【中２数学】１次関数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　1 次関数　1

1.1　1 次関数 1

1.2　変化の割合 3

1.3　1 次関数のグラフ 5

1.4　直線の傾きと切片 8

1.5　1 次関数のグラフのかき方 10

1.6　1 次関数と変域 12

2　1 次関数の式の求め方　14

2.1　1 次関数のグラフ上の点 14

2.2　傾きと座標（1 次関数の式） 16

2.3　傾きと座標（公式） 18

2.4　2 点の座標（連立方程式） 19

2.5　2 点の座標（公式） 21

2.6　グラフ 23

3　直線の式　25

3.1　平行な 2 直線 25

3.2　直交条件 26

3.3　一直線上にある 3 点 27

4　2 元 1 次方程式とグラフ　29

4.1　2 元 1 次方程式のグラフ 29

4.2　連立方程式とグラフ 33

4.3　3 直線の位置関係 36

5　1 次関数の利用　38

5.1　速さの問題 38

5.2　給水・排水とグラフ 40

5.3　動点とグラフ 43

5.4　座標平面上の最短距離 45

1　1次関数

1.1　1次関数

y が x の関数で、y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の **1 次関数**であるといいます。つまり、a, b を定数として、2 つの変数 x, y の間に

$y = ax + b$　（ただし、$a \fallingdotseq 0$）

という関係があるとき、y は x の 1 次関数になります。

【例題 1 − 1】

次のうち、y が x の 1 次関数であるものはどれですか。

① 底辺 x cm、高さ y cm の三角形の面積が 15 cm^2

② 1000 円持っている人が、50 円切手を x 枚買うときのおつりを y 円

③ 1 辺の長さが x cm である正方形の周の長さを y cm

＜解説＞

y を x の式で表したとき、$y = ax + b\ (a \fallingdotseq 0)$ となれば、y が x の 1 次関数であるということができます。

① 三角形の面積は、

$$(\text{三角形の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

で求めることができるので、この式に文字と数値を当てはめると、

$$15 = \frac{1}{2} \times x \times y$$

これを y について解くと、

$$\frac{1}{2}xy = 15$$
$$y = 15 \times 2 \times \frac{1}{x} = \frac{30}{x}$$

となります。y を x の 1 次式で表すことができていないので、1 次関数ではありません。しかし、この式は

$$y = \frac{a}{x} \quad (a\text{ は定数})$$

という反比例の式になり、y は x に反比例します。

② 50 円切手を x 枚買ったときの代金は、

$50 \times x$（円）

であるので、1000 円を支払ったときのおつりは、

$$(\text{おつり}) = 1000 - 50x$$

と表せます。つまり、

$$y = -50x + 1000$$

と y を x の 1 次式で表すことができるので、y は x の 1 次関数です。

③ 正方形には同じ長さの辺が 4 つあるので、周の長さは、

$$(\text{周の長さ}) = (1\text{ 辺の長さ}) \times 4$$

となります。この式に文字を当てはめると

$$y = 4x$$

と表すことができ、y を x の 1 次式で表すことができるので、y は x の 1 次関数です。ちなみに、この式は

$$y = ax$$

という比例の式になっているので、y は x に比例しています。

以上のことから、y が x の 1 次関数であるものは

②, ③

ということになります。

【演習 1 − 1】

次のうち、y が x の 1 次関数であるものはどれですか。

① 上底 10 cm、下底 20 cm、高さ x cm の台形の面積 y cm^2

② 100 円のノート 1 冊と 1 本 50 円の鉛筆を x 本買ったときの代金 y 円

③ 500 m の道のりを分速 x m で進んだときにかかる時間 y 分

1.2　変化の割合

x の増加量に対する y の増加量の割合を、関数の**変化の割合**といいます。

「割合」とは「何倍か？」ということを表すものであったので、変化の割合、

「x の増加量に対して、y の増加量は何倍か？」

ということを表していることになります。「何倍か？」を求めるためには割り算をするので、変化の割合は

$$(\text{変化の割合}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

で求めることができます。このとき、**増加量**とは、

$$(\text{増加量}) = (\text{変化後の値}) - (\text{変化前の値})$$

によって求められる量になります。

【例題 1 − 2】

次の 1 次関数で、x の値が 1 から 3 まで増加するとき、変化の割合を求めなさい。

(1) $y = 2x - 3$　　(2) $y = -2x + 1$

<解説>

変化の割合を求めるには、x の増加量と y の増加量に関する表を作っておくと求めやすくなります。変化の割合は、「x の増加量」が分母、「y の増加量」が分子になるので、その上下関係と同じになるように、表の下側に x、表の上側に y に関する情報を記入するのがポイントです。

(1) $x = 1, x = 3$ のときの y の値は、$y = 2x - 3$ に代入して、

- $x = 1$ のとき：$y = 2 \times 1 - 3 = -1$
- $x = 3$ のとき：$y = 2 \times 3 - 3 = 3$

このことから、右のような表を作ることができるので、

				増加量
y	-1	$\longrightarrow$	3	$3 - (-1) = 4$
x	1	$\longrightarrow$	3	$3 - 1 = 2$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = 2$$

(2) $x = 1, x = 3$ のときの y の値は、$y = -2x + 1$ に代入して、

- $x = 1$ のとき：$y = -2 \times 1 + 1 = -1$
- $x = 3$ のとき；$y = -2 \times 3 + 1 = -5$

このことから、右のような表を作ることができるので、

				増加量
y	-1	$\longrightarrow$	-5	$-5 - (-1) = -4$
x	1	$\longrightarrow$	3	$3 - 1 = 2$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{-\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = -2$$

この結果から

(1) $y = 2x - 3$ の変化の割合：2　　(2) $y = -2x + 1$ の変化の割合：-2

のように、変化の割合と x の係数が一致しています。つまり、1 次関数 $y = ax + b$ では、x の増加量にかかわらず、常に

$$(\text{変化の割合}) = \frac{y\,\text{の増加量}}{x\,\text{の増加量}} = a \quad (\text{一定})$$

という関係が成り立つことになります。

【演習 1 − 2】

次の (1)〜(3) のとき、y の増加量を求めなさい。

(1) 1 次関数 $y = 3x + 4$ において、x の値が 1 から 6 まで増加したとき。

(2) 1 次関数 $y = -2x + 5$ において、x の値が 1 増加したとき。

(3) 1 次関数 $y = ax - 4$ $(a \fallingdotseq 0)$ において、x の値が 3 増加したとき。

1.3　1 次関数のグラフ

1 次関数 $y = ax + b$ は、$y = ax$ の式から、

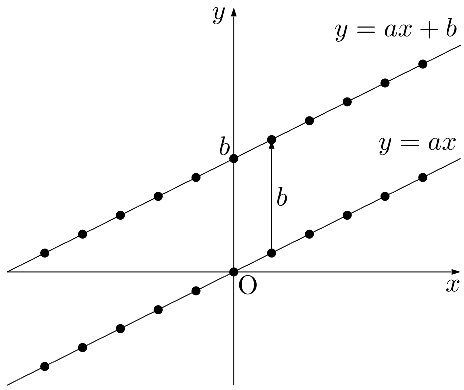
$$y = ax \quad \longrightarrow \quad y = ax + b$$

となることによって、x に対応する y の値が b だけ増えることがわかります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y = ax$	$\cdots$	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	$\cdots$
$y = ax + b$	$\cdots$	$-3a + b$	$-2a + b$	$-a + b$	b	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$\cdots$

このことから、1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、$y = ax$ のグラフを、

y 軸の正の方向に b だけ平行移動したグラフ



だと考えることができます。

$y = ax$ のグラフ（比例のグラフ）は、原点を通る直線でした。原点 $(0,\ 0)$ を y 軸の正の方向に b だけ移動させると、

$$(0,\ 0) \quad \longrightarrow \quad (0,\ b)$$

となるので、1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは

$y = ax$ に平行で、$(0,\ b)$ を通る直線

だということができます。

このように、1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは直線になり、この直線を

直線 $y = ax + b$

といい、$y = ax + b$ を**直線の式**といいます。

【例題 1 − 3】

1 次関数

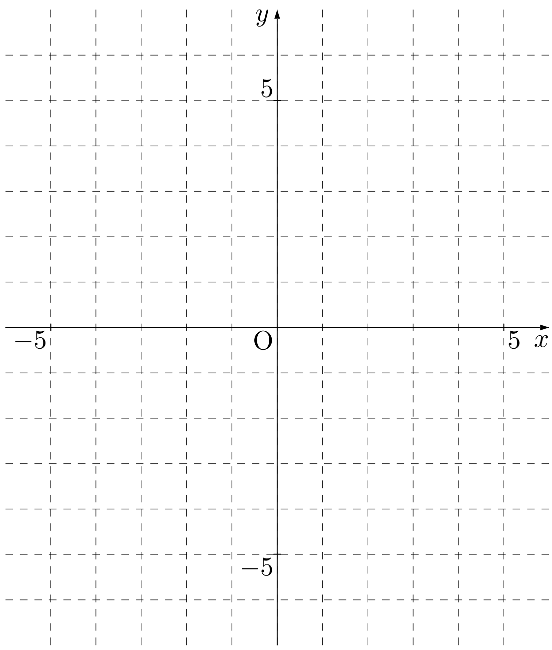
(1) $y=\dfrac{1}{2}x$　　(2) $y=\dfrac{1}{2}x+3$　　(3) $y=\dfrac{1}{2}x-2$

について以下の問いに答えなさい。

(i) 下のような x と y の対応表を完成させなさい。

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$												$\cdots$

(ii) (i) の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶことにより、1 次関数のグラフをかきなさい。

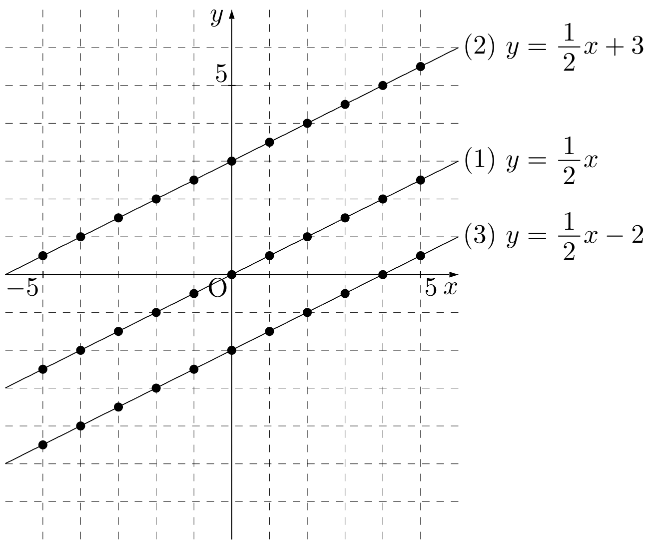


＜解説＞

(i) それぞれの式に $x=-5,\ -4,\ \cdots$ を代入すると、x と y の対応表は次のようになります。

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
(1) $y=\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{5}{2}$	-2	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	$\cdots$
(2) $y=\dfrac{1}{2}x+3$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	3	$\dfrac{7}{2}$	4	$\dfrac{9}{2}$	5	$\dfrac{11}{2}$	$\cdots$
(3) $y=\dfrac{1}{2}x-2$	$\cdots$	$-\dfrac{9}{2}$	-4	$-\dfrac{7}{2}$	-3	$-\dfrac{5}{2}$	-2	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$

(ii) (i) の表から、次の対応する点を図にかき入れなめらかに結ぶと、次のようなグラフをかくことができます。



y
5
-5
O
5 x
(2) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$
(1) $y = \dfrac{1}{2}x$
(3) $y = \dfrac{1}{2}x - 2$

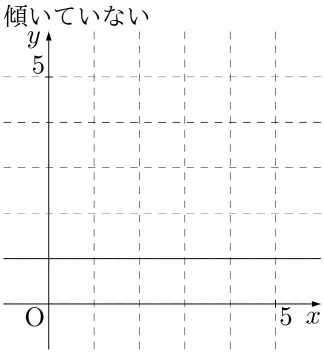
1.4 直線の傾きと切片

直線が x 軸に対してどれくらい傾いているのかを数値にしたものを**傾き**といいます。この「直線がどれくらい傾いているのか」ということを、次のグラフのように、

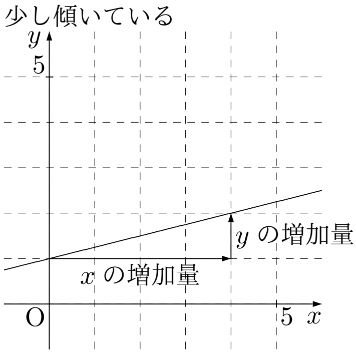
「x の増加量に対して、y がどれくらいの割合で増加するか」

ということを考えることで、直線の傾きを数値で表すことができます。

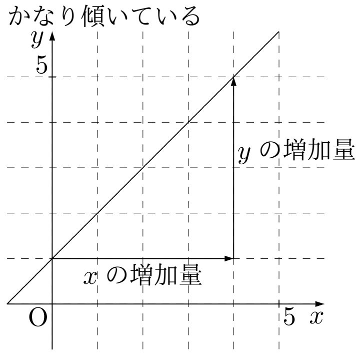
① 傾いていない



② 少し傾いている



③ かなり傾いている



つまり、直線の傾きを、

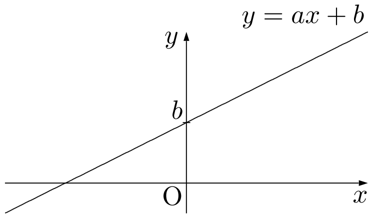
$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$$

という式で表せることになりますが、この式は「変化の割合」と同じ式です。このことから、1 次関数 $y = ax+b$ では、

$$(\text{変化の割合}) = (\text{傾き}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = a$$

という関係が成り立ちます。

また、直線と y 軸との交点の y 座標のことを y **切片**（**切片**）といいます。1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは右のように、点 $(0,\ b)$ を通る直線であったので、1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、



傾き a、切片 b の直線

のように言い表すことがあります。

【例題 1 − 4】

次の直線の傾きと切片をいいなさい。

(1) $y = 2x - 5$　　(2) $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$

＜解説＞

(1) 傾きは x の係数、切片は数の項を読み取って、

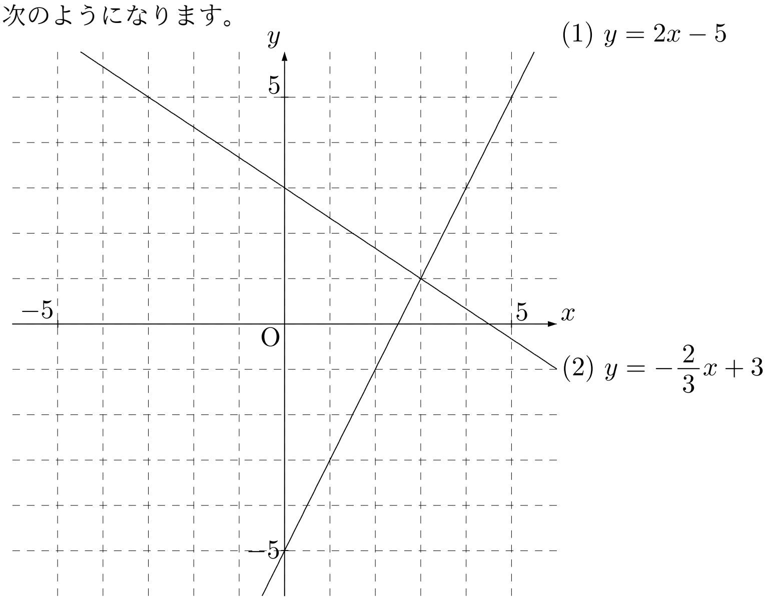
傾き：2　　切片：− 5

切片を「5」と間違えないように気をつけてください。

(2) 傾きは x の係数、切片は数の項を読み取って、

$$\text{傾き}：-\frac{2}{3} \qquad \text{切片}：3$$

このとき、直線のグラフは次のようになります。



【演習 1 − 4】

次の直線の傾きと切片をいいなさい。

(1) $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$　　(2) $y = -0.12x + 0.3$

1.5　1 次関数のグラフのかき方

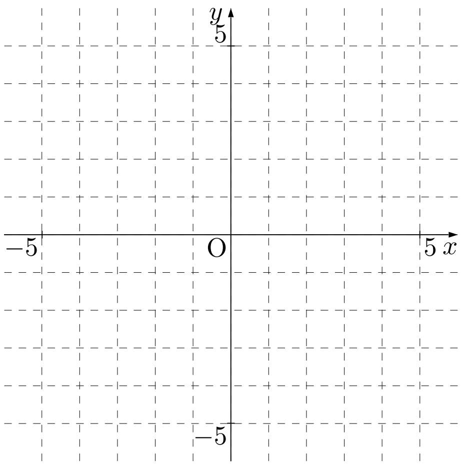
1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、x と y の対応表を作り、対応する点を図にかき入れて、その点をなめらかに結ぶことによりかくことができましたが、そのようにしてグラフをかくのは面倒です。そのため、ここでは効率よく 1 次関数のグラフをかくための方法について学習します。

1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、直線になることを学習しました。直線は、2 点を決めることで 1 つの直線に特定することができます。1 次関数 $y = ax + b$ は、x の係数と定数項を読み取ることで、傾き a、切片 b の直線であることがわかるので、切片から「y 軸との交点」という 1 つの点が求まります。そして、もう 1 つの点は傾きを利用することで求め、その 2 点から 1 次関数のグラフをかくことができます。

【例題 1 − 5】

次の 1 次関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = 2x - 5$　　　(2) $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$



<解説>

(1) 切片が −5 なので、直線 $y = 2x - 5$ と y 軸との交点の y 座標が −5 になります。つまり、直線は点 (0, −5) を通ります。そして、傾きが 2 であるので、

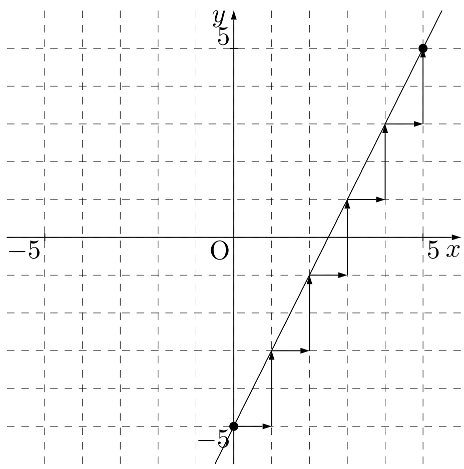
$$(\text{傾き}) = 2 = \frac{2}{1} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

のようにして考えると、

「x が 1 増加すると、y は 2 増加する」

という関係がわかります。また、このように変形しなくても、1 次関数では、

(変化の割合) = (傾き)



であったので、変化の割合の意味を考えることでも、そのようになることが理解できると思います。このことを図で考えると、点 $(0,\ -5)$ を基準にして、そこから x 軸の正の方向に 1、y 軸の正の方向に 2 ずつ進んだところに点をとることができます。そこで、点 $(0,\ -5)$ からなるべく離れた点を選んで、その 2 つの点を結ぶことによりグラフをかくことができます。

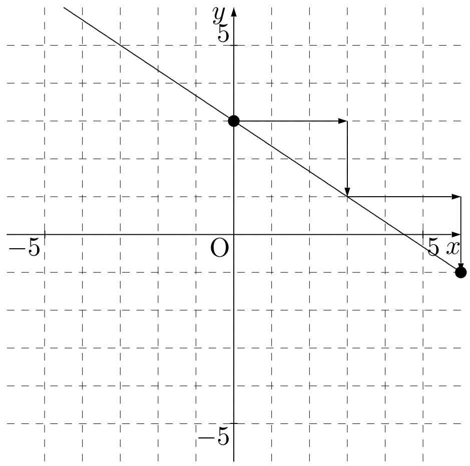
(2) 切片が 3 なので、直線 $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$ と y 軸との交点の y 座標が 3 になります。つまり、直線は点 $(0,\ 3)$ を通ります。そして、傾きが $-\dfrac{2}{3}$ であるので、

$$（傾き）= -\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{y\ の増加量}{x\ の増加量}$$

のようにして考えると、

「x が 3 増加すると、y は -2 増加する」

$\longrightarrow$「x が 3 増加すると、y は 2 減少する」

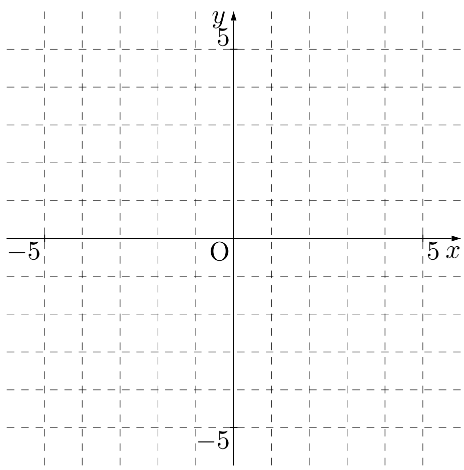


という関係がわかります。このことを図で考えると、点 $(0,\ 3)$ を基準にして、そこから x 軸の正の方向に 3、y 軸の負の方向に 2 ずつ進んだところに点をとることができます。そこで、点 $(0,\ 3)$ からなるべく離れた点を選んで、その 2 つの点を結ぶことによりグラフをかくことができます。

【演習 1 − 5】

次の 1 次関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{2}{5}x - 1$　　　(2) $y = -1.5x + 4$

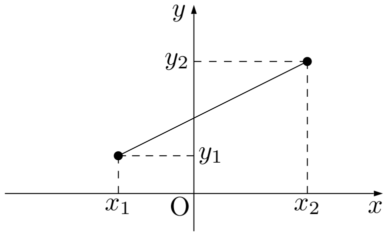


1.6　1 次関数と変域

変数のとる値の範囲のことを**変域**といいます。もう少し簡単に言えば、「変化できる領域」だと思ってもらえばいいと思います。関数について、x の変域から y の変域を求めたり、その逆に、y の変域から x の変域を求めたりするような問題では、関数のグラフをかいたりイメージすることが大切です。

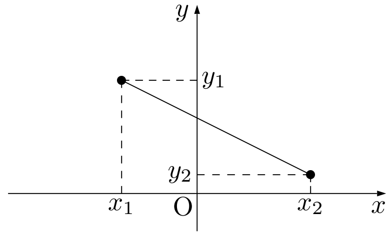
1 次関数 $y = ax + b$ において、x の変域が $x_1 \leqq x \leqq x_2$ となっているとき、1 次関数のグラフは次のような直線（線分）になるので、y の変域は、

(i) $a > 0$ のとき（右上がりのグラフ）



y の変域：$y_1 \leqq y \leqq y_2$

(ii) $a < 0$ のとき（右下がりのグラフ）



y の変域：$y_2 \leqq y \leqq y_1$

となります。

【例題 1 − 6】

次の 1 次関数について、y の変域を求めなさい。

(1) $y = \dfrac{2}{3}x + 3 \quad (-3 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = -2x + 4 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$

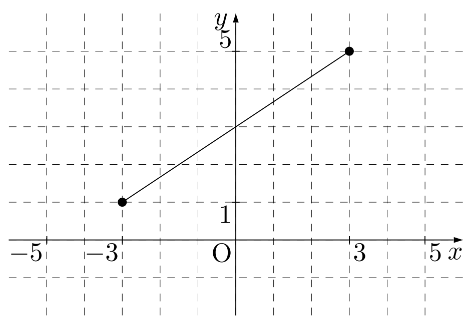
<解説>

(1) $y = \dfrac{2}{3}x + 3$ のグラフは、傾き $\dfrac{2}{3}$、切片 3 の直線です。傾きが $\dfrac{2}{3}$ であることから、x が増えるにつれて y も増えるので、グラフは右上がりの直線になることがわかります。このことから、$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲では、$x = -3$ のとき一番小さくて、$x = 3$ のときに一番大きくなります。よって、

- $x = -3$ のとき：$y = \dfrac{2}{3} \times (-3) + 3 = 1$
- $x = 3$ のとき：$y = \dfrac{2}{3} \times 3 + 3 = 5$

となるので、y の変域は、

$$1 \leqq y \leqq 5$$

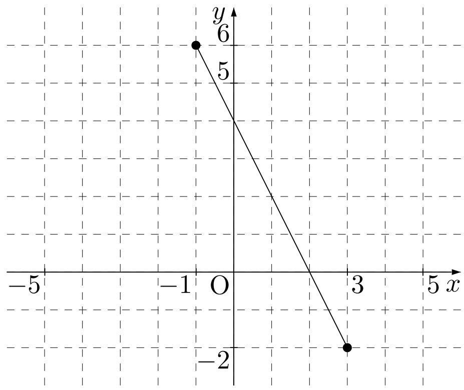


(2) $y=-2x+4$ のグラフは、傾き -2、切片 4 の直線です。傾きが -2 であることから、x が増えるにつれて y は減るので、グラフは右下がりの直線になることがわかります。このことから、$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲では、$x=-1$ のとき一番大きくて、$x=3$ のときに一番小さくなります。よって、

- $x=-1$ のとき：$y=-2\times(-1)+4=6$
- $x=3$ のとき：$y=-2\times 3+4=-2$

となるので、y の変域は、

$$-2 \leqq y \leqq 6$$

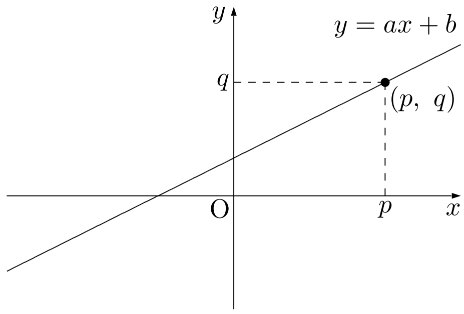


【演習 1 − 6】

1 次関数 $y=ax+b$ $(a>0)$ において、x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき、y の変域が $0 \leqq y \leqq 6$ となります。このとき、a, b の値をそれぞれ求めなさい。

2　1次関数の式の求め方

2.1　1次関数のグラフ上の点



1次関数 $y=ax+b$ のグラフが点 $(p,\ q)$ を通る場合について考えます。

1次関数は「関数」であるので、x の値を決めれば、y の値がただ1つに決まります。そのため、1次関数 $y=ax+b$ において、x の値を $x=p$ と決めれば、そのときの y の値は、

$$y=ap+b$$

のようにしてただ1つに決まることになりますが、このグラフ（直線）が点 $(p,\ q)$ を通るとき、y の値は $y=q$ となるので、

$$q=ap+b$$

という等式が成り立つことになります。つまり、$(x,\ y)=(p,\ q)$ は $y=ax+b$ を成り立たせる $x,\ y$ の値になるので、$y=ax+b$ に $x=p,\ y=q$ を代入したとき、等式が成り立ちます。

【例題2－1】

1次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$ のグラフ上にある点を次から選びなさい。

① $\left(-2,\ \dfrac{7}{2}\right)$　　② $\left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$　　③ $(-3,\ -6)$

＜解説＞

① $x=-2$ を代入すると、

$$y=-\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$$

より、$y=\dfrac{7}{2}$ にはなりません。このことから、直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$ は点 $\left(-2,\ \dfrac{7}{2}\right)$ を通りません。

② $x=4$ を代入すると、

$$y=-\frac{1}{2}\times 4+\frac{9}{2}=\frac{5}{2}$$

より、直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$ は点 $\left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$ を通ります。

③ $x=-3$ を代入すると、

$$y=-\frac{1}{2}\times(-3)+\frac{9}{2}=6$$

より、$y=-6$ にはなりません。このことから、直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$ は

$$(-3,\ -6)$$

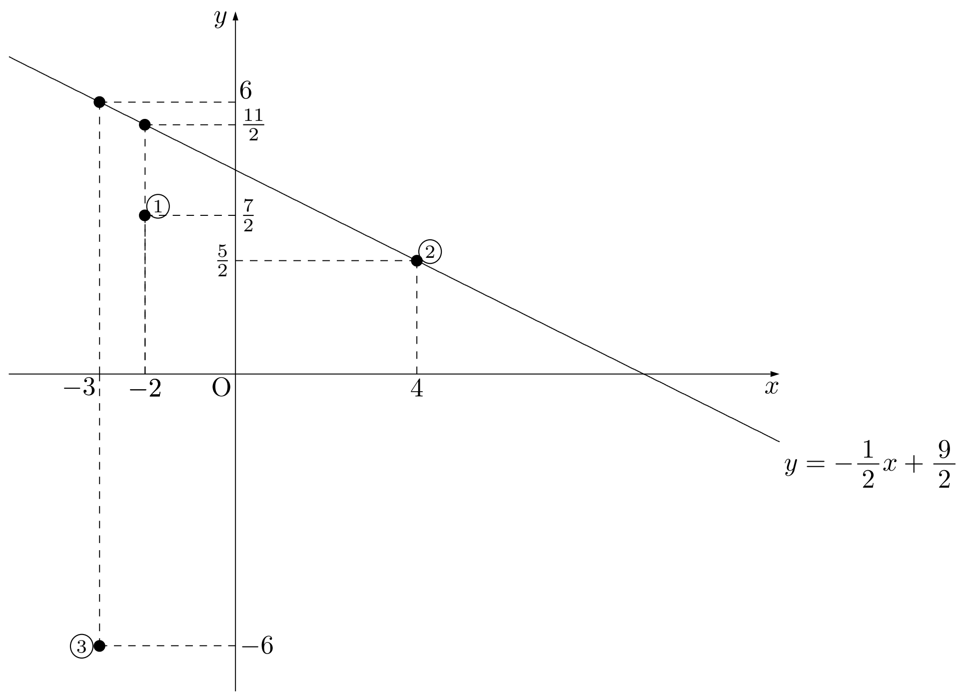
を通りません。

以上の結果から、1 次関数 $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$ のグラフ上にある点は

② $\left(4,\ \dfrac{5}{2}\right)$

になります。

問題を解くときにグラフをかく必要はありませんが、グラフを見れば、どの点がグラフ上にあるかは明らかです。



【演習 2 − 1】

1 次関数 $y = -2x + 3$ のグラフにおいて、次の問いに答えなさい。

(1) x 座標が 4 のときの y 座標を求めなさい。　(2) y 座標が $\dfrac{7}{5}$ のときの x 座標を求めなさい。

2.2 傾きと座標（1 次関数の式）

a, b を定数としたとき、1 次関数の式は $y = ax + b$ という形で表されることを学習しました。そのため、この定数 a と b の値を決めることができれば、1 次関数の式を求めることができます。

「傾き」と「座標」という 2 つの条件が与えられたときでは、次の手順で a と b の値を決めることができ、そのことから 1 次関数の式を求めることができます。

(i) 傾き（変化の割合）の条件から a を求める。
(ii) 通る点の条件から b を求める。

【例題 2 − 2】

次の条件をみたす 1 次関数の式を求めなさい。
(1) 点 (1, 2) を通り、傾き -3 の直線。
(2) $x = -6$ のとき $y = 5$ であり、x の値が 3 ずつ増加すると y の値は 2 ずつ減少する直線。

＜解説＞

1 次関数の式 $y = ax + b$ （a, b は定数）をもとにして考えます。

(1) 傾き -3 の直線であるので、$a = -3$、つまり、1 次関数の式を

$$y = -3x + b \ \cdots\cdots \ ①$$

という形で表すことができます。そして、この直線が点 (1, 2) を通るとき、①に $x = 1, y = 2$ を代入しても等式が成り立つので、

$$\begin{aligned} -3 \times 1 + b &= 2 \\ -3 + b &= 2 \\ b &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

これを①に代入すれば、求める 1 次関数の式は

$$y = -3x + 5$$

(2) 「x の値が 3 ずつ増加すると y の値は 2 ずつ減少する」ので、

「x の増加量が 3 のとき、y の増加量が -2」

であることになります。このことから

$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{-2}{3}$$

となるので、$a = -\dfrac{2}{3}$、つまり、1 次関数の式を、

$$y = -\frac{2}{3}x + b \ \cdots\cdots \ ②$$

という形で表すことができます。そして、$x=-6$ のとき $y=5$ になるので、②に $x=-6,\ y=5$ を代入して、

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\cancel{3}^{1}}\times(-\cancel{6}^{2})+b&=5\\4+b&=5\\b&=5-4=1\end{aligned}$$

これを②に代入すれば、求める 1 次関数の式は、

$$y=-\frac{2}{3}x+1$$

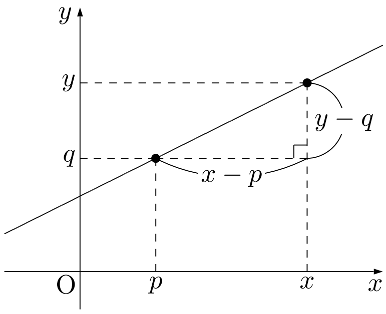
【演習 2 − 2】

次の条件をみたす 1 次関数の式を求めなさい。

(1) グラフが点 $(1,\ -1)$ を通り、傾き $\dfrac{3}{4}$ の直線

(2) 変化の割合が $-\dfrac{1}{2}$ で、$x=-2$ のとき $y=4$

2.3　傾きと座標（公式）



右図のような、点 $(p,\ q)$ を通り傾き a の直線について考えます。このとき、点 $(p,\ q)$ と異なる直線上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると、直線の傾きが a であることから、

- 直線の傾き：$a = \dfrac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \dfrac{y-q}{x-p}$

という関係が成り立つので、

$$\begin{aligned}\frac{y-q}{x-p} &= a\\ y-q &= a(x-p)\\ y &= a(x-p)+q\end{aligned}$$

という公式を導くことができます。

【例題 2 − 3】

次の条件をみたす 1 次関数の式を求めなさい。
(1) 点 (1, 2) を通り、傾き −3 の直線。
(2) $x=-6$ のとき $y=5$ であり、x の値が 3 ずつ増加すると y の値は 2 ずつ減少する直線。

＜解説＞

(1) 公式から、

$$\begin{aligned}y &= -3(x-1)+2\\ &= -3x+3+2 = -3x+5\end{aligned}$$

(2) x の増加量が 3 のとき、y の増加量は −2 であるので、直線の傾きは、

$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

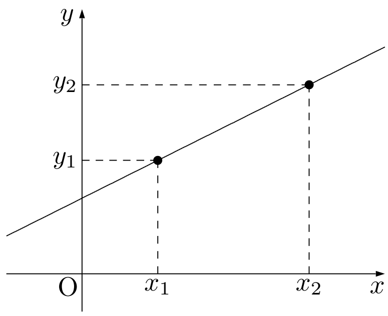
このことから、求める 1 次関数の式は、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{2}{3}\{x-(-6)\}+5\\ &= -\frac{2}{3}x-4+5 = -\frac{2}{3}x+1\end{aligned}$$

【演習 2 − 3】

次の条件をみたす 1 次関数の式を求めなさい。
(1) グラフが点 (1, −1) を通り、傾き $\dfrac{3}{4}$ の直線
(2) 変化の割合が $-\dfrac{1}{2}$ で、$x=-2$ のとき $y=4$

2.4　2 点の座標（連立方程式）



ここでは、右図のような 2 点を通る直線の式の求め方について考えます。

直線上の点は、関数の式を成り立たせるものであるので、通る点の座標を 1 次関数の式に代入したとき、等式が成り立ちます。そこで、1 次関数の式を $y = ax + b$（a, b は定数）としたとき、次の手順で a, b の値が決定し、1 次関数の式を求めることができます。

(i) 1 次関数の式 $y = ax + b$ に、2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ の座標を代入する。

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

このとき、求める a, b が左辺にあったほうが都合がいいので、左辺と右辺を入れ替えて、

$$ax + b = y$$

に 2 点の座標を代入していきます。

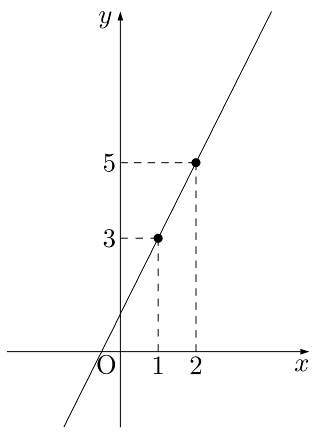
(ii) 連立方程式を解いて、a, b の値を求める。
2 つの方程式には b が共通に存在するので、代入法や加減法で 2 つの方程式から b を消去することで、連立方程式を解くことができます。

【例題 2 − 4】

次の条件をみたす 1 次関数の式を求めなさい。
(1) 2 点 $(1,\ 3), (2,\ 5)$ を通る直線。
(2) $x = -3$ のとき $y = -3$ で、$x = 6$ のとき $y = 3$ になる直線。

＜解説＞

1 次関数の式を $y = ax + b$ として、2 点の座標を代入していきます。



(1) 点 $(1,\ 3)$ を通るので、$y = ax + b$ に $x = 1$, $y = 3$ を代入して、

$$a \times 1 + b = 3$$
$$a + b = 3 \quad \cdots\cdots ①$$

また、点 $(2,\ 5)$ も通るので、$y = ax + b$ に $x = 2$, $y = 5$ を代入して

$$a \times 2 + b = 5$$
$$2a + b = 5 \quad \cdots\cdots ②$$

となります。よって、② − ① より、

$$\begin{array}{rrcrcl} & 2a & + & b & = & 5 \\ -) & a & + & b & = & 3 \\ \hline & a & & & = & 2 \end{array}$$

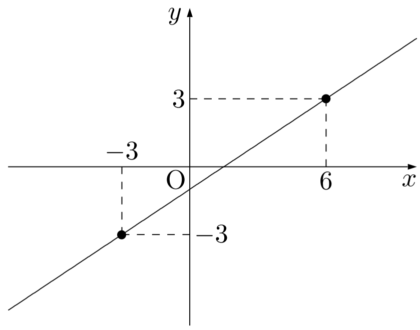
これを①に代入して、

$$
\begin{aligned}
2 + b &= 3 \\
b &= 3 - 2 = 1
\end{aligned}
$$

となるので、求める 1 次関数の式は

$$y = 2x + 1$$

(2) $x = -3$ のとき $y = -3$ になるので、$y = ax + b$ に $x = -3$, $y = -3$ を代入して、



$$
\begin{aligned}
a \times (-3) + b &= -3 \\
-3a + b &= -3 \\
3a - b &= 3 \quad \cdots\cdots\ ③
\end{aligned}
$$

また、$x = 6$ のとき $y = 3$ であるので、$y = ax + b$ に $x = 6$, $y = 3$ を代入して

$$
\begin{aligned}
a \times 6 + b &= 3 \\
6a + b &= 3 \quad \cdots\cdots\ ④
\end{aligned}
$$

となります。よって、④ + ③ より、

$$
\begin{array}{rrcrcr}
 & 6a & + & b & = & 3 \\
+) & 3a & - & b & = & 3 \\
\hline
 & 9a & & & = & 6
\end{array}
$$

この式から、

$$
\begin{aligned}
9a &= 6 \\
a &= \cancel{6}^{2} \times \frac{1}{\cancel{9}^{3}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

これを④に代入して、

$$
\begin{aligned}
\cancel{6}^{2} \times \frac{2}{\cancel{3}^{1}} + b &= 3 \\
4 + b &= 3 \\
b &= 3 - 4 = -1
\end{aligned}
$$

となるので、求める 1 次関数の式は、

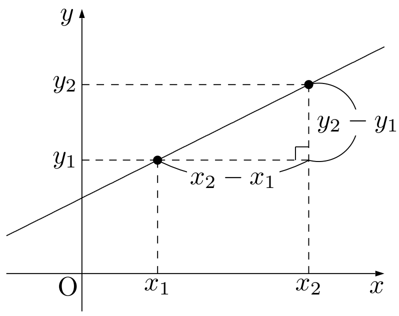
$$y = \frac{2}{3}x - 1$$

【演習 2 − 4】

次の 2 点を通る直線の式を求めなさい。

(1) $(-2,\ 4)$, $(4,\ 1)$　　(2) $(-4,\ 3)$, $(2,\ -3)$　　(3) $(-3,\ -4)$, $(1,\ -1)$

2.5　2点の座標（公式）



右図のような2点を通る直線の式を求めるとき、連立方程式を利用できましたが、通る2点の座標がわかると、そのことから傾きを求めることができます。つまり、傾きと通る点の座標がわかることになるので、次の手順で1次関数の式を求めることができます。

(ｉ) 通る2点の座標から傾きを求める。

$$\text{傾き}：a = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(ii) (i) で求めた傾きと通る点の座標から、直線の式を求める公式を利用する。

① $(x_1,\ y_1)$ を通り、傾き a の直線の式

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_1) + y_1 \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

② $(x_2,\ y_2)$ を通り、傾き a の直線の式

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_2) + y_2 \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2 \end{aligned}$$

【例題2－5】

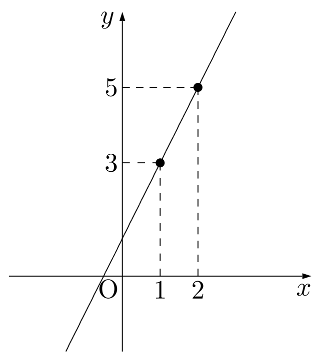
次の条件をみたす1次関数の式を求めなさい。

(1) 2点 $(1,\ 3), (2,\ 5)$ を通る直線。

(2) $x = -3$ のとき $y = -3$ で、$x = 6$ のとき $y = 3$ になる直線。

<解説>

(1) 直線の傾きは、

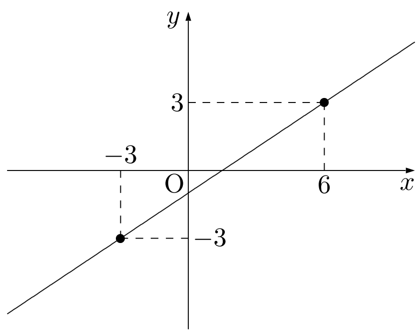


$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

点 $(1,\ 3)$ を通り、傾き2の直線が求める1次関数の式になるので、

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 1) + 3 \\ &= 2x - 2 + 3 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

(2) 直線の傾きは、



$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{3-(-3)}{6-(-3)} = \frac{2}{3}$$

点 $(-3,\ -3)$ を通り、傾き $\frac{2}{3}$ の直線が求める1次関数の式になるので、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}\{x - (-3)\} + (-3) \\ &= \frac{2}{3}x + 2 - 3 \\ &= \frac{2}{3}x - 1 \end{aligned}$$

【演習 2 − 5】

次の 2 点を通る直線の式を求めなさい。

(1) $(-2,\ 4), (4,\ 1)$　(2) $(-4,\ 3), (2,\ -3)$　(3) $(-3,\ -4), (1,\ -1)$

2.6 グラフ

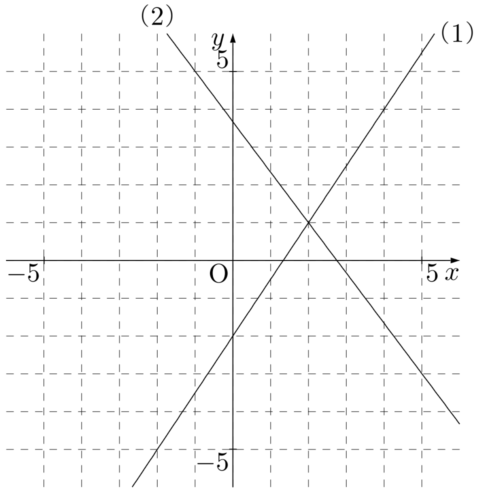
1 次関数のグラフは直線になるので、グラフが直線になっていると、1 次関数のグラフであると判断できます。1 次関数の式は、

① 直線の傾きと通る点の座標　　② 直線の通る 2 点の座標

がわかれば求めることができるので、そのいずれかをグラフから読み取ることになります。しかし、グラフから直線の傾きを読み取るためには、直線の通る 2 点の座標が必要になるので、グラフから読み取りやすい直線の通る適当な 2 点を選び、1 次関数の式を求めることになります。

【例題 2 − 6】

下の図の直線 (1), (2) は、それぞれある 1 次関数のグラフになります。これらの関数の式を求めなさい。



＜解説＞

(1) 直線と y 軸の交点は、図から $(0,\ -2)$ であることがわかるので、このことから切片は、

切片：− 2

また、直線の通るもう 1 つの点として、y 軸との交点に近い $(2,\ 1)$ という点が見つかります。この 2 点の関係から、

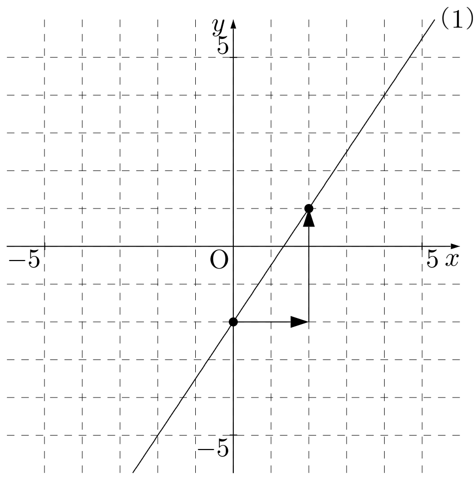
x が 2 増えると、y が 3 増える

つまり、

x の増加量が 2 のとき、y の増加量が 3

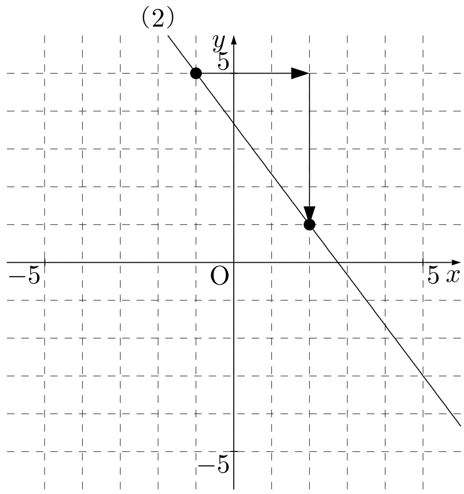
であることがわかるので、

$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{3}{2}$$



となり、傾きと切片が特定できたので、求める 1 次関数の式は、

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$



(2) 読み取りやすい直線の通る 2 点の座標として、ここでは右図のような 2 点 $(-1,\ 5)$, $(2,\ 1)$ で考えます。自分の読み取りやすい 2 点でかまいませんが、なるべく 2 つの点が近いものにすると、計算がしやすいと思います。
すると、その 2 点から

x が 3 増えると、y が 4 減る

つまり、

x の増加量が 3 のとき、y の増加量が -4

であることがわかるので、

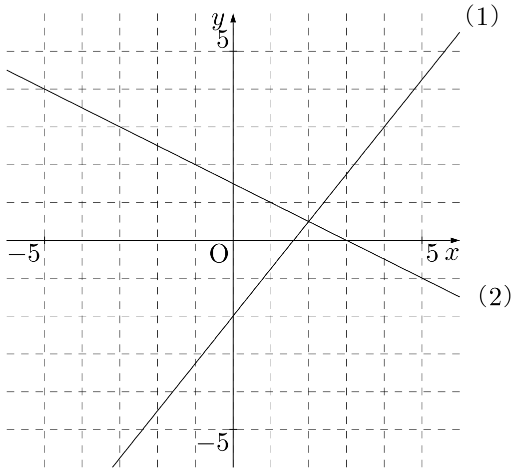
$$(\text{傾き}) = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{-4}{3} \quad (= a)$$

このことから、求める 1 次関数の式は、点 $(2,\ 1)$ を通り、傾き $-\frac{4}{3}$ の直線の式になるので、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}(x-2)+1 \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} + 1 \\ &= -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

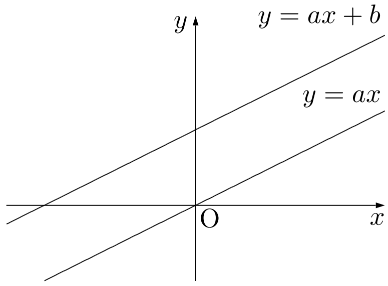
【演習 2 − 6】

下の図の直線 (1), (2) は、それぞれある 1 次関数のグラフになります。これらの関数の式を求めなさい。



3　直線の式

3.1　平行な 2 直線



右の図のように、1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、$y = ax$ のグラフを、「y 軸の正の方向に b だけ平行移動したグラフ」になりました。このことからもわかるように、傾きが等しい 2 つの直線は**平行**になります。

また、2 直線が平行であるときには、2 つの直線の傾きは等しくなります。

【例題 3 − 1】

次の 1 次関数のグラフについて、$y = \frac{1}{4}x - 2$ のグラフと平行なものをすべて選んで番号をかきなさい。

① $y = \frac{-x-2}{4}$　　② $y = 3 + \frac{1}{4}x$　　③ $y = 0.25x$　　④ $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

＜解説＞

1 次関数 $y = \frac{1}{4}x - 2$ のグラフは、x の係数を読み取ることで、傾き $\frac{1}{4}$ の直線であることがわかります。傾きが等しい 2 直線は平行になるので、傾きが $\frac{1}{4}$ になるものを選べばよいことになります。それぞれの直線の傾きは、x の係数を読み取ることで、

① $y = \frac{-x-2}{4} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ より、

傾き：$-\frac{1}{4}$

② $y = 3 + \frac{1}{4}x$ より、

傾き：$\frac{1}{4}$

③ $y = 0.25x = \frac{1}{4}x$ より、

傾き：$\frac{1}{4}$

④ $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$ より、

傾き：$-\frac{1}{4}$

となるので、平行な 1 次関数のグラフは、

②，③

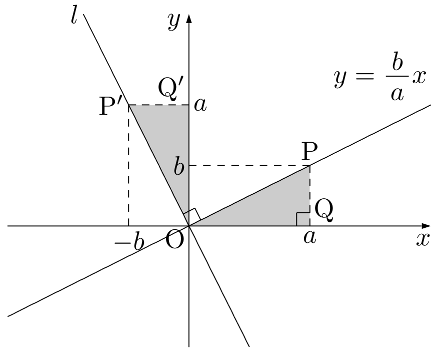
【演習 3 − 1】

次の条件を満たす直線の式を求めなさい。

(1) $y = -3x + 1$ に平行で、y 切片が -2　　(2) 直線 $y = 2x - 1$ に平行で、点 $(3,\ 12)$ を通る。

3.2 直交条件

右の図のように、原点 O を通る傾き $\dfrac{b}{a}$ の直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ （ただし、$a \fallingdotseq 0$）と、この直線に垂直な直線 l があります。また、直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとり、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とします。



直線 l は、直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ を原点を中心に反時計回り（左回り）に 90 度回転させたものだと考えることができるので、同じようにして △POQ を原点を中心に反時計回り（左回り）に 90 度回転させます。すると、点 P は直線 l 上に移り点 P′、点 Q は y 軸上に移り点 Q′ となります。このとき、△POQ と △P′OQ′ はぴったり重なる（合同な）図形であるので、P′, Q′ それぞれの座標は

$$\mathrm{P'}(-b,\ a), \qquad \mathrm{Q'}(0,\ a)$$

と表すことができます。

このことから、直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ となり、ある直線に垂直に交わる直線の傾きは、「分子・分母と符号が逆になる」という関係が成り立ちます。つまり、

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

より、2 直線の傾きを m, n とすると、2 直線が直交（垂直に交わる）しているとき、

$$mn = -1$$

という関係が成り立つことになります。

【例題 3 − 2】

次の直線と垂直になる直線の傾きを求めなさい。

(1) $y=2x-5$　　(2) $y=-\dfrac{2}{3}x+3$　　(3) $y=3.5-0.25x$

＜解説＞

それぞれの直線の傾きは、x の係数を読み取って、

(1) 傾き：2　　(2) 傾き：$-\dfrac{2}{3}$　　(3) 傾き：$-0.25\ \left(=-\dfrac{1}{4}\right)$

それぞれの直線と垂直な直線の傾きは、分子・分母と符号を逆にしたものになるので、その傾きは、

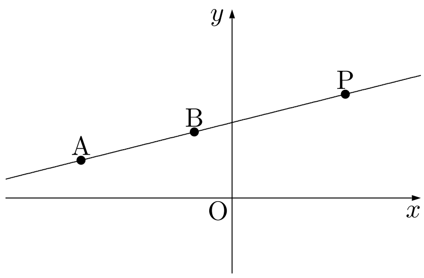
(1) 傾き：$-\dfrac{1}{2}$　　(2) 傾き：$\dfrac{3}{2}$　　(3) 傾き：4

【演習 3 − 2】

次の条件を満たす直線の式を求めなさい。

(1) $y=-3x+1$ に垂直で、y 切片が -2　　(2) 直線 $y=2x-1$ に垂直で、点 $(3,\ 12)$ を通る。

3.3 一直線上にある 3 点



2 点が決まると、その 2 点を通る直線を 1 本だけかくことができます。つまり、2 点が決まると直線はただ 1 つに決まります。

右の図のように 2 点 A, B があるとき、その 2 点 A, B を通る直線はただ 1 つだけ存在します。そのため、3 点 A, B, P が一直線上にあるためには、2 点 A, B を通る直線上に点 P があればよいことになります。

また、直線の傾きと通る 1 点がわかるとき、直線の式を求めることができました。つまり、直線の傾きと通る 1 点が同じであれば、同じ直線の式になり、そのグラフも同じになります。直線 AB と AP は点 A が同じであるので、2 つの直線の傾きが等しければ同じ直線になります。2 つの直線が同じであれば、3 点 A, B, P は一直線上に並んでいることになります。

このことから、3 点が 1 直線上にある場合、次のいずれかの条件が成り立てばよいことになります。

(ｉ) 2 点を通る直線上にもう 1 点もある
(ii) 異なる 2 点を通る 2 つの直線 (AB, AP, BP) が同じ直線になる

【例題 3 − 3】

3 点 $(-5,\ -9)$, $(p,\ 3)$, $(5,\ 11)$ が一直線上にあるとき、p の値を求めなさい。

＜解法 1 ＞

2 点 $(-5,\ -9)$, $(5,\ 11)$ を通る直線の傾きは、

$$(\text{傾き}) = \frac{11-(-9)}{5-(-5)} = \frac{20}{10} = 2$$

となるので、直線の式は、

$$\begin{aligned} y &= 2(x-5)+11 \\ &= 2x-10+11 = 2x+1 \end{aligned}$$

この直線上に点 $(p,\ 3)$ があればよいので、

$$\begin{aligned} 2p+1 &= 3 \\ 2p &= 3-1 = 2 \\ p &= 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

＜解法 2 ＞

3 点が一直線上にあるとき、2 点 $(-5\ \ -9)$, $(5,\ 11)$ を通る直線と、2 点 $(p,\ 3)$, $(5,\ 11)$ を通る直線の傾き

は等しいので、

$$
\begin{aligned}
\frac{11-(-9)}{5-(-5)} &= \frac{3-11}{p-5} \\
\frac{20}{10} &= \frac{-8}{p-5} \\
2(p-5) &= -8 \\
p-5 &= -8\times\frac{1}{2} = -4 \\
p &= -4+5 = 1
\end{aligned}
$$

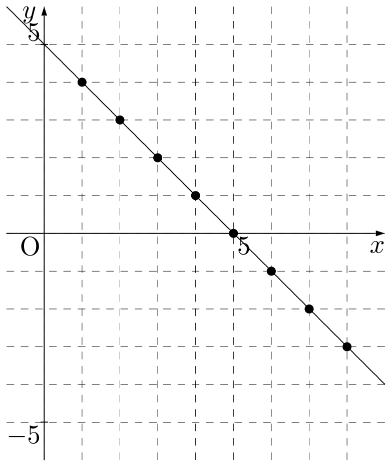
【例題 3 − 3】

3 点 $(-2,\ 4)$, $(4,\ 1)$, $(k,\ k+9)$ が一直線上にあるとき、k の値を求めなさい。

4　2元1次方程式とグラフ

2 元 1 次方程式 $x+y=5$ を満たす $x,\ y$ の組は、次のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3



この x と y の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を図に表してみると右図のようになり、$x,\ y$ の組をもっと細かく、

$$(0.1,\ 4.9),\ (0.2,\ 4.8),\ (0.3,\ 4.7),\ \cdots$$

のようにして考えてくと、その x と y の組を座標とする点を図に表したとき、それらの点が集まって、図のような直線に近づきます。

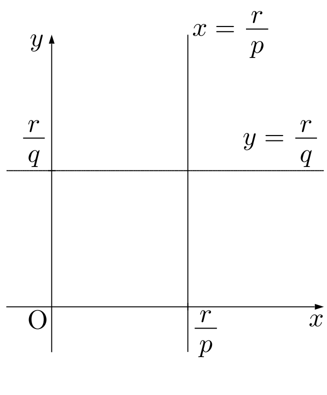
このようにして、2 元 1 次方程式の解となる点 $(x,\ y)$ の全体は、1 次関数のグラフと一致し、この直線を**方程式のグラフ**といいます。

4.1　2元1次方程式のグラフ

$p,\ q,\ r$ を定数とするとき、2 元 1 次方程式 $px+qy=r$ （ただし、$q \fallingdotseq 0$）を y について解くと、

$$\begin{aligned}
px+qy&=r \ \cdots\cdots\ ① \\
qy&=-px+r \\
y&=(-px+r)\times\frac{1}{q} \\
&=-px\times\frac{1}{q}+r\times\frac{1}{q} \\
&=-\frac{p}{q}x+\frac{r}{q}\ \ \cdots\cdots\ ②
\end{aligned}$$

と変形でき、$-\dfrac{p}{q}=a,\ \dfrac{r}{q}=b$ とすると、②の式は、$y=ax+b$ と表すことができます。つまり、2 元 1 次方程式を y について解くと、1 次関数 $y=ax+b$ の形に変形することができるので、$px+qy=r\ \ (q \fallingdotseq 0)$ のグラフは直線になります。



このとき $p=0$ であるとすると、②の式は $y=\dfrac{r}{q}$ となり、x の値にかかわらず常に y の値が $\dfrac{r}{q}$ であることを表しています。この方程式をグラフにすると、右図のように点 $\left(0,\ \dfrac{r}{q}\right)$ を通り、x 軸に平行な直線になります。

また、$p \fallingdotseq 0,\ q=0$ のとき、①の式は、$x=\dfrac{r}{p}$ となり、y の値にかかわらず常に x の値が $\dfrac{r}{p}$ であることを表しています。この方程式をグラフにすると、右図のように $\left(\dfrac{r}{p},\ 0\right)$ を通り、y 軸に平行な直線になります。

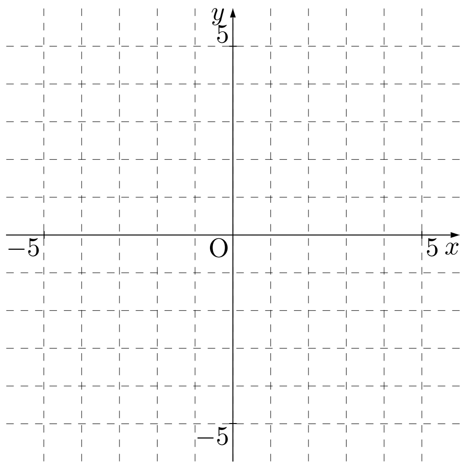
このことから、$x=0$ という方程式のグラフは y 軸、$y=0$ という方程式のグラフは x 軸になります。

【例題 4 − 1】

$ax + by = c$ (a, b, c は定数) があります。いま、a, b, c の値がそれぞれ次のように与えられたとき、その方程式のグラフをかきなさい。

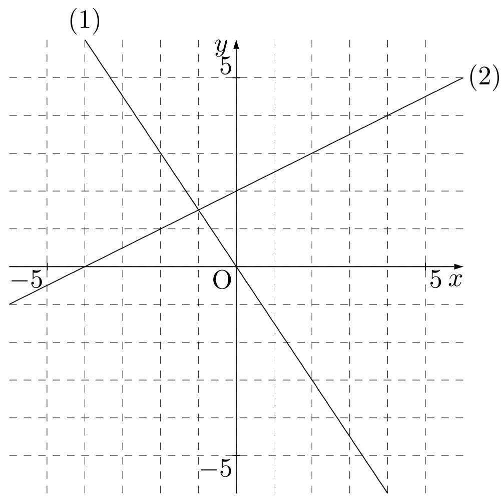
(1) $a = 3,\ b = 2,\ c = 0$　　(2) $a = -1,\ b = 2,\ c = 4$

(3) $a = 0,\ b = 5,\ c = 20$　　(4) $a = -3,\ b = 0,\ c = 9$



＜解説＞

$ax + by = c$ を y について解くと、$y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ と変形できるので、必要に応じてこの式を利用し、1 次関数の式を求めてグラフをかきます。



(1) $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ に $a = 3,\ b = 2,\ c = 0$ を代入すると、

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{0}{2} = -\frac{3}{2}x$$

となり、傾き $-\dfrac{3}{2}$、切片 0 の直線、つまり、傾き $-\dfrac{3}{2}$ で原点を通る直線になります。

(2) $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ に $a = -1,\ b = 2,\ c = 4$ を代入すると、

$$y = -\frac{-1}{2}x + \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}^{\,1}} = \frac{1}{2}x + 2$$

となり、傾き $\dfrac{1}{2}$、切片 2 の直線になります。

(3) $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ に $a = 0,\ b = 5,\ c = 20$ を代入すると、1 次関数の式は、

$$y = -\frac{0}{5}x + \frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{5}^{\,1}} = 4 \ \cdots\cdots\ ①$$

となりますが、このような式のグラフを今までに経験したことがない場合、どのようにしてグラフをかけばよいのか困ってしまいますね。そのようなときには、基本的なグラフのかく手順に戻って考えます。

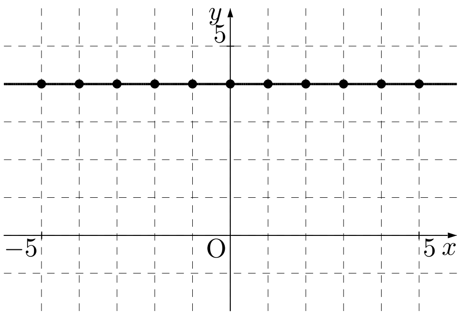
(i) x と y の対応表を完成させる。

①の式には変数 x が含まれない形なので、x がどのような値をとっても y の値は常に 4 になります。つまり、x と y の対応表は次のようになります。

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	$\cdots$

(ii) 対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

(i) の表より、対応する点を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶと、次のようなグラフをかくことができます。



(4) $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ に $a=-3,\ b=0,\ c=9$ を代入したいところですが、分母が 0 になってしまうので、代入することができません。そこで、問題で与えられた $ax+by=c$ の式に代入します。

$$-3x+0y=9$$

$$x=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-3\ \cdots\cdots\ ②$$

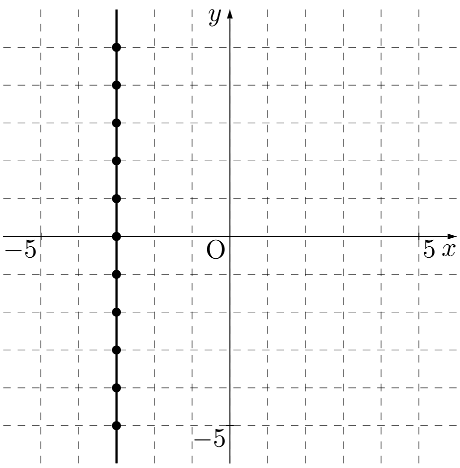
(i) x と y の対応表を完成させる。

②の式には変数 y が含まれない形なので、y がどのような値をとっても x の値は常に -3 になります。つまり、x と y の対応表は次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$

(ii) 対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

(i) の表より、対応する点を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶと次のようなグラフをかくことができます。



【演習 4 − 1】

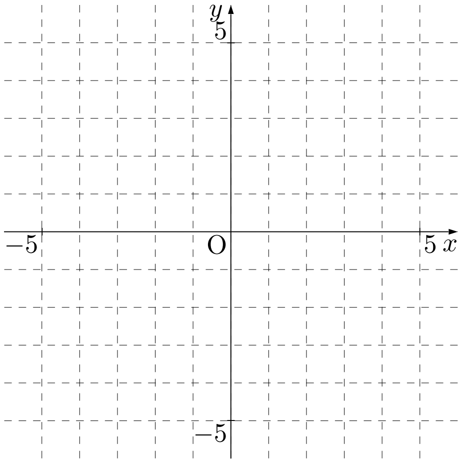
$ax + by = c$ （a, b, c は定数) があります。いま、a, b, c の値がそれぞれ次のように与えられたとき、その方程式のグラフをかきなさい。

(1) $a = 1.5,\ b = 3,\ c = \dfrac{5}{2}$

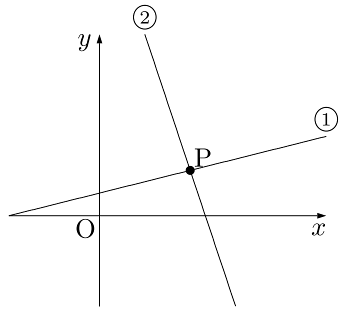
(2) $a = \dfrac{5}{4},\ b = -\dfrac{5}{3},\ c = -2$

(3) $a = 5,\ b = 0,\ c = -20$

(4) $a = 0,\ b = -3,\ c = 9$



4.2　連立方程式とグラフ



方程式 $ax+by=c$ のグラフが右図の①の直線、$px+qy=r$ のグラフが右図の②の直線であるとします。この直線上の点の座標は、それぞれの方程式の解になっているので、2 つの直線の交点（右図の点 P）は、2 つの方程式の共通の解ということになります。つまり、点 P（2 直線の交点）の座標が、次の連立方程式の解になります。

$$\begin{cases} ax+by=c & \cdots\cdots ① \\ px+qy=r & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

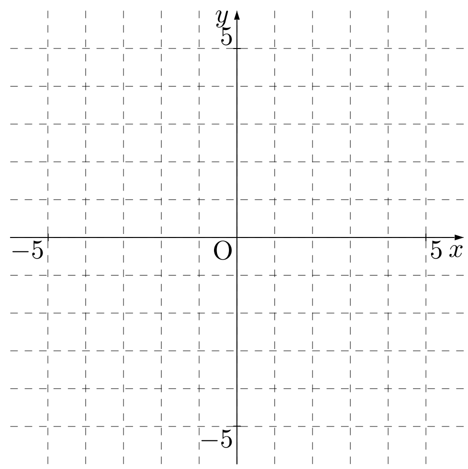
ただし、2 つの方程式のグラフが同じになるとき、共通な解は無数に存在（このような連立方程式は**不定**といいます）し、2 つの方程式のグラフが平行になるときは、交点を持たないので共通な解は存在しない、つまり、連立方程式の解はありません（このような連立方程式は**不能**といいます)。

このようにして、方程式をグラフで表すことにより、方程式の解を視覚的に判断ができるようになります。さらに、図に表すことで、図形の性質を利用して解を求めることもできる場合もあります。方程式とグラフとの密接な関係をしっかりと理解し、それを利用できるようにしましょう。

【例題 4 − 2】

次の連立方程式をグラフを用いて解き、計算でも解いて確かめなさい。

$$\begin{cases} 3x-2y=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

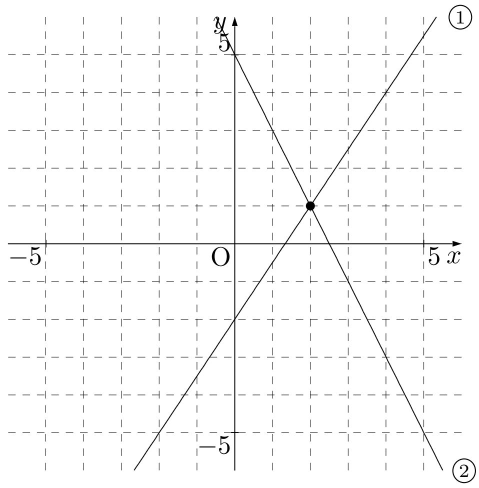


＜解説＞

①の式を y について解くと

$$\begin{aligned} 3x-2y&=4 \\ -2y&=-3x+4 \\ y&=(-3x+4)\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &=-3x\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\cancel{4}^{2}\times\left(-\frac{1}{\cancel{2}^{1}}\right) \\ &=\frac{3}{2}x-2 \end{aligned}$$

となるので、$3x-2y=4$ のグラフは、傾き $\dfrac{3}{2}$、切片 -2 の直線になります。



また、②の式を y について解くと

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 5 \\
y &= -2x + 5
\end{aligned}
$$

となるので、$2x + y = 5$ のグラフは、傾き -2、切片 5 の直線になります。そこで、この 2 つのグラフをかいてみると右図のようになり、この 2 つの直線の交点の座標を読み取ると

$$(2,\ 1)$$

となります。

連立方程式の解は、連立方程式のどの方程式も成り立たせる文字の値の組であったので、それぞれの直線の共通な座標、つまり、直線の交点の座標がその連立方程式の解ということになります。

このことから、この連立方程式の解は

$$(x,\ y) = (2,\ 1)$$

になります。

確かめに、この連立方程式を加減法で解いてみます。

①＋②×2 より、

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 3x & - 2y & = & 4 \\
+) & 4x & + 2y & = & 10 \\
\hline
 & 7x & & = & 14
\end{array}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
7x &= 14 \\
x &= \cancel{14}^{\,2} \times \frac{1}{\cancel{7}_{\,1}} = 2
\end{aligned}
$$

これを②に代入して、

$$
\begin{aligned}
2 \times 2 + y &= 5 \\
4 + y &= 5 \\
y &= 5 - 4 = 1
\end{aligned}
$$

となるので、確かに連立方程式の解は、

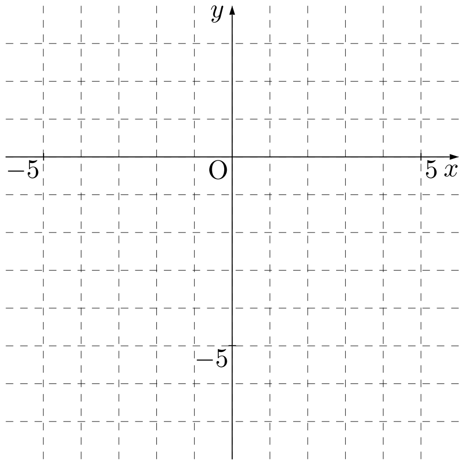
$$(x,\ y) = (2,\ 1)$$

になることがわかります。

【演習 4 − 2】

次の連立方程式をグラフを用いて解き、計算でも解いて確かめなさい。

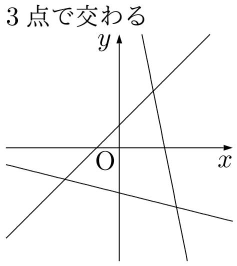
$$\begin{cases} 5x - 4y = 18 & \cdots\cdots ① \\ x = -2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



4.3　3 直線の位置関係

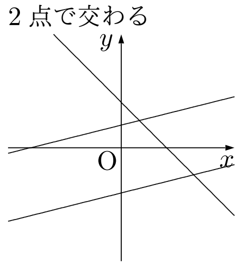
3 つの直線があるとき、次のような位置関係が考えられます。

(i) 3 点で交わる



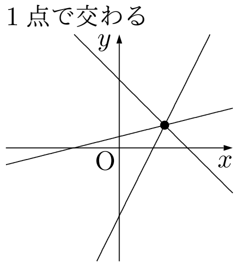
3 直線で三角形が作られる

(ii) 2 点で交わる



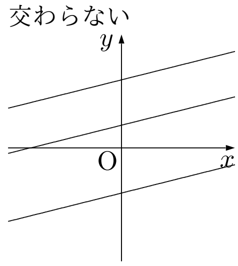
2 直線が平行

(iii) 1 点で交わる



2 直線の交点をもう 1 つの直線が通る

(iv) 交わらない



3 直線が平行

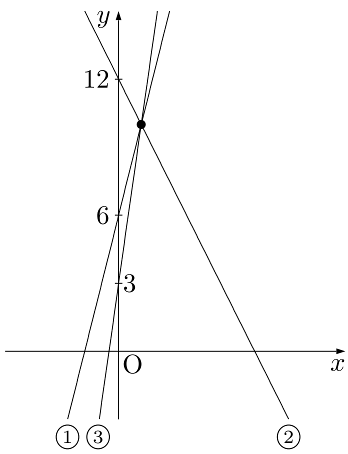
【例題 4 − 3】

3 つの直線 $4x - y = -6,\ 2x + y = 12,\ ax - y = -3$ が 1 点で交わるとき、定数 a の値を求めなさい。

＜解説＞

3 つの直線の式を y について解くと、次のように表すことができるので、グラフにすると右図のようになります。

$$4x - y = -6$$
$$-y = -4x - 6$$
$$y = 4x + 6 \ \cdots\cdots\ ①$$
$$2x + y = 12$$
$$y = -2x + 12 \ \cdots\cdots\ ②$$
$$ax - y = -3$$
$$-y = -ax - 3$$
$$y = ax + 3 \ \cdots\cdots\ ③$$



まず①, ②の式から、2 つの直線の交点を求めます。

$$\begin{aligned} 4x+6&=-2x+12 \\ 4x+2x&=12-6 \\ 6x&=6 \\ x&=6\times\frac{1}{6}=1 \end{aligned}$$

これを①に代入すると、

$$y=4\times 1+6=10$$

となるので、①と②の直線の交点は $(1,\ 10)$ であることがわかります。この交点を③の直線が通ればよいので、

$$\begin{aligned} a\times 1+3&=10 \\ a&=10-3=7 \end{aligned}$$

【演習 4 − 3】

3 直線 $x-y=-1,\ 2x+y=7,\ ax-y=-4$ によって、三角形ができないような定数 a の値をすべて求めなさい。

5　1次関数の利用

5.1　速さの問題

速さに関する文章問題（「出会う」、「追いつく」、「追い越す」などに関する問題）で、1次関数を利用すると解きやすくなる問題が多くあります。

一般的に、縦軸（y 軸）に距離（道のり）、横軸（x 軸）に時間をとったグラフを利用しますが、このとき、

$$(\text{速さ}) = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = (\text{傾き}) = (\text{変化の割合})$$

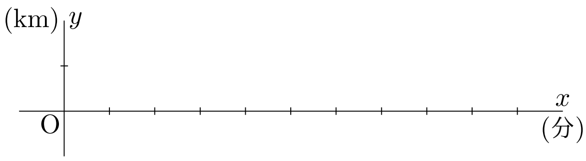
となることをおさえておきましょう。

【例題 5 − 1】

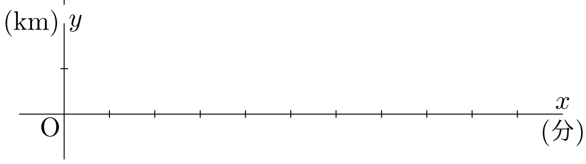
ある人が正午に家を出て、東から西への道を時速 12km の速さで自転車で走り、50 分後に郵便局について、手紙を出し、ただちに帰りは同じ道を時速 15km の速さで家に帰った。

これについて、次の問いに答えなさい。

(1) 正午から x 分経過したとき、この自転車が家から西へ y km のところにあるとして、x, y の関係を表す式を求め、グラフをかきなさい。

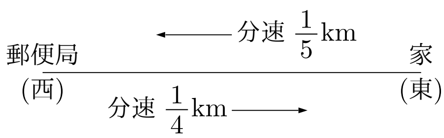


(2) 正午から x 分経過したとき、この自転車が郵便局から東へ y km のところにあるとして、x, y の関係を表す式を求め、グラフをかきなさい。



＜解説＞

距離の単位は「km」、時間の単位は「分」、速さの単位は「時速〇〇 km」となっているので、速さの単位は「分速〇〇 km」にして、単位をそろえます。



- 時速 12 km = 分速$\dfrac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{60}_{5}}$ km
- 時速 15 km = 分速$\dfrac{\cancel{15}^{1}}{\cancel{60}_{4}}$ km

このとき、家から郵便局までの距離は、

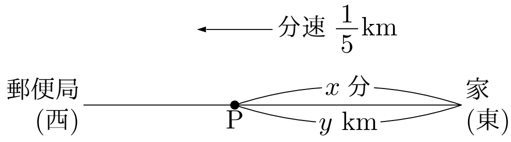
$$\begin{aligned}(\text{距離}) &= (\text{速さ}) \times (\text{時間}) \\ &= \frac{1}{5} \times 50 = 10\ (\text{km})\end{aligned}$$

また、郵便局から家までの 10 km の距離を分速 $\frac{1}{4}$ km で帰ったときにかかる時間は、

$$\begin{aligned}(\text{時間}) &= (\text{距離}) \div (\text{速さ}) \\ &= 10 \div \frac{1}{4} \\ &= 10 \times 4 = 40\ (\text{分})\end{aligned}$$

(1) ① 家から郵便局 ($0 \leqq x \leqq 50$)

x 分経過したとき、右図の点 P の位置にいたとすると、

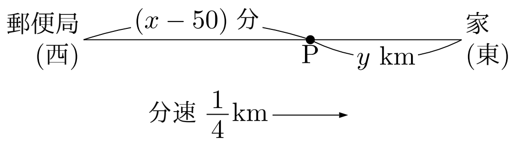


$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$

$$y = \frac{1}{5}x \quad (0 \leqq x \leqq 50)$$

② 郵便局から家 ($50 \leqq x \leqq 90$)

x 分経過したとき、右図の点 P の位置にいたとすると、

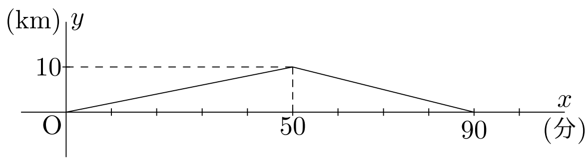


$$y = 10 - \frac{1}{4}(x - 50)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{\cancel{50}^{25}}{\cancel{4}^{2}} + \frac{20}{2}$$

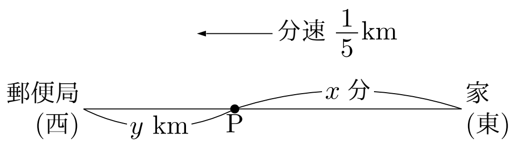
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{45}{2} \quad (50 \leqq x \leqq 90)$$

①, ②より、求めるグラフは次のようになります。



(2) ① 家から郵便局 ($0 \leqq x \leqq 50$)

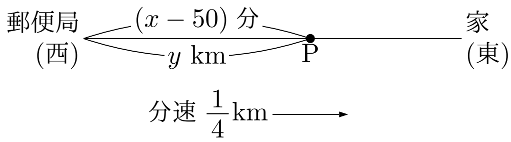
x 分経過したとき、右図の点 P の位置にいたとすると、



$$y = -\frac{1}{5}x + 10 \quad (0 \leqq x \leqq 50)$$

② 郵便局から家 ($50 \leqq x \leqq 90$)

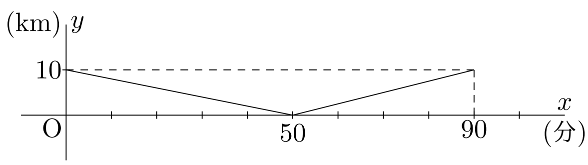
x 分経過したとき、右図の点 P の位置にいたとすると、



$$y = \frac{1}{4}(x - 50)$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{2} \quad (50 \leqq x \leqq 90)$$

①, ②より、求めるグラフは次のようになります。

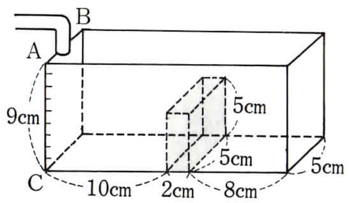


5.2 給水・排水とグラフ

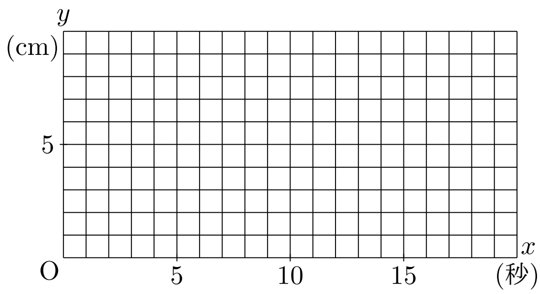
水槽・タンク・容器などに水を入れたり（給水）、そこから水を出したり（排水）したときの水量や水位の変化の様子を、グラフを利用して考える問題があります。

【例題 5 − 2】

右の図のように、水をさえぎるための直方体のしきりが入った直方体状の空の容器が、水平に置かれています。
この容器に、AB の側から毎秒 50 cm^3 の割合で水を入れます。
水を x 秒間入れたときの水面の高さ y cm を AC の部分で測ります。
次の (1)〜(4) の問いに答えなさい。



(1) 水を 3 秒間入れたときの水面の高さを求めなさい。
(2) 水を入れ始めてから、容器の水がいっぱいになるまでには、水を何秒間入れたらよいですか。
(3) 水を入れ始めてから、容器の水がいっぱいになるまでの、x と y との関係を表すグラフをかきなさい。
(4) 水面の高さが 6 cm から 8 cm までの間の、x と y との関係を式で表しなさい。



<解説>

容器に入れる水の量が一定だと、変化する水面の高さも一定になります。しかし、直方体のしきりが入っていることが、水面の高さの変化に影響するので注意が必要です。

① しきりの左側に水が入っているとき ($0 \leqq x \leqq 5$)
縦 5 cm、横 10 cm、高さ 5 cm の直方体の容器に水を入れていると考えます。このとき、容積は、

$$(\text{容積}) = 5 \times 10 \times 5 = 250\ (\text{cm}^3)$$

水を入れ始めてからこの部分（しきりの左側）がいっぱいになるのは、毎秒 50 cm^3 の割合で水を入れるので、

$$250 \div 50 = 5\,(\text{秒})$$

② しきりの右側に水が入っているとき ($5 \leqq x \leqq 9$)
しきりの左側の部分に水がいっぱいまで入ると、そのあふれた水はしきりをこえて、しきりの右側に水が入り始めます。このとき、水面の高さは AC の部分で測るので、この部分（しきりの右側）に水が入っている間は、水面の高さは変化しないことになります。
しきりの右側の部分は、縦 5 cm、横 8 cm、高さ 5 cm の直方体の容器だと考えられるので、その容積は、

$$(\text{容積}) = 5 \times 8 \times 5 = 200\ (\text{cm}^3)$$

毎秒 50 cm^3 の割合で水を入れたとき、

$$200 \div 50 = 4\,(\text{秒})$$

でいっぱいになるので、水を入れ始めてからは、

$$5 + 4 = 9\ (秒)$$

でいっぱいになることになります。

③ 水面の高さがしきりよりも高くなるとき ($9 \leqq x \leqq 17$)

水面の高さがしきりをこえると、しきりの影響はなくなるので、縦 5 cm、横 20 ($= 10 + 2 + 8$) cm、高さ 4 ($= 9 - 5$) cm の容器に水を入れていると考えます。このとき、容積は、

$$(容積) = 5 \times 20 \times 4 = 400\ (\text{cm}^3)$$

になるので、毎秒 50 cm^3 で水を入れるとき、

$$400 \div 50 = 8\ (秒)$$

でいっぱいになります。つまり、水を入れ始めてからは、

$$9 + 8 = 17\ (秒)$$

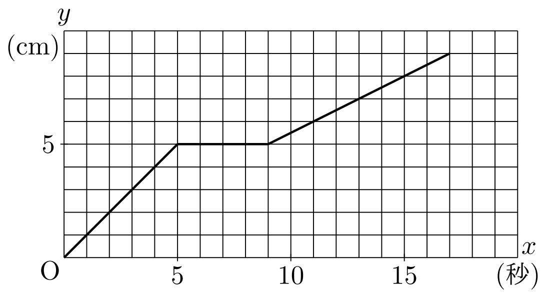
でいっぱいになります。

(1) 水を 3 秒間入れたときは、しきりの左側に水が入っていることになります。このことから、

$$\begin{aligned}(水の体積) &= (縦の長さ) \times (横の長さ) \times (水面の高さ)\\ 50 \times 3 &= 5 \times 10 \times y\\ y &= 3\ (\text{cm})\end{aligned}$$

(2) 先に計算したように、17 秒でいっぱいになります。

(3) 水を一定の割合で入れると、水面の高さも一定の割合で変化します。そのときのグラフは直線（1 次関数のグラフ）になるので、2 点が決まれば直線をかくことができます。



① $0 \leqq x \leqq 5$ のとき

一定の割合で水面は高くなり、5 秒後に水面の高さは、しきりの高さである 5 cm になります。

② $5 \leqq x \leqq 9$ のとき

この間、水面の高さは変化しません。

③ $9 \leqq x \leqq 17$ のとき

一定の割合で水面は高くなり、水を入れ始めてから 17 秒後に、容器いっぱいまで水が入るので、水面の高さは 9 cm になります。

このことから、(0, 0), (5, 5), (9, 5), (17, 9) という点をとって結べば、図のようなグラフをかくことができます。

(4) 水面の高さが 6 cm から 8 cm になるとき、(3) のグラフから、$9 \leqq x \leqq 17$ における x と y の関係を式に

表せばよいことになります。このとき、2 点 $(9,\ 5)$, $(17,\ 9)$ を通る直線の式を求めればよいので、

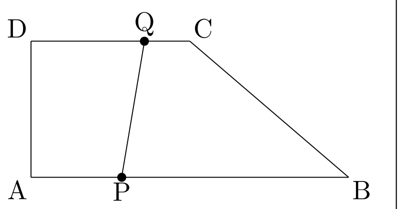
$$\begin{aligned} y &= \frac{9-5}{17-9}(x-9)+5 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{9}{2} + 5 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5.3　動点とグラフ

図形上の動点（動く点）によって変化する図形の面積などを、グラフを利用して考える問題があります。

【例題 5 − 3】

右の図において、四角形 ABCD は、AB // DC, $\angle$DAB = 90°, AB = 14 cm, DC = 7 cm, DA = 6 cm の台形です。点 P は、A を出発して AB 上を毎秒 2 cm の速さで B まで動き、点 Q は、C を出発して CD 上を毎秒 1 cm の速さで D まで動くものとします。P, Q がそれぞれ A, C を同時に出発してから x 秒後の PB の長さを l cm、四角形 PBCQ の面積を y cm^2 として、次の (1)〜(3) の問いに答えなさい。ただし、x の変域は $0 < x < 7$ とします。

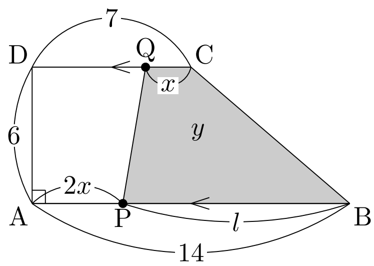


(1) l を x の式で表しなさい。
(2) y を x の式で表しなさい。
(3) y の変域を求めなさい。

＜解説＞

点 P は、点 A を出発して AB 上を毎秒 2 cm の速さで動くので、x 秒後の AP の長さは、

$$\mathrm{AP} = (\text{速さ}) \times (\text{時間}) = 2 \times x = 2x \text{ (cm)}$$



同じようにして、点 Q は、点 C を出発して CD 上を毎秒 1 cm の速さで動くので、x 秒後の CQ の長さは、

$$\mathrm{CQ} = (\text{速さ}) \times (\text{時間}) = 1 \times x = x \text{ (cm)}$$

このことから、問題で与えられた条件を図にかき入れると、右図のようになります。

(1) 図より、

$$l = -2x + 14$$

(2) 台形の面積の公式から、

$$(\text{台形の面積}) = (\text{上底} + \text{下底}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= (x + l) \times 6 \times \frac{1}{2} \\ &= \{x + (-2x + 14)\} \times 3 \\ &= 3(-x + 14) \\ &= -3x + 42 \end{aligned}$$

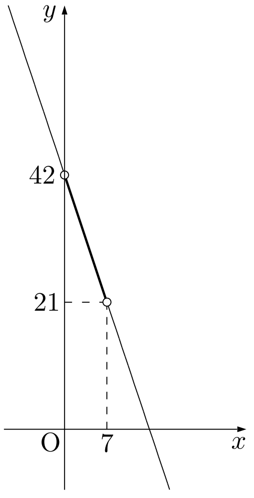
(3) (2) で求めた直線のグラフは右図のようになります。

1 次関数 $y = -3x + 42$ は、

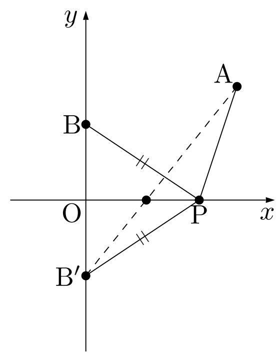
- $x = 0$ のとき：$y = 42$
- $x = 7$ のとき：$y = -3 \times 7 + 42 = 21$

となります。問題文の条件から、x の変域は $0 < x < 7$ であるので、そのときの y の変域は右のグラフより、

$$21 < y < 42$$



5.4 座標平面上の最短距離



右の図のように、座標平面上に 2 点 A, B があります。また、x 軸上に点 P をとりますが、AP + PB の長さが最短となるようにするにはどうすればよいのかを考えます。

まず、点 B と x 軸について対称な点 B′ をとります。すると、PB = PB′ になるので、

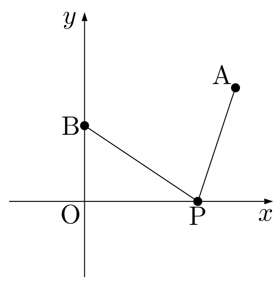
$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}'$$

このことから、AP + PB′ の長さが最短となるように点 P をとればよく、そのとき、A, B′, P は一直線（右図の点線）上に並ぶことになります。

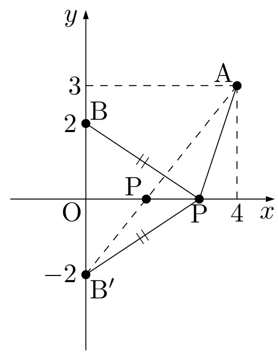
このように、複数の点を結ぶ線分の長さが最短となるためには、それらの点が一直線上に並ばなければいけませんが、結んだ線分の中継点（点 P）に対して端の点 (点 A, B) が同じ側にある場合、一直線に点を並べることができません。そこで、結んだ線分の端の点（点 A, B）と中継点（点 P）を通る線を軸 (x 軸) について対称な点をとります。

【例題 5 − 4】

右の図のように、2 点 A(4, 3), B(0, 2) があります。x 軸上に点 P を AP+PB の長さが最短になるようにとるとき、点 P の座標を求めなさい。



＜解説＞



右の図のように、点 B と x 軸について対称な点 B′ (0, −2) をとります。このとき、PB = PB′ であるので、

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}'$$

このことから、AP + PB′ の長さが最短となるためには、点 P は直線 AB′ と x 軸との交点になればよいことになります。直線 AB′ の式は、

$$y = \frac{3-(-2)}{4}x - 2 = \frac{5}{4}x - 2$$

となるので、$y = 0$ のとき、

$$\frac{5}{4}x - 2 = 0$$
$$\frac{5}{4}x = 2$$
$$x = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

よって、求める点 P の座標は、

$$\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$$

【演習 5 − 4】

右の図のように、2 点 A(7, 6), B(3, 0) があります。y 軸上に点 P を AP＋PB の長さが最短になるようにとるとき、点 P の座標を求めなさい。