(4x+3y)(3y-4x)$

1.7 置き換えによる式の展開

$(a+b+c)^2$ のように、3 つ以上の項を含む多項式を展開するとき、今まで学習した展開公式（乗法公式）を利用することができません。また、分配法則を利用してすべての項を分配して展開することもできますが、それも計算が面倒になります。そこで、共通なまとまりを、ある別の文字に置き換えることで、公式を利用できる形にします。

例えば、$(a+b+c)^2$ という式を展開するとき、「$a+b$」をひとまとまりであると考えて、$a+b=A$ とすると、

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (A+c)^2\\ &= A^2+2Ac+c^2\\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\end{aligned}$$

のようにして、平方公式を利用して展開することができます。

また、一見すると同じでないようなものでも、符号だけが異なるものは、「$-(\quad)$」のような形に変形することで同じ形のものを作ることができます。

① $a+b$ と $-a-b$

$$-a-b=-(a+b)$$

② $a-b$ と $-a+b$

$$-a+b=-(a-b)$$

【例題 1 － 7】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $(x-y-z)(x-y+z)$　　(2) $(2x-3y+1)(2x+3y-1)$

＜解説＞

(1) $x-y=X$ とすると、

$$\begin{aligned}(x-y-z)(x-y+z) &= (X-z)(X+z)\\ &= X^2-z^2\\ &= (x-y)^2-z^2\\ &= x^2-2xy+y^2-z^2\end{aligned}$$

(2) $3y-1=Y$ とすると、

$$\begin{aligned}(2x-3y+1)(2x+3y-1) &= \{2x-(3y-1)\}(2x+3y-1)\\ &= (2x-Y)(2x+Y)\\ &= 4x^2-Y^2\\ &= 4x^2-(3y-1)^2\\ &= 4x^2-(9y^2-6y+1)\\ &= 4x^2-9y^2+6y-1\end{aligned}$$

【演習１－７】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $(x+y-z)(x-y-z)$　　(2) $(x+y-z)(x-y+z)$

1.8　展開と係数

展開したときに、すべての項を求めるのではなく、一部の項の係数を求める問題があります。そのような問題では、展開してすべての項を求めるのではなく、注目している項の係数についてのみ考えることで，計算を簡略化することができます。

【例題 1 − 8】

次の式を展開したときの x^2 の係数を求めなさい。

$$(x^2-2x-1)(x^2+3x+2)$$

＜解説＞

すべての項を分配して展開すると、

$$\begin{aligned}(x^2-2x-1)(x^2+3x+2) &= x^4+3x^3+2x^2-2x^3-6x^2-4x-x^2-3x-2\\ &= x^4+x^3-5x^2-7x-2\end{aligned}$$

となるので、x^2 の係数は -5 となります。

ただ、x^2 を含む項以外のものは、この問題では必要ないので、展開したときに x^2 が出てくる項のみを考えれば、簡略化して答えを求めることができます。

$$(x^2-2x-1)\quad(x^2+3x+2) \longrightarrow \overset{\textcircled{1}}{2x^2}-\overset{\textcircled{2}}{6x^2}-\overset{\textcircled{3}}{x^2}=-5x^2$$

【演習 1 − 8】

次の式を展開したときの x^3 の係数を求めなさい。

$$(1-2x+3x^2)(2+x-x^2)$$

2　因数分解

2.1　素因数分解

1 とその数自身のほかに約数を持たない自然数を**素数**といいます。1 とその数自身だけが約数であるので、素数は「約数を 2 つだけ持つ自然数」ということができます。素数を小さい順に並べると

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \cdots$$

となります。「1」は 1 つしか約数を持たないので素数ではありません。

また、偶数は 2 で割ることができるので、「2」という約数を必ず持ちます。そのため、偶数である素数は「2」しかありません。

次に

$$12 = 3 \times 4$$

のように整数がいくつかの整数の積の形で表されるとき、その 1 つ 1 つの数（ここでは「3」と「4」）を、もとの数の**因数**といい、素数である因数（ここでは「3」）を**素因数**といいます。

さらに「4」は

$$4 = 2 \times 2$$

のように積の形で表すことができるので、

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

のようにして、因数をすべて素数（素因数）で表すことができます。このとき、同じ数の積は累乗の形で表します。

$$12 = 2^2 \times 3$$

このように、自然数を素数の積として表すことを「**素因数分解**する」といいます。

【例題 2 − 1】

次の自然数を素因数分解しなさい。

(1) 132　　　　(2) 315

＜解説＞

素因数分解をするには、小さな素数で順に割っていきます。

(1) 132 は偶数なので「2」で割れ、

$$132 = 2 \times 66$$

と表せます。66 も偶数であるのでさらに「2」で割ることができ

$$132 = 2 \times 2 \times 33$$

となります。33 は奇数であるので「2」で割ることはできません。しかし、「2」の次に小さい素数である「3」では割ることができ

$$132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11$$

とでき、「11」は素数であるので、これですべて素数の積（素因数）で表せたことになります。ただし、同じ数の積は指数を使って累乗の形にし、

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

のように表し、これで素因数分解できたことになります。
しかし、計算過程を書きながら求めるのは面倒です。そこで、割り算をさかさまにしたような形で割り算を順々に繰り返し（このような求め方を「**連除法**」といいます）、外側に出ている数の積を考えると、スムーズに素因数分解を行うことができます。

$$\begin{array}{r|r} 2 & 132 \\ \hline 2 & 66 \\ \hline 3 & 33 \\ \hline & 11 \end{array}$$

(2) 同じようにして

$$\begin{array}{r|r} 3 & 315 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

より

$$315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

【演習 2 − 1】

次の自然数を素因数分解しなさい。

(1) 126　　(2) 588

2.2 共通因数

次のように、1 つの多項式がいくつかの単項式や多項式の積で表されるとき、それぞれの式（ここでは「$x+a$」と「$x+b$」）をもとの多項式の**因数**といいます。

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

そして、多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを、その多項式を**因数分解する**といいます。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

のように、積の形で書かれた式を計算して、和の形の式（1 つの多項式）に書き表すことが式の展開であったので、式の展開の逆の計算が因数分解ということになります。つまり、

$$(x+a)(x+b)\longrightarrow x^2+(a+b)x+ab$$

のように、左から右の変形（いくつかの単項式や多項式の積を 1 つの多項式で表す）が式の展開になり、

$$(x+a)(x+b)\longleftarrow x^2+(a+b)x+ab$$

のように、右から左の変形（1 つの多項式をいくつかの単項式や多項式の積で表す）が因数分解になります。

分配法則

$$\square\times\bigcirc+\square\times\triangle=\square\times(\bigcirc+\triangle)$$

を利用して、それぞれの項に共通な因数（**共通因数**）をくくり出すことにより、因数分解を行うことができます。

【例題 2 − 2】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ma-mb$　　(2) $2x^2y+6xy^2$

＜解説＞

(1) 省略している乗法の記号「×」を用いると

$$ma-mb=m\times a-m\times b$$

のようにして表すことができます。すると、各項にある m が共通な因数であるので、それをくくり出すと

$$\begin{aligned}ma-mb&=m\times a-m\times b\\&=m\times(a-b)\\&=m(a-b)\end{aligned}$$

となり、「$ma-mb$」という 1 つの多項式を、「m」という単項式と「$a-b$」という多項式の積の形で表すことができたので、これで因数分解できたことになります。

(2) 乗法の記号「×」を用いて

$$2x^2y + 6xy^2 = 2 \times x \times x \times y + 6 \times x \times y \times y$$

のように表すことができるので、「x」と「y」が共通の因数です。しかしそれだけではなく、

$$6 = 2 \times 3$$

であるので、さらに、

$$2x^2y + 6xy^2 = 2 \times x \times x \times y + 2 \times 3 \times x \times y \times y$$

のように表すことができ、「2」も共通因数です。つまり、「$2 \times x \times y$」をくくり出して

$$\begin{aligned} 2x^2y + 6xy^2 &= 2 \times x \times x \times y + 2 \times 3 \times x \times y \times y \\ &= 2 \times x \times y \times (x + 3 \times y) \\ &= 2xy(x + 3y) \end{aligned}$$

となり、「$2x^2y + 6xy^2$」という 1 つの多項式を、「$2xy$」という単項式と「$x + 3y$」という多項式の積の形で表すことができたので、これで因数分解できたことになります。

【演習 2 − 2】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 4x$　　(2) $4a^2b - 6ab^2$

2.3 $(x+a)(x+b)$ の公式による因数分解

$(x+a)(x+b)$ という式は、

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

のように展開することができました。因数分解は式の展開の逆の計算になるので、項の数が 3 つであるような式で、

$$\square^2 + (\bigcirc + \triangle) \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

のように、1 つの項が「$\square^2$」と平方の形、別の 1 つの項の係数が「$\bigcirc + \triangle$」と和の形、そして、残りの項が「$\bigcirc \times \triangle$」と積の形に表される式は、

$$\square^2 + (\bigcirc + \triangle) \times \square + \bigcirc \times \triangle = (\square + \bigcirc) \times (\square + \triangle)$$

のようにして因数分解することができます。

【例題 2 − 3】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 8x + 15$　(2) $x^2 - 8x + 15$　(3) $x^2 + 2x - 15$　(4) $x^2 - 2x - 15$

＜解説＞

平方の形になっているものが□にあてはまるので、この例題ではすべての式が

$$\square = x$$

となります。このことから

$$x^2 + (\bigcirc + \triangle)x + \bigcirc \times \triangle = (x + \bigcirc)(x + \triangle)$$

という形で因数分解されることになるので、この式と見比べることにより、○と△を決定します。

(1) 式を見比べると

$$\bigcirc + \triangle = 8 \qquad \bigcirc \times \triangle = 15$$

となるので、「足して 8、掛けて 15」になるような 2 つの数を考えることになります。ここで、足して 8 になるような整数は

$$\cdots, \quad -2+10, \quad -1+9, \quad 0+8, \quad 1+7, \quad 2+6, \quad \cdots$$

のように無数に存在しますが、掛けて 15 になるような整数は

$$1 \times 15, \quad 3 \times 5, \quad (-1) \times (-15), \quad (-3) \times (-5)$$

のたった 4 つしかありません。そのため、○と△の候補を考えるときは必ず積の方から先に考えます。

次に掛けて 15 になる 4 つの数の組について和を考えると

整数の組	積	和
1，15	$1\times 15=15$	$1+15=16$
-1，-15	$(-1)\times(-15)=15$	$(-1)+(-15)=-16$
3，5	$3\times 5=15$	$3+5=8$
-3，-5	$(-3)\times(-5)=15$	$(-3)+(-5)=-8$

となるので、このことから「掛けて 15、足して 8」になるような数は

$$3\times 5=15,\quad 3+5=8$$

という「3」と「5」の組合せになります。よって、

$$\bigcirc=3,\quad \triangle=5 \quad （または、\bigcirc=5,\quad \triangle=3）$$

として

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5) \quad （または、x^2+8x+15=(x+5)(x+3)）$$

と因数分解することができます。

(2) 与えられた式は

$$x^2-8x+15=x^2+(-8)x+15$$

と表すことができるので、

$$\bigcirc+\triangle=-8,\qquad \bigcirc\times\triangle=15$$

となる数の組を探します。

整数の組	積	和
1，15	$1\times 15=15$	$1+15=16$
-1，-15	$(-1)\times(-15)=15$	$(-1)+(-15)=-16$
3，5	$3\times 5=15$	$3+5=8$
-3，-5	$(-3)\times(-5)=15$	$(-3)+(-5)=-8$

より、「掛けて 15、足して -8」になるような数の組合せは「-3」と「-5」になります。よって、

$$\bigcirc=-3,\quad \triangle=-5 \quad （または、\bigcirc=-5,\quad \triangle=-3）$$

として

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5) \quad （または、x^2-8x+15=(x-5)(x-3)）$$

と因数分解することができます。

(3) 与えられた式は

$$x^2+2x-15=x^2+2x+(-15)$$

と表すことができるので、

$$\bigcirc+\triangle=2,\qquad \bigcirc\times\triangle=-15$$

となる数の組を探します。

整数の組	積	和
1，-15	$1 \times (-15) = -15$	$1 + (-15) = -14$
-1，15	$(-1) \times 15 = -15$	$(-1) + 15 = 14$
3，-5	$3 \times (-5) = -15$	$3 + (-5) = -2$
-3，5	$(-3) \times 5 = -15$	$(-3) + 5 = 2$

より、「掛けて -15、足して 2」になるような数の組合せは「-3」と「5」になります。よって、

$$\bigcirc = -3,\quad \triangle = 5 \quad （または、\bigcirc = 5,\quad \triangle = -3）$$

として

$$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5) \quad （または、x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)）$$

と因数分解することができます。

(4) 与えられた式は

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 + (-2)x + (-15)$$

と表すことができるので、

$$\bigcirc + \triangle = -2,\quad \bigcirc \times \triangle = -15$$

となる数の組を探します。

整数の組	積	和
1，-15	$1 \times (-15) = -15$	$1 + (-15) = -14$
-1，15	$(-1) \times 15 = -15$	$(-1) + 15 = 14$
3，-5	$3 \times (-5) = -15$	$3 + (-5) = -2$
-3，5	$(-3) \times 5 = -15$	$(-3) + 5 = 2$

より、「掛けて -15、足して -2」になるような数の組合せは「3」と「-5」になります。よって、

$$\bigcirc = 3,\quad \triangle = -5 \quad （または、\bigcirc = -5,\quad \triangle = 3）$$

として

$$x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5) \quad （または、x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)）$$

と因数分解することができます。

【演習 2 − 3】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 - 6x + 8$　(2) $x^2 + x - 12$　(3) $x^2 - 7x - 8$　(4) $x^2 + 5x + 6$

2.4　平方公式による因数分解

$(a+b)^2$ という式は、平方公式を利用して

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

と展開することができました。因数分解は、式の展開の逆の計算になるので、項の数が 3 つであるような式で、

$$\square^2 + 2\times\square\times\bigcirc + \bigcirc^2, \qquad \square^2 - 2\times\square\times\bigcirc + \bigcirc^2$$

のように、そのうちの 2 つが「$\square^2$」、「$\bigcirc^2$」と平方（2 乗）の形で、残りの 1 つが「$2\times\square\times\bigcirc$」のように表される式は、

$$\square^2 + 2\times\square\times\bigcirc + \bigcirc^2 = (\square+\bigcirc)^2, \qquad \square^2 - 2\times\square\times\bigcirc + \bigcirc^2 = (\square-\bigcirc)^2$$

のように平方公式により、和の平方（または、差の平方）の形に因数分解できます。

因数分解を利用しやすいように、よく出てくる平方数（ある整数を 2 乗した数）の値は覚えておきましょう。

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25$$
$$6^2 = 36, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81, \quad 10^2 = 100$$
$$11^2 = 121, \quad 12^2 = 144, \quad 13^2 = 169, \quad 14^2 = 196, \quad 15^2 = 225$$

【例題 2 − 4】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 20x + 100$　　(2) $4x^2 - 12x + 9$

＜解説＞

(1) 定数項は

$$100 = 10^2$$

と表せ、「x^2」と「10^2」と 2 つ平方の形があるので、平方公式が利用できそうです。さらに、

$$20x = 2\times x\times 10$$

と表せるので、

$$\square = x, \qquad \bigcirc = 10$$

とすることによって

$$x^2 + 20x + 100 = (x+10)^2$$

と因数分解できます。

(2) 2 次の項と定数項はそれぞれ

$$4x^2 = (2x^2) \qquad 9 = 3^2$$

と変形でき、2 つ平方の形があります。また、

$$12x = 2 \times 2x \times 3$$

と表せるので、

$$\square = 2x, \qquad \bigcirc = 3$$

とすることによって

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

と因数分解できます。

【演習 2 − 4】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 25 + 10x$　　(2) $16a^2 + 1 - 8a$

2.5 和と差の積による因数分解

$(a+b)(a-b)$ という式（和と差の積）は

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

のように展開することができました。因数分解は式の展開の逆の計算であるので、項の数が 2 つであるような式で、

$$\square^2-\bigcirc^2$$

のように平方の差の形で表される式は、

$$\square^2-\bigcirc^2=(\square+\bigcirc)(\square-\bigcirc)$$

と、和と差の積の形に因数分解することができます。

【例題 2 − 5】

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-169　　(2) x^2-81y^2

＜解説＞

(1) x^2-169 は

$$x^2-169=x^2-13^2$$

のように平方の差の形で表されるので、

$$\square=x \qquad \bigcirc=13$$

だと考えて

$$x^2-169=(x+13)(x-13)$$

と因数分解できます。

(2) x^2-81y^2 は

$$x^2-81y^2=x^2-(9y)^2$$

のように平方の差の形で表されるので、

$$\square=x \qquad \bigcirc=9y$$

だと考えて

$$x^2-81y^2=(x+9y)(x-9y)$$

と因数分解できます。

【演習 2 − 5】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $0.16x^2-y^2$　　(2) $\dfrac{49}{4}a^2-\dfrac{1}{64}b^2$

2.6 因数分解の手順

因数分解を行うときには、次の手順で行います。

① 共通因数があるかどうかをチェックし、ある場合は共通因数でくくり出す。
② 公式を利用できる場合は、公式を利用して因数分解をする。

式の形によっては①のみであったり、②のみで因数分解をする場合がありますが、必ず、

共通因数のチェック $\longrightarrow$ 公式の利用

という流れで因数分解をするように心がけてください。

【例題 2 − 6】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $4ax^2 - 9a$　　(2) $mx^2 - 5mx + 4m$

＜解説＞

(1) まずは、共通因数である「a」をくくり出します。

$$4ax^2 - 9a = a(4x^2 - 9)$$

かっこの中は

$$4x^2 = (2x)^2, \qquad 9 = 3^2$$

と平方の差の形になっているので、公式を利用して

$$\begin{aligned} a(4x^2 - 9) &= a\{(2x)^2 - 3^2\} \\ &= a(2x + 3)(2a - 3) \end{aligned}$$

と因数分解することができます。

(2) まずは、共通因数である「m」をくくり出します。

$$mx^2 - 5mx + 4m = m(x^2 - 5x + 4)$$

そして、かっこの中は、「足して -5、掛けて 4」となるような 2 数の組を考えると「-1」と「-4」が見つかるので、公式を利用して

$$m(x^2 - 5x + 4) = m(x - 1)(x - 4)$$

と因数分解することができます。

因数分解を行うときには、もうこれ以上因数分解することができないという形まで因数分解するようにしてください。

【演習 2 − 6】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3a^3 - 15a^2 + 18a$　　(2) $4x^2 - 8xy - 12y^2$

2.7 置き換えによる因数分解

複雑な式を因数分解する場合、公式が使えるように、式を変形する必要があります。式の展開を利用して、式を整理し直すことで因数分解できる場合もありますが、共通なまとまりがある場合、展開をするのではなく、ある別の文字に置き換えた方が計算が楽になります。

また、置き換えによる式の展開と同じように、一見すると同じでないようなものでも、符号だけが異なるものは、「$-($ $)$」のような形に変形することで，同じ形のものを作ることができます。

① $a+b$ と $-a-b$

$$-a-b=-(a+b)$$

② $a-b$ と $-a+b$

$$-a+b=-(a-b)$$

【例題 2 − 7】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x-4)^2+2(x-4)-3$　　(2) $(a+2b-1)^2-(2a-b+3)^2$

＜解説＞

(1) $x-4=X$ とすると、

$$\begin{aligned}(x-4)^2+2(x-4)-3&=X^2+2X-3\\&=(X+3)(X-1)\\&=(x-4+3)(x-4-1)\\&=(x-1)(x-5)\end{aligned}$$

式の展開を利用して因数分解することもできますが、計算がやや面倒です。

$$\begin{aligned}(x-4)^2+2(x-4)-3&=x^2-8x+16+2x-8-3\\&=x^2-6x+5\\&=(x-1)(x-5)\end{aligned}$$

(2) $a+2b-1=A,\ 2a-b+3=B$ とすると、

$$\begin{aligned}(a+2b-1)^2-(2a-b+3)^2&=A^2-B^2\\&=(A+B)(A-B)\\&=\{(a+2b-1)+(2a-b+3)\}\{(a+2b-1)-(2a-b+3)\}\\&=(3a+b+2)(-a+3b-4)\end{aligned}$$

【演習 2 − 7】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x+y)^2-2(x+y)-3$　　(2) $(x-2y)(x-2y+5)-14$

2.8 一文字で整理する因数分解

複数の文字を含む式の因数分解を行う場合、公式が簡単に利用できないときがあります。方程式などでもそうですが、一文字であれば簡単に解くことができる方程式も、複数の文字が含まれることで、解くことが困難になります。そこで、代入法や加減法を利用して、文字を減らす（一文字にする）ことで解くことができるようになりました。

因数分解でも同じで、複数の文字が含まれることで難しくなってしまうので、文字を減らすことを考えます。しかし、方程式のようにして文字を減らすことはできないので、「一文字で整理する」ことを行います。「一文字で整理する」とは、ある一文字に着目して、その着目している文字以外は、たとえ文字でも、数と同じようにして扱うことをいいます。このとき重要なのは、「どの文字で整理するか？」ということですが、2 次式よりも 1 次式の方が因数分解しやすいので、「次数の低い文字」で整理していきます。

以上のことから、複数の文字を含む式を因数分解するには、次のような手順で行います。

① 次数の低い一文字で整理する　② 各項を因数分解　③ 式全体を因数分解

【例題 2 − 8】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $xy - 3 + 3x - y$　(2) $a^2 - b^2 + a + b$　(3) $x^2 + xy + 2x - y - 3$

＜解説＞

(1) まずは、含まれている文字それぞれについて次数を確認します。

	xy	-3	$3x$	$-y$	多項式の次数
x に着目	1 次	0 次	1 次	0 次	1 次
y に着目	1 次	0 次	0 次	1 次	1 次

すると、x, y どちらに着目しても 1 次式なので、好きな文字に着目して問題ありません。ここでは、x について整理すると、

$$\begin{aligned} xy - 3 + 3x - y &= (y+3)x - y - 3 \\ &= (y+3)x - (y+3) \\ &= (y+3)(x-1) \end{aligned}$$

(2) まずは、含まれている文字それぞれについて次数を確認します。

	a^2	$-b^2$	a	b	多項式の次数
a に着目	2 次	0 次	1 次	0 次	2 次
b に着目	0 次	2 次	0 次	1 次	2 次

すると、a, b どちらに着目しても 2 次式なので、好きな文字に着目して問題ありません。ここでは、a について整理すると、

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a + b &= a^2 + a - b^2 + b \\ &= a^2 + a - b(b-1) \\ &= (a+b)(a-b+1) \end{aligned}$$

(3) まずは、含まれている文字それぞれについて次数を確認します。

	x^2	xy	$2x$	$-y$	-3	多項式の次数
x に着目	2 次	1 次	1 次	0 次	0 次	2 次
y に着目	0 次	1 次	0 次	1 次	0 次	1 次

x に着目すると 2 次式, y に着目すると 1 次式なので、次数の低い y に着目して整理します。

$$\begin{aligned} x^2+xy+2x-y-3 &= (x-1)y+x^2+2x-3 \\ &= (x-1)y+(x+3)(x-1) \\ &= (x-1)(x+y+3) \end{aligned}$$

【演習 2 − 8】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ab-3a+2b-6$　(2) $x^2-4y^2+12y-9$　(3) $a^2+2ab-2a-2b+1$

3　式の計算の利用

3.1　数の計算への利用

計算が面倒だと感じるような計算問題では、工夫をすることで計算が楽になる場合があります。ここでは、式の展開や因数分解の公式を利用して計算の工夫をします。

【例題 3 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) 103^2　(2) 43×37　(3) $9.75^2 - 0.25^2$

＜解説＞

(1) 103^2 は

$$103^2 = (100+3)^2$$

のように変形することができます。そこで、平方公式

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2$$

に、

$$\square = 100, \qquad \bigcirc = 3$$

をあてはめて

$$\begin{aligned} 103^2 &= (100+3)^2 \\ &= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 \\ &= 10000 + 600 + 9 \\ &= 10609 \end{aligned}$$

のようにして計算することができます。

(2) 43×37 は

$$43 \times 37 = (40+3)(40-3)$$

と変形することができます。そこで、和と差の積の公式

$$(\square + \bigcirc)(\square - \bigcirc) = \square^2 - \bigcirc^2$$

に、

$$\square = 40, \qquad \bigcirc = 3$$

をあてはめて

$$\begin{aligned} 43 \times 37 &= (40+3)(40-3) \\ &= 40^2 - 3^2 \\ &= 1600 - 9 \\ &= 1591 \end{aligned}$$

のようにして計算することができます。

(3) $9.75^2 - 0.25^2$ は「平方の差」の形になっているので、和と差の積の公式

$$\square^2 - \bigcirc^2 = (\square + \bigcirc)(\square - \bigcirc)$$

に、

$$\square = 9.75, \qquad \bigcirc = 0.25$$

をあてはめて

$$\begin{aligned} 9.75^2 - 0.25^2 &= (9.75 + 0.25)(9.75 - 0.25) \\ &= 10 \times 9.5 \\ &= 95 \end{aligned}$$

のようにして計算することができます。

【演習 3 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) 9998^2

(2) $25^2 - 24^2 + 23^2 - 22^2 + 21^2 - 20^2$

3.2　式の値への利用

　式の値を求めるような問題では、そのまま式に代入したときに計算が面倒になる場合、式変形をすることで計算が楽になることが多くあります。

【例題3－2】

$a=10,\ b=4$ のとき $a^2-2ab+b^2$ の値を求めなさい。

＜解説＞

「$a^2-2ab+b^2$」に、そのまま文字の値 $a=10,\ b=4$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} a^2-2ab+b^2 &= 10^2-2\times 10\times 4+4^2 \\ &= 100-80+16 \\ &= 36 \end{aligned}$$

となり、式の値を求めることができますが、「$a^2-2ab+b^2$」は因数分解することができ

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

となるので、この式に $a=10,\ b=4$ を代入すれば

$$\begin{aligned} a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 \\ &= (10-4)^2 \\ &= 6^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

と式の値を求めることもできます。

【演習3－2】

次の式の値を求めなさい。

(1) $x=104$ のとき、$x^2-8x+16$ の値

(2) $x=7.568,\ y=2.432$ のとき、x^2-y^2 の値

(3) $x=\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{4}{3}$ のとき、$(3x+y)(x+2y)-2(x+y)^2$ の値

3.3 整数の性質と式の計算

文字式を利用して整数の性質などを説明する方法についてはすでに学習していますが、ここでは、式の計算（式の展開や因数分解）を利用して整数の性質を説明することを考えます。

【例題 3 − 3】

連続する 3 つの整数の真ん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は、残りの 2 つの数の積に等しくなります。このことを証明しなさい。

＜解説＞

「連続する 3 つの整数」とは、

（例 1）1, 2, 3　（例 2）2, 3, 4　（例 3）5, 6, 7

のように、小さい順（または、大きい順）に並んでいる 3 つの整数の組のことです。この例題では、特定の数についてではなく、一般的な数について考えるので、「連続する 3 つの整数」を文字を使って表します。

連続する 3 つの整数のうち、どの整数に着目するかで証明の仕方が少し異なりますが、「連続する 3 つの整数の真ん中の整数」について書かれているので、この「真ん中の整数」を文字「n」を使って表せば、連続する 3 つの整数は

$$n-1,\ n,\ n+1$$

のように表され、連続する 3 つの整数のうち、一番小さい整数に着目し、その数を文字「n」を使って表せば、連続する 3 つの整数は

$$n,\ n+1,\ n+2$$

のように表されることになります。

次に、「真ん中の整数の 2 乗から 1 ひいた数」は、文字を使ってそれぞれ、

$$n^2-1, \qquad (n+1)^2-1$$

のように表すことができます。この式が残りの 2 つの数の積に等しいことを証明すればいいのですが、この式のままでは残りの 2 つの数の積に等しいかどうかはわかりません。

そこで、「2 つの数の積」と書かれていることから、それぞれの多項式を因数分解して「積」の形を作ることを考えます。

＜模範解答①＞

連続する 3 つの整数を $n-1,\ n,\ n+1$ とすると、真ん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は、

$$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

と表される。このとき、$(n+1)(n-1)$ は残りの 2 つの数の積であるので、連続する 3 つの整数の真ん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は、残りの 2 つの数の積に等しい。

（証明終わり）

<模範解答②>

連続する 3 つの整数を n, $n+1$, $n+2$ とすると、真ん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は、

$$\begin{aligned}(n+1)^2-1 &= n^2+2n+1-1 \\ &= n^2+2n \\ &= n(n+2)\end{aligned}$$

と表される。このとき、$n(n+2)$ は残りの 2 つの数の積であるので、連続する 3 つの整数の真ん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は、残りの 2 つの数の積に等しい。

（証明終わり）

証明問題を苦手とする人は、どのようにして証明をすればよいのか（どのように書けば証明できるのか）がわからない人が多いと思います。そのため、証明問題では、証明のかき方の「形」を覚えることが大切になります。そこで、まずは模範解答を参考に真似しながら証明のかき方の「形」を覚え、他の証明問題でも同じように書ける練習をしてください。

3.4　図形の性質と式の計算

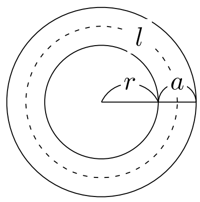
ここでは、文字式を利用して図形の性質を証明しますが、利用した文字式の計算には、式の展開や因数分解を利用するような問題について考えます。

【例題 3 − 4】

半径 r の円形の土地のまわりに、右の図のような幅 a の道がついています。
この道の面積を S、道の真ん中を通る円周の長さを l とすると、

$$S = al$$

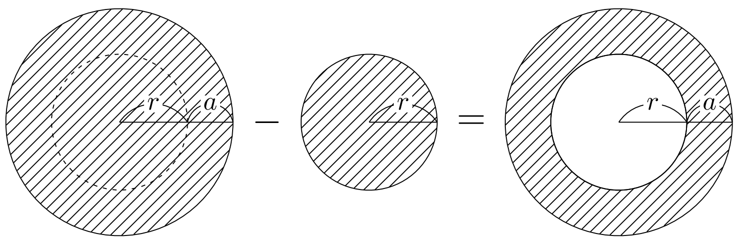
となることを証明しなさい。



＜解説＞

「$S = al$」となることを示すので、S と al がどのような式で表されるのかを考えます。

まず、道の面積 S は、半径 $r + a$ の大きな円の面積から、半径 r の小さな円の面積を除いてあげることで求めることができるので、



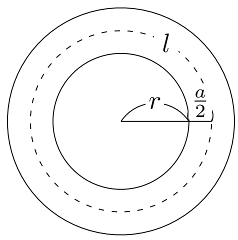
そのことから、道の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \pi(r+a)^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(r^2 + 2ar + a^2) - \pi r^2 \\ &= \pi r^2 + 2\pi ar + \pi a^2 - \pi r^2 \\ &= 2\pi ar + \pi a^2 \end{aligned}$$

のように、円周率 π と文字 $a,\ r$ を用いて表すことができます。

次に、道の真ん中を通る円周の長さ l は、半径 $r + \dfrac{a}{2}$ の円の周の長さになるので、

$$\begin{aligned} l &= 2\pi\left(r + \frac{a}{2}\right) \\ &= 2\pi r + \pi a \end{aligned}$$



となり、このことから al は

$$\begin{aligned} al &= a(2\pi r + \pi a) \\ &= 2\pi ar + \pi a^2 \end{aligned}$$

のように、円周率 π と文字 $a,\ r$ を用いて表すことができます。

＜模範解答＞

道の面積 S は、

$$
\begin{aligned}
S &= \pi(r+a)^2 - \pi r^2 \\
&= \pi(r^2+2ar+a^2) - \pi r^2 \\
&= \pi r^2 + 2\pi ar + \pi a^2 - \pi r^2 \\
&= 2\pi ar + \pi a^2 \ \cdots\cdots \ ①
\end{aligned}
$$

また、道の真ん中を通る円の半径は $r+\dfrac{a}{2}$ となるので、その円周の長さ l は、

$$
\begin{aligned}
l &= 2\pi\left(r+\frac{a}{2}\right) \\
&= 2\pi r + \pi a
\end{aligned}
$$

となる。このことから、

$$
\begin{aligned}
al &= a(2\pi r + \pi a) \\
&= 2\pi ar + \pi a^2 \ \cdots\cdots \ ②
\end{aligned}
$$

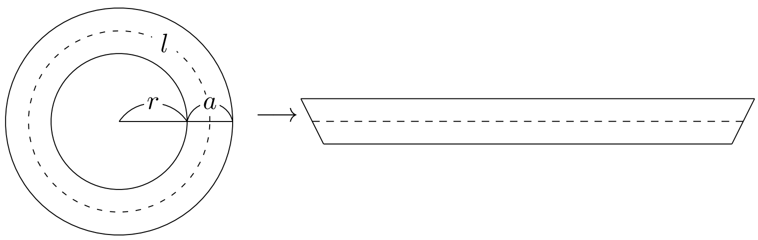
①, ②より

$$S = al$$

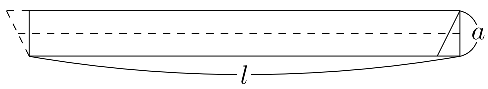
（証明終わり）

「$S = al$」となることを理解するためには、次のように図形を変形させてあげることでも確認できます。

まずは、幅 a の道を、面積は変わらずに形だけ変えることができるようなやわらかいもの（粘土など）で作ります。それを適当なところで切ってまっすぐになるように伸ばしてあげると、次のような台形になります。



そして、さらにこの台形をうまく切ってつなげてあげれば長方形を作ることができます。



すると、この長方形は、縦の長さは道の幅で a となり、横の長さは l になるので、その面積 S は

$$S = al$$

と表されることになります。

このように、幅が一定の図形では、図形の中心線の長さにその図形の幅を掛けてあげることで、面積を求めることができます。