

## 【中2数学】平面図形と平行線の性質

まなびの学園

<http://www.manabino-academy.com>

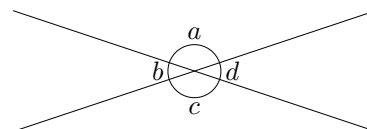
## 目次

1	平行線と角	1
1.1	対頂角 . . . . .	1
1.2	同位角・錯角・同側内角 . . . . .	3
1.3	平行線と同位角・錯角・同側内角 . . . . .	4
2	多角形と角	6
2.1	三角形の内角と外角 . . . . .	6
2.2	三角形の内角と分類 . . . . .	8
2.3	多角形の内角の和 . . . . .	10
2.4	多角形の外角の和 . . . . .	12
2.5	特別な多角形の内角の和 . . . . .	15
3	平行線と面積	17
3.1	平行線と面積 . . . . .	17
3.2	等積変形 . . . . .	19

## 1 平行線と角

### 1.1 対頂角

2本の直線が交わると、右の図のように4つの角ができます。このとき、 $\angle a$ と $\angle c$ 、 $\angle b$ と $\angle d$ のように、たがいに向かい合っている2つの角を対頂角といいます。



ここで、直線の作る角は $180^\circ$ なので、

$$\angle a + \angle b = 180^\circ \dots\dots ① \quad \angle b + \angle c = 180^\circ \dots\dots ②$$

となります。①, ②より、次の関係が成り立ちます。(図でも確認してみましょう。)

$$\angle a + \angle b = \angle b + \angle c$$

$$\angle a = \angle c$$

同じようにして、

$$\angle b + \angle c = 180^\circ \dots\dots ③ \quad \angle c + \angle d = 180^\circ \dots\dots ④$$

となるので、③, ④より、次の関係が成り立ちます。

$$\angle b + \angle c = \angle c + \angle d$$

$$\angle b = \angle d$$

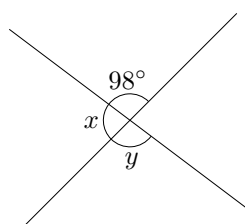
以上のことから

$$\angle a = \angle c, \quad \angle b = \angle d$$

となることがわかるので、「対頂角は等しい」という性質があります。

#### 【例題 1 - 1】

次の図で、 $\angle x$ ,  $\angle y$ の大きさを求めなさい。



#### <解説>

直線の作る角は $180^\circ$ なので、

$$\angle x + 98^\circ = 180^\circ$$

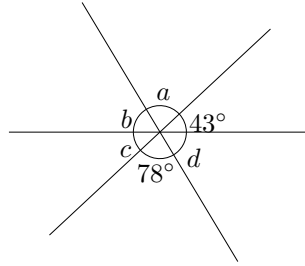
$$\angle x = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$$

また、対頂角は等しいので、

$$\angle y = 98^\circ$$

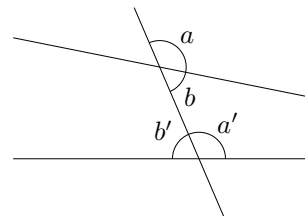
【演習 1 - 1】

次の図で、 $\angle a$ ,  $\angle b$ ,  $\angle c$ ,  $\angle d$  の大きさを求めなさい。



## 1.2 同位角・錯角・同側内角

右の図のように、2本の直線に1本の直線が交わっているとき、 $\angle a$ と $\angle a'$ のように、2本の直線と1本の直線とが作る角で、同じ位置にあるようなものを同位角といいます。また、 $\angle b$ と $\angle b'$ のように、2本の直線と1本の直線とが作る角で、2つの直線にはさまれ、1本の直線の反対側にあつて相対する角を錯角といい、 $\angle a'$ と $\angle b$ のように同じ側にある角を同側内角といいます。

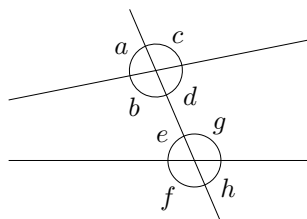


### 【例題1-2】

下の図について、次の問いに答えなさい。

(1) どの角とどの角が同位角ですか。

(2) どの角とどの角が錯角になっていますか。



### <解説>

右の図のように、それぞれの直線を  $l, m, n$  とします。

(1) 同位角とはその言葉通り、「同じ位置にある角」のことです。直線  $l$  と直線  $n$  とでできる

左上の角 ( $\angle a$ )、左下の角 ( $\angle b$ )、右上の角 ( $\angle c$ )、右下の角 ( $\angle d$ )

の4つの角と、直線  $m$  と直線  $n$  とでできる

左上の角 ( $\angle e$ )、左下の角 ( $\angle f$ )、右上の角 ( $\angle g$ )、右下の角 ( $\angle h$ )

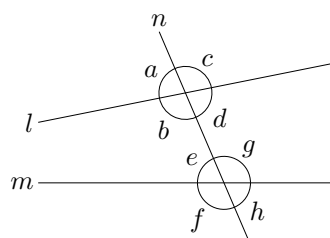
の4つの角がそれぞれ同じ位置に対応するので、同位角は、

$\angle a$ と $\angle e$ ,  $\angle b$ と $\angle f$ ,  $\angle c$ と $\angle g$ ,  $\angle d$ と $\angle h$

(2) 錯角は、2つの直線の内側で、交差するような位置にある角です。つまり、

$\angle b$ と $\angle g$ ,  $\angle d$ と $\angle e$

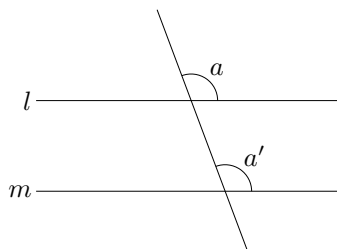
が錯角になります。



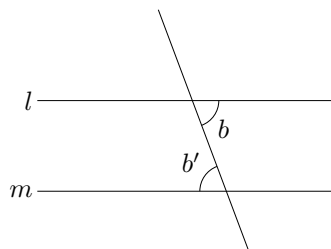
### 1.3 平行線と同位角・錯角・同側内角

平行な2直線に1直線が交わる時、次の図のように、同位角や錯角はそれぞれ等しくなります。

- (i)  $l \parallel m$  のとき、同位角はそれぞれ等しい      (ii)  $l \parallel m$  のとき、錯角はそれぞれ等しい



$$\angle a = \angle a' \dots\dots \textcircled{1}$$



$$\angle b = \angle b'$$

また、これとは逆に、2直線が1直線に交わる時、

- (i) 同位角が等しければ ( $\angle a = \angle a'$ )、2直線は平行 ( $l \parallel m$ )  
 (ii) 錯角が等しければ ( $\angle b = \angle b'$ )、2直線は平行 ( $l \parallel m$ )

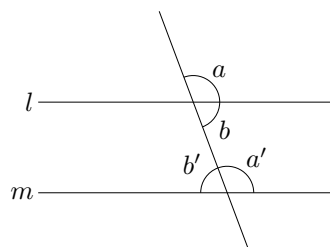
となり、これが「2直線が平行になるための条件」になります。

そして、右の図のように、平行な2直線に1直線が交わる時、直線の作る角は  $180^\circ$  であるので、

$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$

これと①の関係から、

$$\angle a' + \angle b = 180^\circ$$

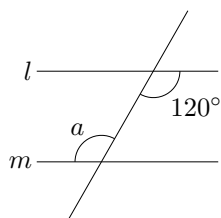


という関係が成り立ち、平行な2直線に1直線が交わる時、「同側内角の和は  $180^\circ$ 」になります。

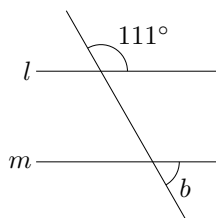
【例題 1 - 3】

次の図で、 $l \parallel m$  であるとき、 $\angle a$ ,  $\angle b$ ,  $\angle c$  の大きさを求めなさい。

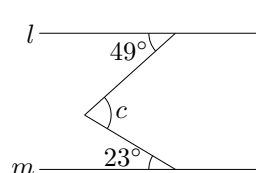
(1)



(2)



(3)



<解説>

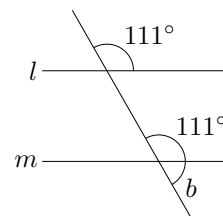
平行線における角度の問題では、同位角や錯角が等しくなるので、その性質をフルに活用しましょう。

(1) 平行線の錯角は等しくなるので、

$$\angle a = 120^\circ$$

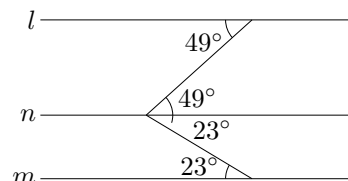
(2) 平行線の同位角は等しくなるので、右図のようになります。また、直線の作る角の大きさは  $180^\circ$  なので、

$$\begin{aligned} \angle b + 111^\circ &= 180^\circ \\ \angle b &= 180^\circ - 111^\circ \\ &= 69^\circ \end{aligned}$$



(3) このままの図では、同位角や錯角がありません。そこで、右の図のように直線  $l$ 、直線  $m$  と平行になる補助線（直線  $n$ ）を引くと、錯角は等しくなります。よって、

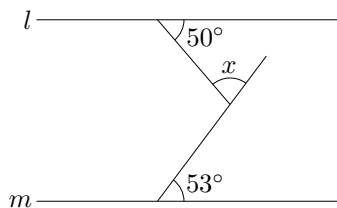
$$\angle c = 49^\circ + 23^\circ = 72^\circ$$



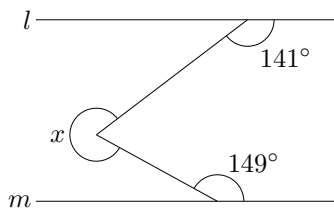
【演習 1 - 3】

次の図で、 $l \parallel m$  であるとき、 $\angle x$  の大きさを求めなさい。

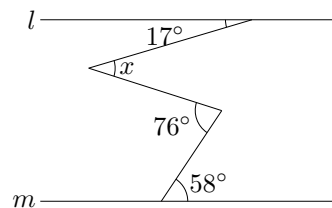
(1)



(2)



(3)

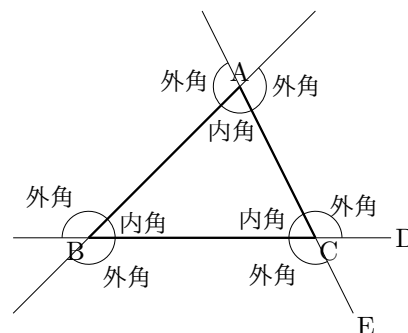


## 2 多角形と角

### 2.1 三角形の内角と外角

多角形の1辺と、その1辺と隣り合う辺の延長とが作る角を外角といい、多角形の隣り合った2辺が作る、多角形の内側に向いた角を内角といいます。

右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺BCを延長した直線上に点D、辺ACを延長した直線上に点Eをとります。このとき、 $\angle ACD$ 、 $\angle BCE$ を、 $\triangle ABC$ の頂点Cにおける外角といい、同じようにして、頂点A、Bにおける外角も考えることができます。また、外角に対して、 $\triangle ABC$ の3つの角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ を内角といいます。



今度は右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺BCを延長した直線上に点Dをとって、点Cを通り辺BAに平行な直線をCEとします。

このとき、

$$BA \parallel CE$$

より、平行線の同位角、錯角は等しいので、

$$\angle A = \angle ACE, \quad \angle B = \angle ECD$$

となります。また、一直線のつくる角は $180^\circ$ であるので、

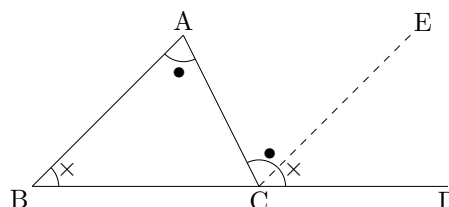
$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \angle ACE + \angle ECD + \angle C \\ &= \angle BCD = 180^\circ \end{aligned}$$

となり、このことから、「三角形の3つの内角の和は $180^\circ$ 」ということがわかります。

また、

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$$

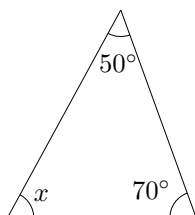
より、「三角形の1つの外角は、そのとりにない2つの内角の和に等しい（外角の定理）」ということもわかります。



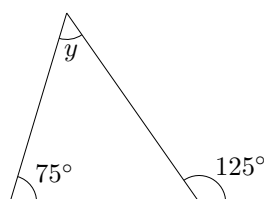
#### 【例題2-1】

下の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)





<解説>

(1) 「三角形の3つの内角の和は  $180^\circ$ 」なので、

$$\angle x + 50^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

となります。これを計算して

$$\angle x + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(2) 外角の定理より、「三角形の1つの外角は、そのとりにない2つの内角の和に等しい」ので、

$$\angle y + 75^\circ = 125^\circ$$

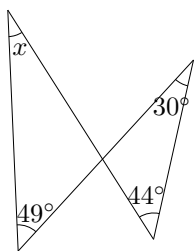
という関係が成り立ちます。これを計算すると

$$\angle y = 125^\circ - 75^\circ = 50^\circ$$

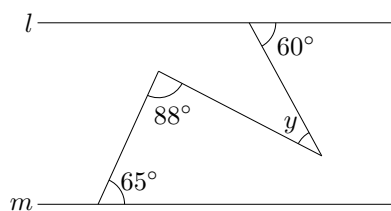
【演習 2 - 1】

下の図で、 $\angle x$ ,  $\angle y$  の大きさを求めなさい。

(1)



(2)  $l \parallel m$



## 2.2 三角形の内角と分類

$0^\circ$  より大きく  $90^\circ$  より小さい角を鋭角 (えいかく) といい、 $90^\circ$  より大きく  $180^\circ$  より小さい角を鈍角 (どんかく)、 $90^\circ$  の角を直角といいます。そして、三角形はその内角の大きさによって、

- 鋭角三角形：3つの内角がすべて鋭角である三角形
- 直角三角形：1つの内角が直角である三角形
- 鈍角三角形：1つの内角が鈍角である三角形

のように分類されます。このとき、次の表のように、鋭角三角形、鈍角三角形、直角三角形のいずれも、2つの内角はそれぞれ鋭角です。そのため、残りの1つの内角が鋭角、鈍角、直角のいずれになるのかを考えることによって、どの三角形に分類されるのかを判断することができます。

三角形の分類	1つの内角	1つの内角	1つの内角
鋭角三角形	鋭角	鋭角	鋭角
鈍角三角形	鈍角	鋭角	鋭角
直角三角形	直角	鋭角	鋭角

### 【例題 2 - 2】

2つの内角が次のような三角形は、どんな三角形ですか。

(1)  $38^\circ, 39^\circ$

(2)  $60^\circ, 88^\circ$

(3)  $52^\circ, 38^\circ$

### <解説>

(1) 残りの1つの内角を  $\angle x$  とすると、三角形の3つの内角の和が  $180^\circ$  なので、

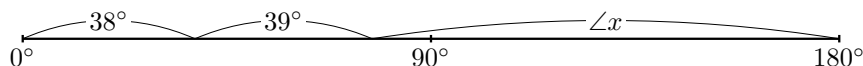
$$\angle x + 38^\circ + 39^\circ = 180^\circ$$

$$\angle x + 77^\circ = 180^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$$

となり、三角形の3つの内角は、 $38^\circ, 39^\circ, 103^\circ$  であることがわかります。 $38^\circ$  と  $39^\circ$  は鋭角ですが、 $103^\circ$  は鈍角なので、この三角形は鈍角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



$38^\circ$  と  $39^\circ$  の2つの内角の和  $77^\circ$  は  $90^\circ$  よりも小さく、残りの内角の大きさ  $\angle x$  は  $90^\circ$  よりも大きくなる、つまり、鈍角になることから、この三角形は鈍角三角形になると判断することもできます。

(2) 残りの1つの内角を  $\angle y$  とすると、三角形の3つの内角の和が  $180^\circ$  なので、

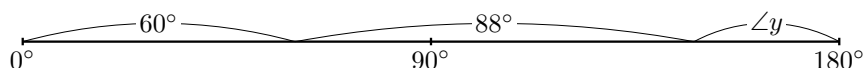
$$\angle y + 60^\circ + 88^\circ = 180^\circ$$

$$\angle y + 148^\circ = 180^\circ$$

$$\angle y = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$$

となり、三角形の3つの内角は、 $60^\circ$ 、 $88^\circ$ 、 $32^\circ$ であることがわかります。三角形の3つの内角すべてが鋭角なので、この三角形は鋭角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



$60^\circ$  と  $88^\circ$  の2つの内角の和  $148^\circ$  は  $90^\circ$  よりも大きく、残りの内角の大きさ  $\angle y$  は  $90^\circ$  よりも小さくなる、つまり、鋭角になることから、この三角形は鋭角三角形になると判断することもできます。

(3) 残りの1つの内角は  $\angle z$  とすると、三角形の3つの内角の和が  $180^\circ$  なので、

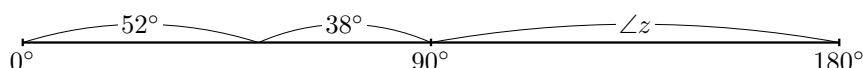
$$\angle z + 52^\circ + 38^\circ = 180^\circ$$

$$\angle z + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle z = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

となり、三角形の3つの内角は、 $52^\circ$ 、 $38^\circ$ 、 $90^\circ$ であることがわかります。 $52^\circ$  と  $38^\circ$  は鋭角ですが、 $90^\circ$  は直角なので、この三角形は直角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



$52^\circ$  と  $38^\circ$  の2つの内角の和は  $90^\circ$  となるので、残りの内角の大きさ  $\angle z$  は  $90^\circ$  になる、つまり、直角になることから、この三角形は直角三角形になると判断することもできます。

三角形の3つの内角すべてを求めることで、どんな三角形になるのかを判断してもいいのですが、線分図を用いて内角の大きさの様子を表したように、2つの内角（鋭角）の和の大きさから残りの1つの内角の大きさが判断できるため、次のような関係で三角形を分類することができます。

三角形の分類	2つの内角（鋭角）の和	残りの1つの内角
鋭角三角形	$90^\circ$ よりも大きい	鋭角 ( $90^\circ$ よりも小さい)
鈍角三角形	$90^\circ$ よりも小さい	鈍角 ( $90^\circ$ よりも大きい)
直角三角形	$90^\circ$	直角 ( $90^\circ$ )

—【演習 2 - 2】—

2つの内角が次のような三角形は、どんな三角形ですか。

(1)  $28^\circ$ ,  $62^\circ$

(2)  $78^\circ$ ,  $69^\circ$

(3)  $56^\circ$ ,  $37^\circ$

### 2.3 多角形の内角の和

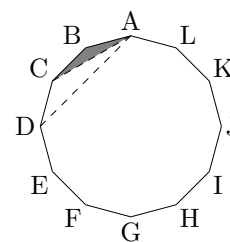
三角形、四角形、五角形など、いくつかの線分で囲まれた図形を多角形といいます。

対角線は頂点と頂点を結ぶことにより引くことができますが、自分自身と自分の隣の頂点には対角線を引きできません。つまり、 $n$  角形の場合、 $n$  個ある頂点から 3 個の頂点を除いた分だけ、1 つの頂点から対角線を引くことができます。このことから、対角線は 1 つの頂点から、

1 つの頂点から引くことのできる  $n$  角形の対角線の本数： $n - 3$  (本)

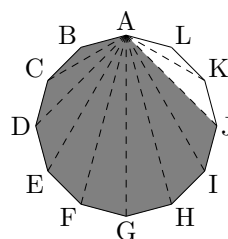
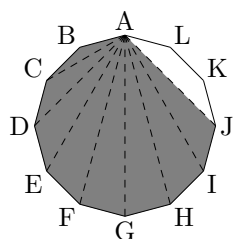
だけ引くことができます。

右の図のように、1 つの頂点（ここでは、頂点 A）から対角線を 1 本引くと、三角形を 1 つ作ることができます。そして、そこから順に対角線を 1 本増やすと、できる三角形の個数も 1 つ増え、このようにして、対角線を 1 本ずつ増やすにつれ、できる三角形の個数も 1 つずつ増えることになります。しかし、最後の 1 本の対角線を引く場合には、三角形は 1 つではなく、2 つの三角形が作れます。



(i) 最後から 1 本前まで対角線を引いたとき

(ii) 最後の対角線を引いたとき



このことから、多角形を対角線で分割することにより、三角形は対角線の本数よりも 1 個だけ多くつくることができます。 $n$  角形の場合、1 つの頂点から引くことのできる対角線の本数は  $n - 3$  (本) であったので、対角線によってできる三角形の個数は、それよりも 1 つ多くなるので、

$n$  角形の分割できる三角形の個数： $(n - 3) + 1 = n - 2$  (個)

となります。そして、「三角形の 3 つの内角の和が  $180^\circ$ 」であることがわかっているので、 $n$  角形の内角の和は、

$n$  角形の内角の和 =  $180^\circ \times (n - 2)$

という式で求めることができるようになります。

【例題 2 - 3】

次の多角形の内角の和を求めなさい。

(1) 五角形

(2) 十二角形

<解説>

公式を使えば答えを求めることができますが、ここでは公式の原理を理解するためにそれぞれの多角形を三角形に分割して内角の和を求めてみます。

- (1) 五角形の例として、右の図のような五角形 ABCDE の内角の和を求めてみたいと思います。このとき、頂点 A からは、自分自身である頂点 A と、その隣の頂点 B, E には対角線をひくことができないので、残りの

$$5 - 3 = 2 \text{ (個)}$$

の頂点 C, D へ対角線を引くことができ、

$$5 - 2 = 3 \text{ (個)}$$

の三角形に分割することができます。

「三角形の 3 つの内角の和は  $180^\circ$ 」であるので、五角形 ABCDE の内角の和は、三角形 3 つ分の内角の和を考えればよく、

$$\begin{aligned} \text{(五角形 ABCDE の内角の和)} &= \text{(三角形の内角の和)} \times (5 - 2) \\ &= 180^\circ \times 3 = 540^\circ \end{aligned}$$

となります。このようにして、五角形であればどのような五角形でも 3 つの三角形に分割できるので、全ての五角形の内角の和は  $540^\circ$  になります。

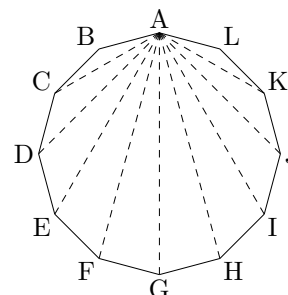
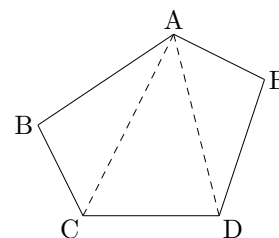
- (2) (1) と同じようにして、十二角形を三角形に分割すると、

$$12 - 2 = 10 \text{ (個)}$$

の三角形に分割することができます。このことから、十二角形の内角の和は、三角形 10 個分の内角の和を考えればよいので、

$$\begin{aligned} \text{(十二角形の内角の和)} &= \text{(三角形の内角の和)} \times (12 - 2) \\ &= 180^\circ \times 10 = 1800^\circ \end{aligned}$$

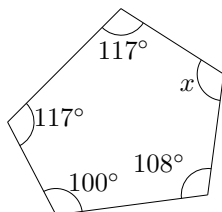
となります。



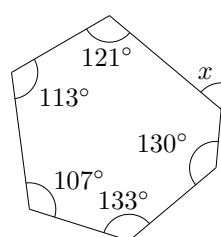
【演習 2 - 3】

次の図で、 $\angle x$  の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



## 2.4 多角形の外角の和

ここではまず、右の図のような三角形 ( $\triangle ABC$ ) の外角の和 ( $\angle a' + \angle b' + \angle c'$ ) について考えてみたいと思います。

一直線のつくる角は  $180^\circ$  であるので、

$$\angle a + \angle a' = \angle b + \angle b' = \angle c + \angle c' = 180^\circ$$

になります。このことから、

$$(\angle a + \angle a') + (\angle b + \angle b') + (\angle c + \angle c') = 180^\circ \times 3$$

$$\angle a + \angle a' + \angle b + \angle b' + \angle c + \angle c' = 540^\circ$$

$$(\angle a + \angle b + \angle c) + (\angle a' + \angle b' + \angle c') = 540^\circ \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

のような関係式を作ることができます。また、三角形の内角の和は  $180^\circ$  なので、

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

です。よって、 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ より、

$$180^\circ + (\angle a' + \angle b' + \angle c') = 540^\circ$$

$$\angle a' + \angle b' + \angle c' = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

となり、三角形の外角の和は  $360^\circ$  であることがわかります。

同じようにして  $n$  角形の場合も考えてみると、

$$(1 \text{ つの内角} + 1 \text{ つの外角}) \text{ の和} = 180^\circ \times n$$

となるので、

$$(n \text{ 角形の内角の和}) + (n \text{ 角形の外角の和}) = 180^\circ \times n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

と表すことができます。また、 $n$  角形の内角の和は

$$(n \text{ 角形の内角の和}) = 180^\circ \times (n - 2)$$

$$= 180^\circ \times n - 180^\circ \times 2$$

$$= 180^\circ \times n - 360^\circ \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

であるので、 $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ より

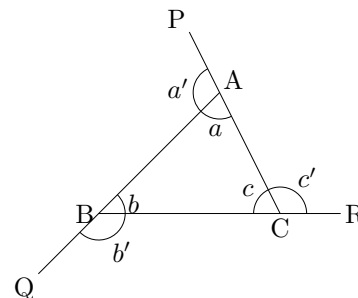
$$(180^\circ \times n - 360^\circ) + (n \text{ 角形の外角の和}) = 180^\circ \times n$$

$$(n \text{ 角形の外角の和}) = 180^\circ \times n - 180^\circ \times n + 360^\circ$$

$$= 360^\circ$$

となり、多角形の外角の和は、どのような多角形であっても常に  $360^\circ$  になります。と、原理的にはそうなりますが、ちょっと説明が難しいですね。このようになることをもう少し感覚的に考えてみましょう。

まず、自分が回転いすにすわっていると思ってください。そして、先ほどの図において、頂点 A の位置にいてそこから P の方向に向いています。そこから、 $\angle a'$  だけ回転して頂点 B(Q) の方向に向き、頂点 B に向かっていきましょう。頂点 B に着いたらそこで止まり、 $\angle b'$  だけ回転して頂点 C(R) の方向に向きます。そし



て、また頂点 C に向かっていき、頂点 C に着いたら止まり、 $\angle c'$  だけ回転して A に向かうというようにして  $\triangle ABC$  を 1 周します。イメージできましたか？

最初は P を向いていますね。そこから  $\angle a'$ 、 $\angle b'$ 、 $\angle c'$  だけ回転したらまた P の方向を向きました。つまり、1 回転したわけです。1 回転は  $360^\circ$  ですよね。このことから、

$$\angle a' + \angle b' + \angle c' = 360^\circ$$

になります。このことは、三角形に限ったことではなく、どのような多角形でも 1 周すれば 1 回転することになるので、外角の和は  $360^\circ$  になります。

—【例題 2 - 4】—

次の多角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

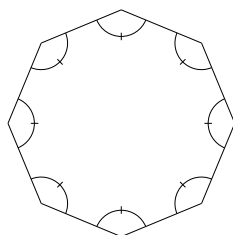
(1) 正八角形

(2) 正十角形

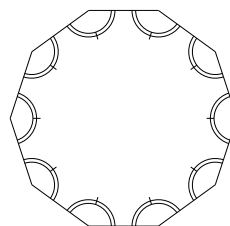
<解説>

正多角形の内角の大きさはすべて等しくなります。また、外角の大きさもすべて等しくなります。

(1) 正八角形



(2) 正十角形



(1) 正八角形の内角の和は

$$\begin{aligned} (\text{正八角形の内角の和}) &= 180^\circ \times (8 - 2) \\ &= 180^\circ \times 6 = 1080^\circ \end{aligned}$$

となります。正八角形は 8 個の内角があり、その内角の大きさはすべて等しいので、正八角形の 1 つの内角の大きさは

$$(\text{正八角形の 1 つの内角の大きさ}) = 1080^\circ \div 8 = 135^\circ$$

となります。

また、正八角形の外角の大きさもすべて等しく、その和は  $360^\circ$  であることから、

$$(\text{正八角形の 1 つの外角の大きさ}) = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

となります。そして、1 つの内角と外角の和は  $180^\circ$  であるので、

$$\begin{aligned} (\text{正八角形の 1 つの内角の大きさ}) &= 180^\circ - (1 \text{ つの外角の大きさ}) \\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \end{aligned}$$

のようにして、内角の大きさを求めることもできます。

(2) 内角の和を利用して求めると

$$\begin{aligned} (\text{正十角形の内角の和}) &= 180^\circ \times (10 - 2) \\ &= 180^\circ \times 8 = 1440^\circ \end{aligned}$$

よって、1つの内角の大きさは

$$(\text{正十角形の1つの内角の大きさ}) = 1440^\circ \div 10 = 144^\circ$$

となります。

また、外角を利用すると

$$(\text{正十角形の1つの外角の大きさ}) = 360^\circ \div 10 = 36^\circ$$

よって、1つの内角の大きさは

$$(\text{正十角形の1つの内角の大きさ}) = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

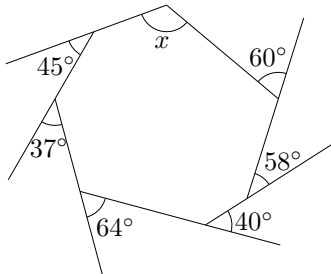
となります。

どちらの解き方で求めてもかまいませんが、外角を利用した方が、小さな数を扱うので計算は楽だと思えます。どちらの解き方も理解して解いてみて、自分の解きやすい方法でしっかり解けるように練習しましょう。

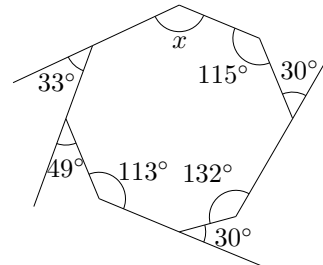
【演習 2 - 4】

次の図で、 $\angle x$  の大きさを求めなさい。

(1)



(2)





## 2.5 特別な多角形の内角の和

右の図のような図形（ここでは、「ブーメラン型」と呼ぶことにします。）において、 $\angle x$ の大きさを考えます。

図のように、BOの延長とACとの交点をDとすると、 $\triangle ABD$ において外角の定理を利用することで、

$$\angle BDC = \angle a + \angle b$$

さらに、 $\triangle OCD$ において外角の定理を利用すると、

$$\angle x = \angle BDC + \angle c = \angle a + \angle b + \angle c$$

という関係が導き出されます。

また、右の図のような図形（ここでは、「五芒星（ごぼうせい）型」と呼ぶことにします。）において、内角の和 $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$ について考えます。

図のように、AC, ADとBEとの交点をそれぞれF, Gとします。 $\triangle FCE$ ,  $\triangle BDG$ に着目して、それぞれ外角の定理を利用すると、

$$\angle AFG = \angle c + \angle e, \quad \angle FGA = \angle b + \angle d$$

$\triangle AFG$ に着目すると、三角形の内角の和は $180^\circ$ であるので、

$$\angle A + \angle AFG + \angle FGA = 180^\circ$$

$$\angle a + (\angle c + \angle e) + (\angle b + \angle d) = 180^\circ$$

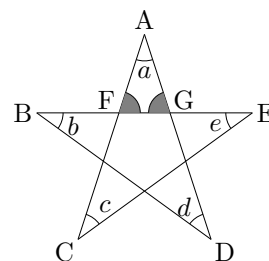
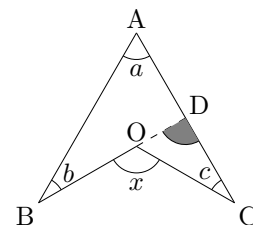
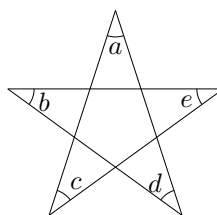
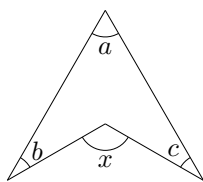
$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$$

となります。

このような内角の大きさの関係は、角度を求める問題でしばしば利用されるので、公式として覚えておくようにしましょう。

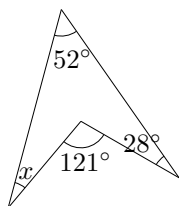
(i) ブーメラン型： $\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

(ii) 五芒星型： $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$

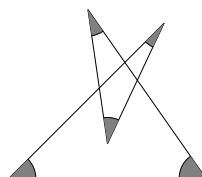


### 【例題 2 - 5】

(1)  $\angle x$ の大きさを求めなさい。



(2) 黒くぬった角度の和を求めなさい。



<解説>

(1) ブーメラン型なので、

$$52^\circ + \angle x + 28^\circ = 121^\circ$$

$$\angle x + 80^\circ = 121^\circ$$

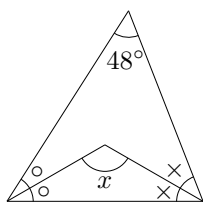
$$\angle x = 121^\circ - 80^\circ = 41^\circ$$

(2) 見た目は少しわかりにくいかもしれませんが、これも五芒星型になります。そのため、黒くぬった角度の和は、

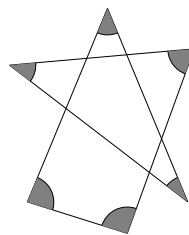
$$180^\circ$$

【演習 2 - 5】

(1)  $\angle x$  の大きさを求めなさい。



(2) 黒くぬった角度の和を求めなさい。



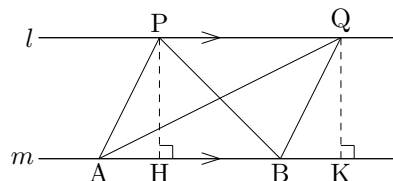
### 3 平行線と面積

#### 3.1 平行線と面積

右の図のように、直線  $l$  と直線  $m$  があり、

$$l \parallel m$$

であるとして、このとき、直線  $l$  上に 2 点  $P, Q$ 、直線  $m$  上に 2 点  $A, B$  をとり、 $\triangle PAB$  と  $\triangle QAB$  を作ります。さらに、 $P, Q$  から直線  $m$  に垂線を下ろし、直線  $m$  との交点を  $H, K$  とすると、 $\triangle PAB$  と  $\triangle QAB$  の面積はそれぞれ、



$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times AB \times PH \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\triangle QAB = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times AB \times QK \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となります。また、 $l \parallel m$  であるので、2 つの三角形の高さは等しくなり、

$$PH = QK \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

①～③より、

$$\frac{1}{2} \times AB \times PH = \frac{1}{2} \times AB \times QK$$

つまり、

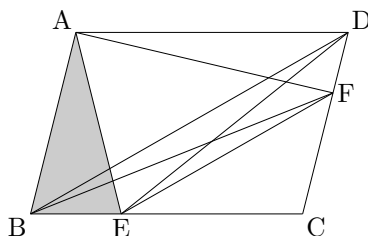
$$\triangle PAB = \triangle QAB$$

となることがわかります。

このように、 $PQ \parallel AB$  ならば、 $\triangle PAB$  と  $\triangle QAB$  の底辺と高さが等しくなるので、2 つの三角形の面積も等しくなります。

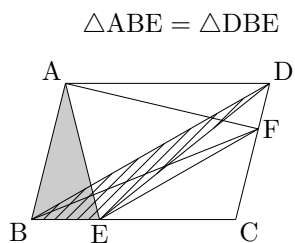
—【例題 3 - 1】—

次の図で、 $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$ 、 $EF \parallel BD$  であるとき、 $\triangle ABE$  と面積の等しい三角形を 3 つ答えなさい。

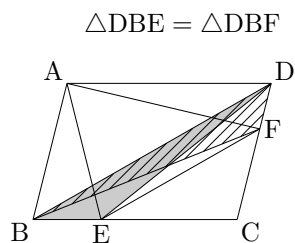


<解説>

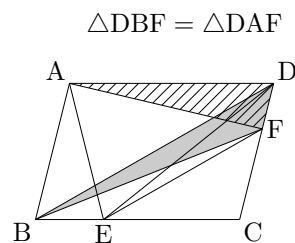
①  $AD \parallel BC$  より、



②  $EF \parallel BD$  より、



③  $AB \parallel DC$  より、



①~③より、

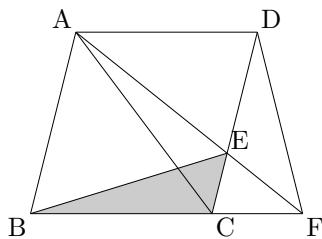
$$\triangle ABE = \triangle DBE = \triangle DBF = \triangle DAF$$

となるので、求める三角形は、

$$\triangle DBE, \triangle DBF, \triangle DAF$$

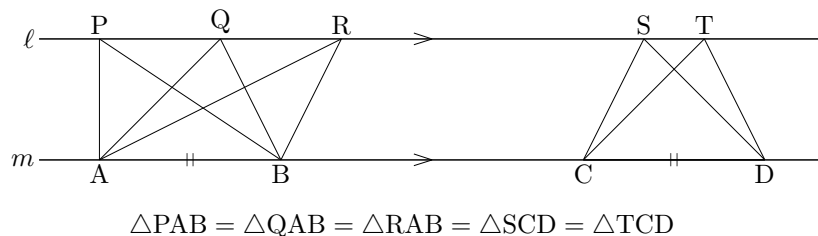
【演習 3 - 1】

次の図で、 $AB \parallel DC$ ,  $AD \parallel BF$  であるとき、 $\triangle BCE$  と面積の等しい三角形を 2 つ答えなさい。



### 3.2 等積変形

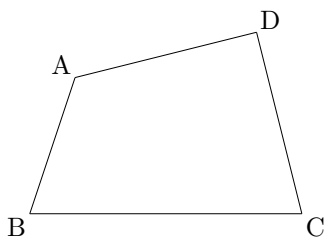
三角形の底辺が共通で（または、長さが等しく）、底辺にない残りの頂点が、底辺に平行な直線上を動く場合、底辺も高さも等しくなるので、三角形の面積が等しくなります。



このように、平行線を利用することで、ある図形を面積の等しい異なる図形に変形することができ、このような変形を等積変形といいます。

【例題 4 - 1】

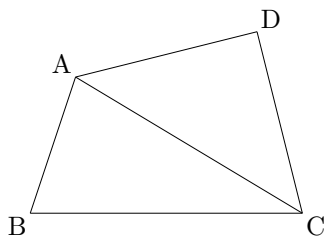
次の図の四角形 ABCD と面積の等しい三角形を作図しなさい。



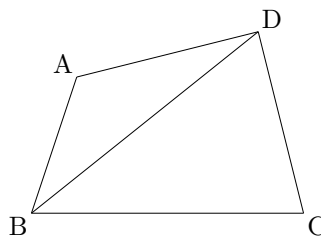
<解説>

平行線を利用した等積変形は三角形に利用できるもので、まずは四角形を三角形に分割する必要があります。

(i) 対角線 AC で分割



(ii) 対角線 BD で分割



という 2 通りの分割の仕方があり、さらに、それぞれの分割において、(i) の「対角線 AC で分割」する場合は

①  $\triangle ABC$

②  $\triangle ACD$

そして、(ii)の「対角線BDで分割」する場合においても

- ①  $\triangle ABD$
- ②  $\triangle DBC$

という三角形を、それぞれ等積変形することができます。

(i) ①  $\triangle ABC$  を等積変形する場合

$\triangle ABC$  を等積変形するために、まずは、どの頂点を動かすかを考えます。頂点A, Cを動かすと、 $\triangle ACD$ も変形してしまうことになってしまうので、動かせるのは頂点Bです。そこで、底辺をACとし、頂点Bを通り、ACに平行な直線を引きます。頂点BはACと平行な直線上であれば、どこにあっても $\triangle ABC$ の面積は変わりません。そこで、四角形ABCDを三角形に変形できるように頂点Bを動かすと、平行線と辺ADの延長線との交点Pと、平行線と辺DCの延長線との交点Qが見つかります。このとき、

$$\triangle ABC = \triangle APC = \triangle AQC$$

であるので、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \triangle APC + \triangle ACD = \triangle PCD \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \triangle AQC + \triangle ACD = \triangle AQD \end{aligned}$$

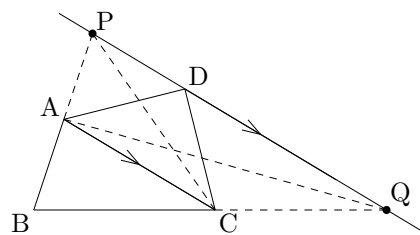
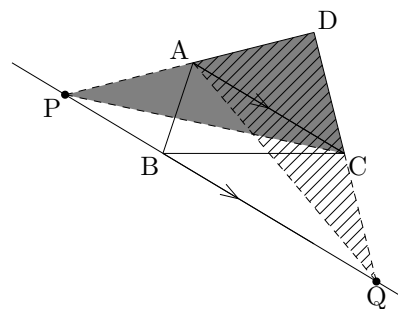
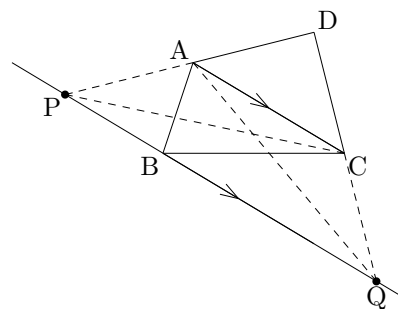
のようにして、四角形ABCDを $\triangle PCD$ 、または、 $\triangle AQD$ へと等積変形することができます。

②  $\triangle ACD$  を等積変形する場合

$\triangle ABC$  の等積変形と同じようにして考えます。まずは、頂点Dを通り、ACに平行な直線を引きます。頂点Dはこの平行線上であれば、 $\triangle ACD$ の面積は変わらないので、四角形ABCDを三角形に変形できるように、頂点Dを平行線上で動かします。すると、平行線と辺ABの延長線との交点P、平行線と辺BCとの交点Qが見つかります。

$$\triangle ACD = \triangle ACP = \triangle ACQ$$

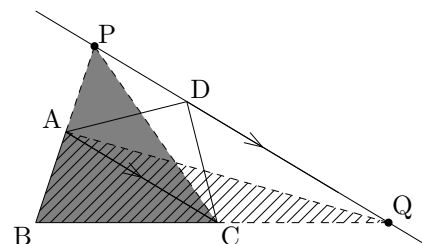
であるので、



$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \triangle ABC + \triangle ACP = \triangle PBC \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \triangle ABC + \triangle ACQ = \triangle ABQ \end{aligned}$$



のようにして、四角形 ABCD を  $\triangle PBC$ 、または、 $\triangle ABQ$  へと等積変形することができます。

(ii) (i) と同じ手順でそれぞれ等積変形を行います。

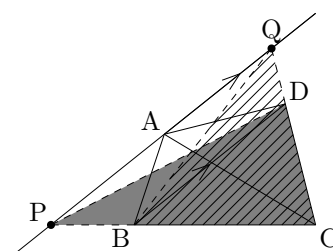
①  $\triangle ABD$  を等積変形する場合

右の図のように、頂点 A を通り、辺 BD に平行な直線と CB, CD の延長との交点をそれぞれ P, Q とすると、

$$\triangle ABD = \triangle PBD = \triangle QBD$$

このことから、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABD + \triangle DBC \\ &= \triangle PBD + \triangle DBC = \triangle DPC \end{aligned}$$



また、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABD + \triangle DBC \\ &= \triangle QBD + \triangle DBC = \triangle QBC \end{aligned}$$

のようにして、四角形 ABCD を  $\triangle DPC$ 、または、 $\triangle QBC$  という三角形に等積変形することができます。

②  $\triangle DBC$  を等積変形する場合

右の図のように、頂点 C を通り、辺 BD に平行な直線と AB, AD の延長との交点をそれぞれ P, Q とすると、

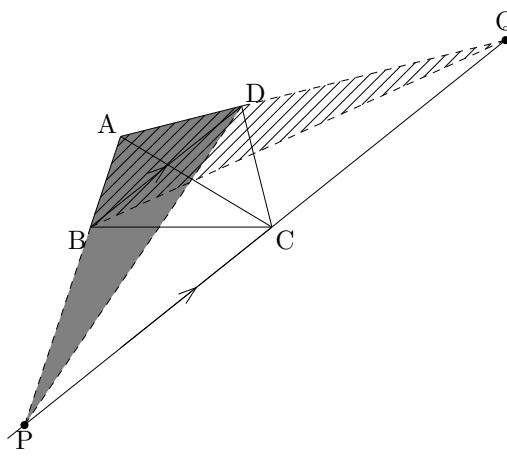
$$\triangle DBC = \triangle DBP = \triangle DBQ$$

このことから、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABD + \triangle DBC \\ &= \triangle ABD + \triangle DBP = \triangle APD \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD &= \triangle ABD + \triangle DBC \\ &= \triangle ABD + \triangle DBQ = \triangle ABQ \end{aligned}$$



のようにして、四角形 ABCD を  $\triangle APD$ 、または、 $\triangle ABQ$  という三角形に等積変形することができます。

解説のように、複数の図形に等積変形できますが、どれか 1 つの三角形に等積変形できれば問題ありません。しかし、問題によっては、どの形が好ましいのか判断しなければいけない場合もあるので、それぞれの等積変形の仕方をしっかりと理解しておきましょう。