【中２数学】式の計算

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　式の加法・減法

1.1　単項式

数や文字をいくつか掛けた積の形で表された式を**単項式**といいます。単項式は積の形で表された式であるので、次の例のように、足し算や引き算が含まれていない式になります。

（例）$3x, \qquad 2a^2b$

また、単項式に含まれる（掛け合わされた）文字の個数を、その単項式の**次数**といい、文字以外の部分を、その単項式の**係数**といいます。係数の「係」という文字には「掛ける」という意味があるので、係数は、「文字に掛けられている数」と考えることができます。

【例題 1 − 1】

次の単項式の次数と係数を答えなさい。

(1) $\frac{2}{3}x^3$　　(2) $-x^4y^2$

＜解説＞

(1) 乗法の記号「×」を用いて表すと、

$$\frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{3} \times x \times x \times x$$

となるので、文字は「x」が 3 個あります。そのことから、次数は 3 となります。
また、係数は文字「x^3」以外の部分なので、$\frac{2}{3}$ となります。このとき、文字「x^3」には、

$$\frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{3} \times x^3$$

のように、「$\frac{2}{3}$」が掛けられていることになるので、そのことからも係数を判断することができます。

(2) 乗法の記号「×」と省略された「1」を用いて表すと、

$$-x^4y^2 = -1 \times x \times x \times x \times x \times y \times y$$

となるので、文字の種類は「x」と「y」の 2 種類ですが、「x」が 4 個と「y」が 2 個あるので、文字は全部で 6 個あります。そのことから、次数は 6 となります。
また、係数は文字以外の部分なので、-1 となります。このとき、文字「x^4y^2」には

$$-x^4y^2 = -1 \times x^4y^2$$

のように「-1」が掛けられていると考えることができます。そのため、係数を「$-$」としないように注意をしてください。

【演習 1 − 1】

次の単項式の次数と係数を答えなさい。

(1) $0.3xy^2$　　(2) ab^2c^3　　(3) $-\frac{8}{27}a^3b^2$　　(4) $4\pi r^2$

1.2 多項式

2 つ以上の単項式の和の形に表される式を**多項式**といい、そのひとつひとつの単項式を多項式の**項**といいます。このことはすでに 1 次式で学習している通り、1 次式「$2x+3$」という式では、「$2x$」と「3」という 2 つの単項式の和の形で表されているので、この「$2x$」と「3」が項になります。このとき、「3」のように文字を含まない項のことを **定数項** といいます。

また、1 次式では

$$2x/+3 \longrightarrow \text{項}:2x,\ 3$$

のようにして「/」を入れて式を分割することで項を判断することを学習しましたが、多項式についても同じようにして項を判断することができます。

多項式は字の通り、「多くの項を持つ式」のことです。単項式の「単」には、「1 つ」という意味があるので、単項式とは、「1 つの項の式」という意味になります。

多項式の各項の次数のうちで、もっとも高い（大きい）ものを、その多項式の**次数**といい、次数が 2 である多項式を 2 次式、次数が 3 である多項式を 3 次式、$\cdots$、次数が n である多項式を n 次式といいます。

【例題 1 − 2】

次の多項式の項を示し、多項式の次数を答えなさい。

(1) x^2-3x-2　　(2) $2ab+2bc+2ca$

＜解説＞

加法、減法の記号「+」や「−」の前に「/」を入れて項に区切ります。

(1) 「/」を入れて多項式を区切って項を判断すると、

$$x^2/-3x/-2 \longrightarrow \text{項}:x^2,\ -3x,\ -2$$

また、各項の次数は、

$$x^2:2\text{ 次}\qquad -3x:1\text{ 次}\qquad -2:0\text{ 次}$$

となり、もっとも高い次数は 2 であることがわかるので、

多項式の次数：2

(2) 「/」を入れて区切って項を判断すると、

$$2ab/+2bc/+2ca \longrightarrow \text{項}:2ab,\ 2bc,\ 2ca$$

また、各項の次数は、

$$2ab:2\text{ 次}\qquad 2bc:2\text{ 次}\qquad 2ca:2\text{ 次}$$

となり、すべての項が 2 次であるので、もっとも高い次数も 2 ということになり、

多項式の次数：2

【演習１－２】

次の多項式の項を示し、多項式の次数を答えなさい。

(1) $y^3 - y^2 + y - 1$

(2) $a^4b + 2a^3b^2 + 3a^2b^3 + 4ab^4$

1.3 同類項

1 つの多項式で、文字の部分が同じ項（文字の種類も個数も同じ項）を**同類項**といいます。同類項は、分配法則

$$\bigcirc \times \triangle + \square \times \triangle = (\bigcirc + \square) \times \triangle$$

を利用して 1 つの項にまとめることができます。

【例題 1 − 3】

次の多項式の同類項をまとめなさい。

(1) $3a + b - a + 2b$　　(2) $4x^2 - 2x + 5 - 3x^2 - x + 1$

＜解説＞

(1) 同類項をまとめるために、まずは項に分けます。

$$3a / + b / - a / + 2b \longrightarrow 項 : 3a,\ b,\ -a,\ 2b$$

文字の種類と個数が同じである同類項は、

同類項 :「$3a$」と「$-a$」,「b」と「$2b$」

になるので、交換法則と分配法則を利用して、

$$\begin{aligned} 3a + b - a + 2b &= 3a - a + b + 2b \\ &= (3-1)a + (1+2)b \\ &= 2a + 3b \end{aligned}$$

同類項をまとめることをもっとイメージしやすくするために

$$\begin{aligned} 3\,円 + 1\,本 - 1\,円 + 2\,本 &= 3\,円 - 1\,円 + 1\,本 + 2\,本 \\ &= (3-1)\,円 + (1+2)\,本 \\ &= 2\,円 + 3\,本 \end{aligned}$$

のように文字が「円」や「本」のような単位であると考えると、同じ単位同士は計算できるけど、「3 円 + 1 本 =?」のように単位の異なるものは計算できないということと同じになります。

(2) 同類項をまとめるために、まずは項に分けます。

$$4x^2 / - 2x / + 5 / - 3x^2 / - x / + 1 \longrightarrow 項 : 4x^2,\ -2x,\ 5,\ -3x^2,\ -x,\ 1$$

この中から同類項は、

同類項 :「$4x^2$」と「$-3x^2$」,「$-2x$」と「$-x$」,「5」と「1」

このとき、「x^2」は「x」と文字の種類は同じですが、文字の個数が 2 つと 1 つで異なるので同類項ではないので注意してください。このことから、次のように同類項をまとめることができます。

$$\begin{aligned}4x^2-2x+5-3x^2-x+1&=4x^2-3x^2-2x-x+5+1\\&=(4-3)x^2+(-2-1)x+(5+1)\\&=x^2+(-3)x+6\\&=x^2-3x+6\end{aligned}$$

この式においても、

$$\begin{aligned}4\mathrm{cm}^2-2\mathrm{cm}+5-3\mathrm{cm}^2-1\mathrm{cm}+1&=4\mathrm{cm}^2-3\mathrm{cm}^2-2\mathrm{cm}-1\mathrm{cm}+5+1\\&=(4-3)\mathrm{cm}^2+(-2-1)\mathrm{cm}+(5+1)\\&=1\mathrm{cm}^2-3\mathrm{cm}+6\end{aligned}$$

のように文字を「cm^2」や「cm」という単位を使って表すと、同類項でまとめることがイメージしやすくなると思います。「$4\mathrm{cm}^2-2\mathrm{cm}$」は計算できないのと同じように、「$4x^2-2x$」も計算できません。

【演習 1 − 3】

次の多項式の同類項をまとめなさい。

(1) $-8x-4y+3-3x+4y-2+5x+2y+1$　　(2) $2x+\dfrac{5}{3}y-\dfrac{7}{4}x-2y$

1.4　多項式の加法・減法

1 次式も多項式であるので、2 つの多項式を足したり引いたりするときは、1 次式の加法・減法の計算手順と同じになります。

① 2 つの式にかっこをつけ、加法、減法の記号「+」、「−」で 2 つの式をつなぐ
② かっこをはずす
③ 文字の項、数の項をそれぞれ計算する ⟶ 同類項を計算する

【例題 1 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $(3x-5y)+(-x+4y)$　　(2) $(3x-5y)-(-x+4y)$

<解説>

この例題では、「$3x-5y$」と「$-x+4y$」という 2 つの多項式を (1) で足すこと、(2) で引くことを考えます。ただし、計算手順の①はすでに問題で行われた状態で問題が与えられているので、手順②から行うことになります。

(1)
$$\begin{aligned}(3x-5y)+(-x+4y)&=3x-5y-x+4y\\&=(3-1)x+(-5+4)y\\&=2x+(-1)y\\&=2x-y\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(3x-5y)-(-x+4y)&=3x-5y+x-4y\\&=(3+1)x+(-5-4)y\\&=4x+(-9)y\\&=4x-9y\end{aligned}$$

【演習 1 − 4】

次の 2 つの式の和と、左の式から右の式を引いた差を求めなさい。

(1) $x+7y,\ 5x-4y$　　(2) $2a+3b,\ a+4b$　　(3) $4x^2-2x+5,\ 3x^2+x-1$

1.5　多項式の加法・減法（縦書き）

多項式の加法・減法では、同類項を上下にそろうように並べることで、縦書きで計算することもできます。このとき、(2) のような減法の計算がしづらい場合、減法を加法（引く式の各項の符号を変える）に直すことで計算しやすくすることができます。

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & 3x & - & 5y \\ +) & -\ x & + & 4y \\ \hline & 2x & - & y \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrr} & 3x & - & 5y \\ -) & -\ x & + & 4y \\ \hline & 4x & - & 9y \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrr} & 3x & - & 5y \\ +) & x & - & 4y \\ \hline & 4x & - & 9y \end{array}$$

【例題 1 − 5】

次の計算をしなさい。

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & -\ x & + & 2y \\ +) & 2x & - & 3y \\ \hline \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrrr} & -5x & - & 6y & + & 3 \\ -) & 6x & + & 3y & - & 4 \\ \hline \end{array}$$

<解説>

減法を加法に直して計算する場合、符号に注意して計算しましょう。

(1)
$$\begin{array}{rrrr} & -\ x & + & 2y \\ +) & 2x & - & 3y \\ \hline & x & - & y \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrrr} & -\ 5x & - & 6y & + & 3 \\ -) & 6x & + & 3y & - & 4 \\ \hline & -11x & - & 9y & + & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrrr} & -\ 5x & - & 6y & + & 3 \\ +) & -\ 6x & - & 3y & + & 4 \\ \hline & -11x & - & 9y & + & 7 \end{array}$$

【演習 1 − 5】

次の計算をしなさい。

(1)
$$\begin{array}{rrrrrr} & 4x & - & y & - & 8 \\ +) & 6x & - & 2y & + & 5 \\ \hline \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrrr} & 2x & - & 5y & - & 3 \\ -) & -4x & + & 3y & + & 5 \\ \hline \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rrrrrr} & -10x^2 & + & 6x & - & 9 \\ +) & 5x^2 & - & 4x & + & 7 \\ \hline \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rrrrrr} & -9x^2 & + & 5x & - & 8 \\ -) & 4x^2 & - & 3x & + & 6 \\ \hline \end{array}$$

1.6 多項式と数の乗法

多項式の加法や減法では、次の手順で計算を行います。

① かっこをはずす
かっこのすぐ外に数がある（多項式と数の乗法）場合には、分配法則を利用

分配法則：$\triangle \times (\bigcirc + \square) = \triangle \times \bigcirc + \triangle \times \square$

② 同類項をまとめる

【例題 1 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $3(x^2+3x+4)+(x^2+x-5)$　(2) $7(a+2b-3)-3(2a-b-6)$

＜解説＞

(1) $3(x^2+3x+4)$ は分配法則を利用して、

$$3(x^2+3x+4)=3\times x^2+3\times 3x+3\times 4=3x^2+9x+12$$

のようにしてかっこをはずすことができます。$+(x^2+x-5)$ はそのままかっこをはずせばよいので、あとは同類項をまとめて、

$$\begin{aligned}3(x^2+3x+4)+(x^2+x-5)&=3x^2+9x+12+x^2+x-5\\&=(3+1)x^2+(9+1)x+(12-5)\\&=4x^2+10x+7\end{aligned}$$

(2) $7(a+2b-3)$, $-3(2a-b-6)$ をそれぞれ分配法則を利用してかっこをはずすと、

$$\begin{aligned}7(a+2b-3)&=7\times a+7\times 2b+7\times(-3)=7a+14b-21\\-3(2a-b-6)&=-3\times 2a+(-3)\times(-b)+(-3)\times(-6)=-6a+3b+18\end{aligned}$$

とできるので、同類項をまとめれば、

$$\begin{aligned}7(a+2b-3)-3(2a-b-6)&=7a+14b-21-6a+3b+18\\&=(7-6)a+(14+3)b+(-21+18)\\&=a+17b-3\end{aligned}$$

【演習 1 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $3(x^2-xy)-2(xy-4x^2)$　(2) $4(a+b)-6(a-4b)+(3a+6b)$

1.7 分数を含む多項式の計算

分数を含む多項式の加法・減法では、数のときと同じように通分して計算をします。このとき、方程式の解き方と同じようにして、分母を払う（分母の最小公倍数を掛けて分母をなくす）ことはできないので注意してください。

文字式の表し方では、分子や分母に項を複数含む場合に、分数を表す横棒によってひとまとまりであることがわかるため、かっこが省略されています。

$$\frac{(x+2)}{3} \longrightarrow \frac{x+2}{3}$$

そのため、計算するときにはひとまとまりであることを意識することが大切です。ひとまとまりであることを忘れてしまうような人は、あらかじめかっこをつけて計算するようにしましょう。

【例題 1 － 7】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x-3y}{4}-\dfrac{x-4y}{6}$　　(2) $7x-3y-\dfrac{5x-4y}{2}$

＜解説＞

(1) 「$x-3y$」、「$x-4y$」がひとまとまりであることを意識して、通分して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{x-3y}{4}-\frac{x-4y}{6} &= \frac{(x-3y)\times 3}{4\times 3}-\frac{(x-4y)\times 2}{6\times 2}\\ &= \frac{3x-9y}{12}-\frac{2x-8y}{12}\\ &= \frac{(3x-9y)-(2x-8y)}{12}\\ &= \frac{3x-9y-2x+8y}{12}\\ &= \frac{(3-2)x+(-9+8)y}{12}\\ &= \frac{x-y}{12}\end{aligned}$$

(2) 「$7x-3y$」、「$5x-4y$」がひとまとまりであることを意識して、通分して計算します。

$$\begin{aligned}7x-3y-\frac{5x-4y}{2} &= \frac{7x-3y}{1}-\frac{5x-4y}{2}\\ &= \frac{(7x-3y)\times 2}{1\times 2}-\frac{5x-4y}{2}\\ &= \frac{14x-6y}{2}-\frac{5x-4y}{2}\\ &= \frac{(14x-6y)-(5x-4y)}{2}\\ &= \frac{14x-6y-5x+4y}{2}\\ &= \frac{(14-5)x+(-6+4)y}{2}\\ &= \frac{9x-2y}{2}\end{aligned}$$

【演習１－７】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{4a-3b}{5}-\dfrac{5a-4b}{7}$

(2) $\dfrac{5x+2y}{3}-\dfrac{3x-(x-2y)}{2}$

2　単項式の乗法・除法

2.1　単項式の乗法

単項式は、「数や文字をいくつか掛けた積の形で表された式」であったので、その乗法を考えるとき、すべての数や文字は掛け算の形で表されることになります。そのため、単項式どうしの乗法は、

乗法の交換法則：$\bigcirc \times \square = \square \times \bigcirc$,　　乗法の結合法則：$(\bigcirc \times \square) \times \triangle = \bigcirc \times (\square \times \triangle)$

を利用して、数は数どうし、同じ文字は同じ文字どうし計算することができます。

また、累乗の形の乗法は、次の**指数法則**を利用することができます。

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$\begin{aligned} a^2 \times a^3 &= (a \times a) \times (a \times a \times a) \\ &= a^{2+3} = a^5 \end{aligned}$$

② $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$$\begin{aligned} (a^2)^3 &= (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) \\ &= a^{2 \times 3} = a^6 \end{aligned}$$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= (a \times b) \times (a \times b) \\ &= (a \times a) \times (b \times b) \\ &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

【例題 2 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $2a \times (-3b)$　　(2) $(-2x)^3$　　(3) $2a^2b \times 3ab^3$

<解説>

(1) まず、乗法の交換法則や結合法則を利用しやすくするために、省略されている乗法の記号「×」を、省略しない形で表してみます。

$$2a \times (-3b) = 2 \times a \times (-3) \times b$$

次に、乗法の交換法則を利用して、順番を入れ替えます。

$$2 \times a \times (-3) \times b = 2 \times (-3) \times a \times b$$

さらに、乗法の結合法則を利用して、数は数どうし計算するようにします。

$$2 \times (-3) \times a \times b = \{2 \times (-3)\} \times (a \times b)$$

以上のことから、

$$2a \times (-3b) = -6ab$$

(2) （1）と同じ手順で計算します。

$$\begin{aligned}(-2x)^3 &= (-2 \times x) \times (-2 \times x) \times (-2 \times x)\\ &= \{(-2) \times (-2) \times (-2)\} \times (x \times x \times x)\\ &= (-8) \times x^3 = -8x^3\end{aligned}$$

これを指数法則を用いれば、

$$(-2x)^3 = (-2)^3 \times x^3 = -8x^3$$

(3) (1) と同じ手順で計算して、

$$\begin{aligned}2a^2b \times 3ab^3 &= (2 \times a \times a \times b) \times (3 \times a \times b \times b \times b)\\ &= (2 \times 3) \times (a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)\\ &= 6a^3b^4\end{aligned}$$

この計算も指数法則を用いれば、

$$\begin{aligned}2a^2b \times 3ab^3 &= (2 \times 3) \times (a^2 \times a) \times (b \times b^3)\\ &= 6 \times a^{2+1} \times b^{1+3} = 6a^3b^4\end{aligned}$$

【演習２－１】

次の計算をしなさい。

(1) $2a \times (-3a)^2$　(2) $18ab \times \left(-\dfrac{1}{3}a\right)^2$　(3) $\dfrac{1}{3}ab^2 \times (-3ab)^2$　(4) $(-3a^2b)^3 \times (-ab^2)^4$

2.2 単項式の除法

除法は逆数を用いて乗法にすることができるので、単項式の除法も単項式の乗法と同じようにして計算することができます。また、累乗の形の除法は、次の**指数法則**を利用することができます。

① $m > n$ のとき：$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$$\begin{aligned} a^5 \div a^3 &= a^5 \times \frac{1}{a^3} \\ &= \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} \\ &= a^{5-3} = a^2 \end{aligned}$$

② $m < n$ のとき：$a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

$$\begin{aligned} a^3 \div a^5 &= a^3 \times \frac{1}{a^5} \\ &= \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} \\ &= \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

【例題 2 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $24a^2b \div 6a$

(2) $\dfrac{3}{8}xy^2 \div \dfrac{1}{2}y$

＜解説＞

(1) 除法を乗法に直して計算すると、

$$\begin{aligned} 24a^2b \div 6a &= 24a^2b \times \frac{1}{6a} \\ &= 24 \times a \times a \times b \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{a} \\ &= \left(\cancel{24}^{4} \times \frac{1}{\cancel{6}^{1}}\right) \times \left(a \times \cancel{a}^{1} \times \frac{1}{\cancel{a}^{1}}\right) \times b \\ &= 4ab \end{aligned}$$

また、除法を分数にすることで計算できます。

$$\begin{aligned} 24a^2b \div 6a &= \frac{24a^2b}{6a} \\ &= \frac{\cancel{24}^{4} \times \cancel{a}^{1} \times a \times b}{\cancel{6}^{1} \times \cancel{a}^{1}} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

(2) 「$\frac{1}{2}y$」は、「$\frac{1}{2}$」という分数と「y」という分数でないものが混ざった形をしています。このような形だと逆数をどのようにして考えればいいのか迷います。そこで、

$$\frac{1}{2}y \longrightarrow \frac{y}{2}$$

のように分子と分母がはっきりした形にしておくことで、分子と分母を逆にしやすく、逆数で迷ったりミスをせずにすみます。

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{8}xy^2 \div \frac{1}{2}y &= \frac{3}{8}xy^2 \times \frac{2}{y} \\
&= \frac{3}{8} \times x \times y \times y \times 2 \times \frac{1}{y} \\
&= \left(\frac{3}{\cancel{8}^{4}} \times \cancel{2}^{1}\right) \times x \times \left(y \times \cancel{y}^{1} \times \frac{1}{\cancel{y}^{1}}\right) \\
&= \frac{3}{4}xy \quad \left(= \frac{3xy}{4}\right)
\end{aligned}
$$

全体を通じてかなり細かく途中計算をしましたが、実際の計算ではここまで細かくする必要はありません。ただし、このような変形をして計算をしているというイメージを持って計算するようにしてください。

【演習 2 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $12x^3y \div (-3xy)$ (2) $a^2b \div \dfrac{1}{4}a$ (3) $24a^2b^2 \div (-4ab) \div (-3a)$

2.3 単項式の乗除

除法は逆数を用いて乗法にすることができるので、単項式の乗法と除法が混じった単項式の計算では、すべて乗法にして計算します。また、このとき、必要に応じて指数法則を利用し、符号のミスをなくすために、式の中に含まれる負の数の数を数えて、先に符号を決めてしまいます。

【例題２－３】

次の計算をしなさい。

(1) $a^2 \times (-a)^3 \div a$　(2) $4x \times 3y^2 \div (-6xy)$　(3) $2a^2b \times 3b \div ab^2$　(4) $(-3a)^2 \div 3a \times 2a$

＜解説＞

(1) $(-a)^3$ と負の数が 3 個あるので、計算結果には負の符号がつきます。

$$a^2 \times (-a)^3 \div a = -\left(a^2 \times a^3 \times \frac{1}{a}\right) = -a^4$$

(2) $(-6xy)$ と負の数が 1 個あるので、計算結果には負の符号がつきます。

$$4x \times 3y^2 \div (-6xy) = -\left(4x \times 3y^2 \times \frac{1}{6xy}\right) = -2y$$

(3) 負の数は含まれていないので、計算結果には符号はつきません（正の符号は省略）。

$$2a^2b \times 3b \div ab^2 = 2a^2b \times 3b \times \frac{1}{ab^2} = 6a$$

(4) $(-3a)^2$ と負の数が 2 個あるので、計算結果には符号はつきません（正の符号は省略）。

$$(-3a)^2 \div 3a \times 2a = 3^2 \times a^2 \times \frac{1}{3a} \times 2a = 6a^2$$

【演習２－３】

次の計算をしなさい。

(1) $\frac{1}{2}x^2y \div (-x) \times 4y$　(2) $(x^2y)^2 \div (x^4y^3) \times (-xy^2)$

(3) $3b^2 \times (-2ab)^2 \div 4ab^3$　(4) $-2x^2 \div \left(-\frac{3}{2}x^3y^2\right) \times \left(-\frac{3}{4}xy\right)^2$

2.4 式の値

代入する数のことを**文字の値**、代入して計算した結果を **式の値** といいます。

式の値を求めるとき、文字の値をその式に直接代入して求めることもできますが、代入する文字が多いような場合には、まずは式を計算して簡単にしてから代入する方が楽になる場合があります。

【例題 2 − 4】

$a = 5,\ b = -3$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $8ab \times (-7a) \div 4ab$　　(2) $12a^3b \div 6a^2 \times (-2b)$

＜解説＞

(1) 文字の値を代入する前に式を簡単にすると、

$$8ab \times (-7a) \div 4ab = -\left(8ab \times 7a \times \frac{1}{4ab}\right) = -14a$$

とできるので、この式に文字の値を代入して、

$$-14a = -14 \times 5 = -70$$

(2) まずは式を簡単にして、

$$12a^3b \div 6a^2 \times (-2b) = -\left(12a^3b \times \frac{1}{6a^2} \times 2b\right) = -4ab^2$$

この式に文字の値を代入して、

$$-4ab^2 = -4 \times 5 \times (-3)^2 = -180$$

【演習 2 − 4】

$x = -2,\ y = 3$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $2x^2 \div xy \times 3y$　　(2) $12xy^2 \div 4xy \times 2x$　　(3) $(-x^2)y^3 \times 2x \div \frac{1}{3}(xy)^2$

3　文字式の利用

3.1　文字式の利用

文字式を使って 2 つの数量の関係を導くと、文字の値は定まっているわけではないので、どんなときでもそのような 2 つの数量関係になります。逆に言えば、文字式で 2 つの数量の関係を導くことが難しい場合には、ある特定の値について 2 つの数量の関係を考えてしまうこともできてしまいます。そのため、文字式の扱いに慣れていなかったり、手っ取り早く数量の関係を知りたいような場合では、文字式を利用するのではなく、ある特定の場合について考えることも有用な手段になります。

また、文字式では次のような文字がよく利用されます。

① 数：n（「number」の頭文字）	② 自然数：n（「natural number」の頭文字）
③ 面積：S（「spread」の頭文字）	④ 体積：V（「volume」の頭文字）
⑤ 高さ：h（「height」の頭文字）	⑥ 長さ：l（「length」の頭文字）
⑦ 距離：d（「distance」の頭文字）	⑧ 半径：r（「radius」の頭文字）
⑨ 時間：t（「time」の頭文字）	⑩ 速さ：v（「velocity」の頭文字）

これらの文字を必ず使わないといけないという決まりはありませんが、文字とその意味の関係を理解しておくと、何を表しているのかということも文字を見ただけでわかることにもなります。そのため是非覚えて使えるようにしておきましょう。

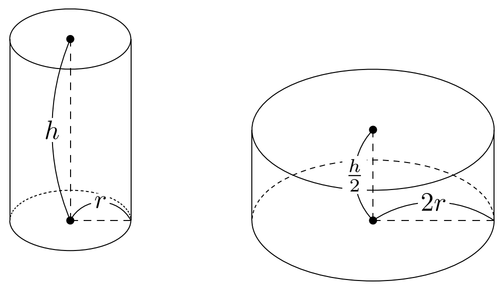
【例題 3 − 1】

底面の半径が r、高さが h の円柱があります。次の問いに答えなさい。

(1) 円柱の体積を r, h を用いて表しなさい。ただし、円周率は π とします。

(2) 円柱の底面の半径を 2 倍にし、高さを半分にしたときの円柱の体積は、元の円柱の体積の何倍になりますか。

＜解説＞



文字式で考えにくい場合は、$r = 1, h = 2$ などの具体的な数でどのように表されるかを考えてみてください。

(1) 底面の半径が r、高さが h の円柱の体積は、

$$\begin{aligned}(\text{円柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ})\\ &= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h\end{aligned}$$

(2) 円柱の底面の半径を 2 倍になると、半径は $2r$ になり、高さは h の半分で $\dfrac{h}{2}$ になるとき、この円柱の体積は、

$$\begin{aligned}(\text{円柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ})\\ &= (\pi \times 2r \times 2r) \times \frac{h}{2}\\ &= 2\pi r^2 h \quad (= 2 \times \pi r^2 h)\end{aligned}$$

となり、元の体積「$\pi r^2 h$」と比べると 2 倍になっていることがわかります。

3.2 整数の表し方

偶数は、2 で割り切れる数、つまり、2 の倍数であるので、小さいほうから、

$$2 \times 1\ (=2),\quad 2 \times 2\ (=4),\quad 2 \times 3\ (=6),\quad 2 \times 4\ (=8),\quad 2 \times 5\ (=10),\quad \cdots$$

というように表すことができます。このことから、偶数は次のような形で表される数だと考えることができます。

$$(\text{偶数}) = 2 \times (\text{自然数})$$

このとき、n を自然数とすると、次のように文字式で表すことができます。

$$(\text{偶数}) = 2 \times n = 2n$$

また、奇数は、偶数よりも 1 多い（少ない）数なので、文字を使って次のように表すことができます。

$$2n+1 \quad \text{または} \quad 2n-1$$

さらに、3 の倍数や 4 の倍数などについても、自然数 n を利用して次のように表すことができます。

$$3\text{の倍数}:3n, \qquad 4\text{の倍数}:4n, \qquad 5\text{の倍数}:5n, \qquad \cdots$$

【例題 3 − 2】

2 つの偶数の和は偶数になります。このわけを文字の式を使って説明しなさい。

＜解説＞

2 つの偶数を $2n$, $2n$ のように表せそうですが、この表し方では問題があります。なぜなら、「$2n$」と「$2n$」は全く同じ偶数であることを示すからです。「2 つの偶数」とは、「2 つの同じ偶数」というわけではありません。そのため、同じものではないことを示すために、それぞれの偶数を表すのに異なる文字を使う必要があります。（自然数を表す文字には「n」がよく使われるため、もう 1 つの文字にはアルファベット順で「n」のすぐ隣にある「m」がよく使われます。）

そこで、m, n を自然数とすると、2 つの偶数は $2m$, $2n$ のように表せるので、2 つの偶数の和は次のようになります。

$$2m+2n$$

あとは、これが偶数になることを示せばよいのですが、先程も説明したとおり、偶数は「$2 \times (\text{自然数})$」という形で表される数です。そのことから、

$$2m+2n = 2(m+n)$$

のようにして、分配法則を利用して変形すると、m, n は自然数であるので、その和である「$m+n$」も自然数です。つまり、

$$2(m+n) \longrightarrow 2 \times (\text{自然数})$$

ということになるので、これで 2 つの偶数の和が偶数になることを示せたことになります。

＜模範解答＞

m, n を自然数として、2 つの偶数を $2m, 2n$ とすると、2 つの偶数の和は

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

と表せる。ここで、m, n は自然数であるので、$m + n$ も自然数となり、$2(m + n)$ は偶数である。よって、2 つの偶数の和は偶数である。

（終わり）

問題文で使われていない文字を解答で使う場合は、

「$m,\ n$ を自然数として、$\cdots$」

のように、その文字が何を表しているのかということを明記する必要があります。説明や証明は「自分はわかるからいい」というものではなく、他の人が読んでもわかるようにしなければいけません。そのためにもまずはお手本を真似して、書き方の練習をしてみましょう。

3.3 等式の変形

2 つ以上の文字をふくむ等式で、その中のある 1 つの文字を他の文字で表すことを、その**文字について解く**といいます。

ある等式を 1 つの文字について解く場合、等式の性質を利用して、等式の両辺に同じ数を足したり、引いたり、掛けたり、割ったりすることで変形します。

【例題 3 − 3】

次の式を (　) の中の文字について解きなさい。

(1) $S = \frac{1}{2}ah$　(a)　　(2) $m = \frac{a+b+c}{3}$　(b)

<解説>

(1) 「a について解く」ので、「$a =$」という形を作ります。そのために、左辺に a がほしいので、まずは左辺と右辺を入れかえます。

$$\frac{1}{2}ah = S$$

次に、邪魔な $\frac{1}{2}$ と h を右辺に移します。$\frac{1}{2}$ と h は掛け算しているので、逆数にして右辺に移します。

$$a = S \times 2 \times \frac{1}{h} = \frac{2S}{h}$$

(2) 「b について解く」ので、「$b =$」という形を作るために、左辺と右辺を入れかえます。

$$\frac{a+b+c}{3} = m$$

これで左辺に b を持ってくることができました。次に、邪魔な $a, b, 3$ を右辺に移しますが、一番移しやすい分母の 3 を右辺に移します。

$$a + b + c = m \times 3$$

そして、a, c を移項して、

$$b = 3m - a - c$$

【演習 3 − 3】

次の式を (　) の中の文字について解きなさい。

(1) $S = \frac{1}{2}(a+b)h$　(b)　　(2) $2(x-y) = y - 6$　(y)