【中１数学】空間図形

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　いろいろな立体

1.1　多面体

平面だけで囲まれた立体を**多面体**といいます。普通、立体を作るためには「1 つ」の平面だけでなく「多」くの平面が必要であるので、そのような名前になっていると思ってください。

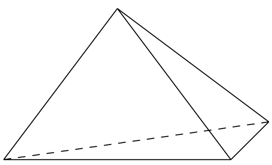
そして、多面体のうち、へこみのない多面体を**凸多面体**といいます。凸多面体の頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f とすると、

$$v - e + f = 2 \qquad ((\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2)$$

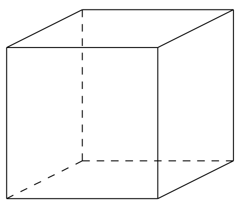
という関係が成り立ち、これを**オイラーの多面体定理**といいます。

また、合同な多角形で囲まれ、頂点に集まる面の数がすべて等しい多面体を**正多面体**といい、正多面体は次の 5 種類だけ存在します。

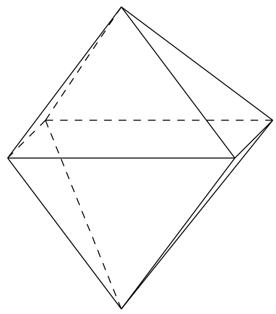
① 正四面体



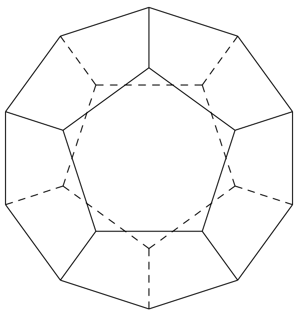
② 正六面体（立方体）



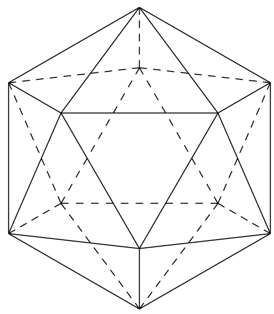
③ 正八面体



④ 正十二面体



⑤ 正二十面体



【例題 6 − 1】

正多面体について、次の表を完成させなさい。

	面の形	1 つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体					
正六面体					
正八面体					
正十二面体					
正二十面体					

＜解説＞

正多面体の図を参考に、空欄を埋めていきます。

- 面の形
  正多面体は、合同な多角形で囲まれているので、それぞれの面の辺の長さと角の大きさは同じになります。つまり、それぞれの面は正多角形になります。
- 1 つの頂点に集まる面の数
  正多面体は、頂点に集まる面の数がすべて等しいので、どれか 1 つの頂点に着目して、そこに集まる面の数を数えます。
- 面の数
  多面体は、その面の数によって

  4 つの面をもつ立体 $\longrightarrow$ 四面体

  のように名前がつけられているので、立体の名前を見ることで数がわかります。また、そのようになっていることを正多面体の図でも確認しておきましょう。
- 辺の数
  正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1 つの面にいくつ辺があるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1 つの面における辺の数」に「面の数」を掛けた分だけ辺はあることになりますが、正多面体では、それぞれの辺を重ね合わせることで立体を作ることになるので、その辺の数は、

  $$(\text{辺の数}) = (1\text{ つの面における辺の数}) \times (\text{面の数}) \div 2$$

  という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めることもできます。
- 頂点の数
  正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1 つの面にいくつ頂点あるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1 つの面における頂点の数」に「面の数」を掛けた分だけ頂点はあることになりますが、正多面体では、それぞれの頂点を重ね合わせること

で立体を作ることになるので、その頂点の数は、

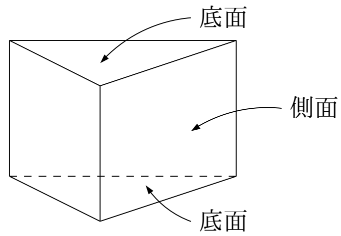
$$(\text{頂点の数}) = (1\ \text{つの面における頂点の数}) \times (\text{面の数}) \div (1\ \text{つの頂点に集まる面の数})$$

という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めることもできます。

以上のことから、表は次のようになります。

	面の形	1 つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体	正三角形	3	4	6	4
正六面体	正方形	3	6	12	8
正八面体	正三角形	4	8	12	6
正十二面体	正五角形	3	12	30	20
正二十面体	正三角形	5	20	30	12

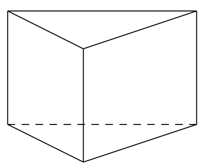
1.2　角柱と円柱

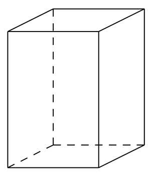


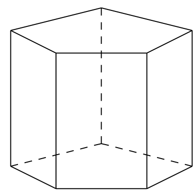
右の図のような柱状の立体には、形と大きさの等しい（合同）図形が 2 つあり、この面を**底面**といいます。また、底面以外の面（横の面）を**側面**といいます。

このように、2 つの底面を持つ柱状の立体を**角柱**といい、底面の形によって次のように名前がつけられます。

① 三角柱（底面が三角形）　② 四角柱（底面が四角形）　③ 五角柱（底面が五角形）





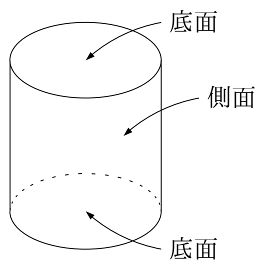


また、底面が正多角形である角柱を**正角柱**といい、底面の形によって

正三角柱（底面が正三角形）、正四角柱（底面が正方形）、正五角柱（底面が正五角形）、· · ·

のように名前がつけられます。

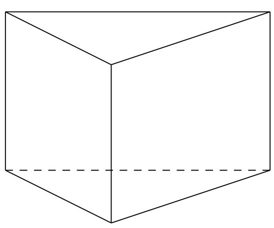
右の図のように、底面が円である場合には、**円柱**といいます。

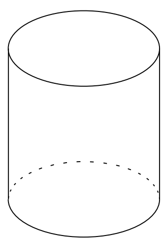


【例題 1 − 2】

次の立体の展開図をかきなさい。

(1) 三角柱　(2) 円柱

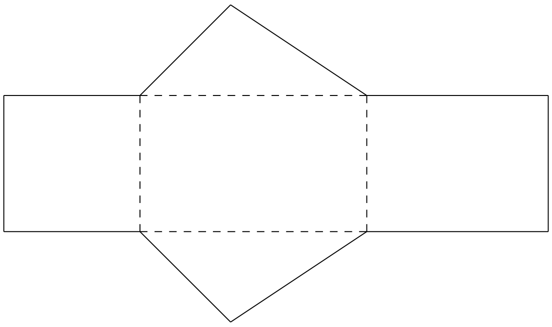




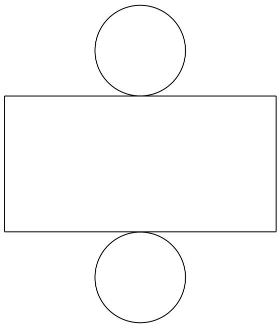
＜解説＞

展開図をかくには、見取り図から、面全体がばらばらにならないように、辺にそって切り離していくようにして考えます。長さは特に明記されていないので、およその形があっていれば問題ありません。

(1) 三角柱の展開図は下の図のようになります。切り離し方によっては、これとは異なる展開図になる場合もありますが、組み立てて三角柱にすることができれば問題ありません。



(2) 円柱の展開図は次の図のようになります。基本的に辺にそって切り離していきますが、円柱の場合には上下の底面をつなぐ辺がないため、どこか適当なところで切って、側面を広げます。底面の円の位置は、左右のどこにずれても円柱を作ることができるので、展開図にかくときも、解答例の円の位置より左右にずれていてもかまいません。

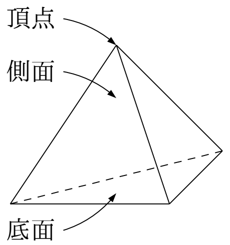


側面の横の長さをどのくらいにすればいいのか難しいところですが、そのような詳しいことについては別の単元で学習をします。ここでは、角柱や円柱の展開図では、側面は必ず長方形になり、また、その側面の上下にそれぞれ底面がくっつくのだということを把握しておきましょう。

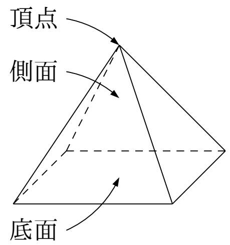
1.3　角錐と円錐

次の図のように、1 つの底面（多角形）と側面、頂点を持つとがった立体を**角錐（かくすい）**といい、、底面の形によって次のように名前がつけられます。

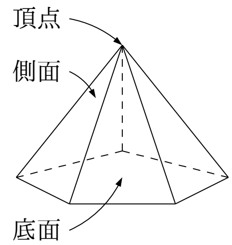
① 三角錐（底面が三角形）



② 四角錐（底面が四角形）

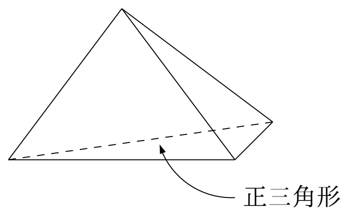


③ 五角錐（底面が五角形）

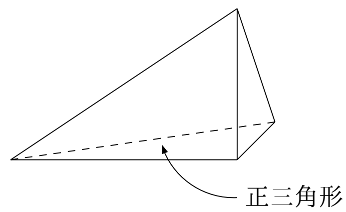


また、底面が正多角形で、側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐を**正角錐**といいます。角錐と異なり、底面が正多角形であっても正角錐とはならない角錐があるので注意をしましょう。

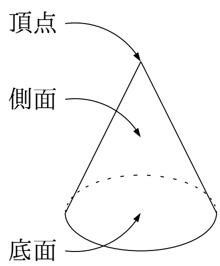
① 正三角錐（正四面体）



② 三角錐（正三角錐ではない）



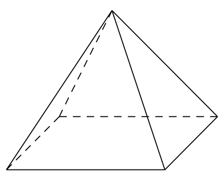
次の図のように、底面が円である場合は**円錐**といいます。



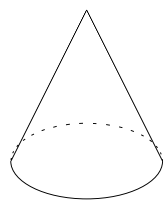
【例題 1 − 3】

次の立体の展開図をかきなさい。

(1) 正四角錐



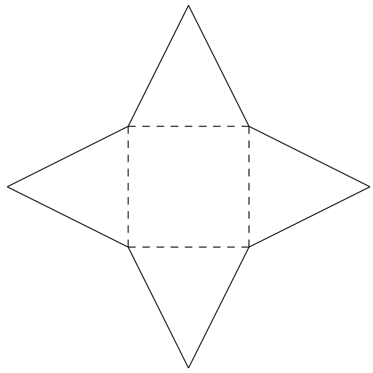
(2) 円錐



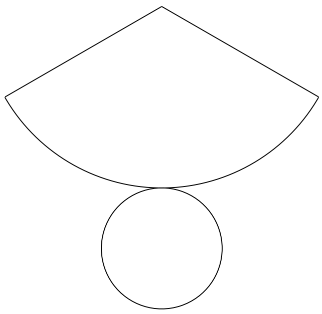
＜解説＞

展開図をかくには、見取り図から、面全体がばらばらにならないように、辺にそって切り離していくようにして考えます。長さは特に明記されていないので、およその形があっていれば問題ありません。

(1) 正四角錐の展開図の一例です。正四角錐なので、底面は正方形、側面は二等辺三角形になるので、その点に注意して展開図をかきます。

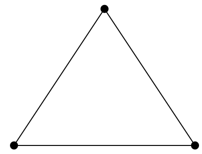


(2) 円錐の展開図の一例です。円錐の展開図における側面はおうぎ形になります。また、展開図の底面は、おうぎ形の孤にそっていればどの位置にあっても問題ありません。
おうぎ形の中心角の大きさなど、細かな部分については別の単元で学習をするので、この単元では、どのような形になるのかのおよそのイメージができるようにしてください。



2　直線や平面の位置関係

2.1　平面の決定



平らに限りなく広がっている面を**平面**といいます。

同じ直線上にない 3 つの点を結ぶと、右の図のように三角形をつくることができます。このことから、同じ直線上にない 3 つの点によって、三角形という最も基本的な面を作ることができ、この面を限りなく広げていけば 1 つの「平面」をつくることができます。つまり、平面がただ 1 つに決まるための条件は、「同じ直線上にない 3 つの点が決まる」ということになります。

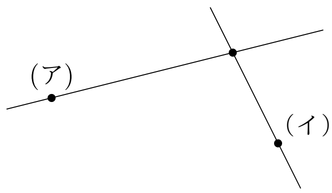
【例題 2 − 1】

次の直線や点を含む平面が、ただ 1 つに決まるものを選びなさい。

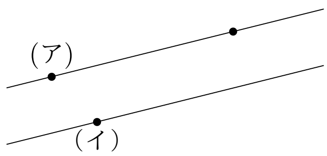
① 交わる 2 直線　② 平行な 2 直線　③ 1 直線とその上にない 1 点

④ 1 直線上にない 3 点　⑤ 1 直線上にない 4 点

＜解説＞



① 交わる 2 直線を決定するための条件を考えます。
1 つの直線を決定するためには 2 つの点が必要なので、ある 2 つの点を通る直線を考えます（ア）。さらに、その 2 つの点とは別にもう 1 つ点をとり、その点をすでにある 2 つの点のうちの 1 つと結ぶと、交わる 2 直線を作ることができます（イ）。以上のことから、「交わる 2 直線」は、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まることになり、ただ 1 つの平面を決めることになります。



② 平行な 2 直線を決定するための条件を考えます。
まず、1 つの直線を決定するためには 2 つの点が必要です（ア）。そして、その直線上にないある 1 点が決まれば、その直線と平行になる直線が決まります（イ）。以上のことから、「平行な 2 直線」は、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まることになり、ただ 1 つの平面を決めることになります。

③ 1 直線を決めるには 2 つの点が必要で、その上にない 1 点により、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まることになります。つまり、「1 直線とその上にない 1 点」は、ただ 1 つの平面を決めることになります。

④ これは説明するまでもなく、「1 直線上にない 3 点」は、ただ 1 つの平面を決めます。

⑤ 同じ直線上にない 3 つの点により平面はただ 1 つに決まります。4 つ目のもう 1 つの点が同じ平面上にあれば、平面をただ 1 つに決めることもできますが、そうでない場合には平面が 1 つに決まることはありません。

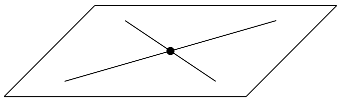
以上のことから、平面がただ 1 つに決まるものは、

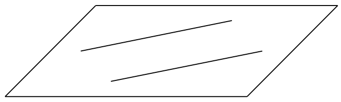
①, ②, ③, ④

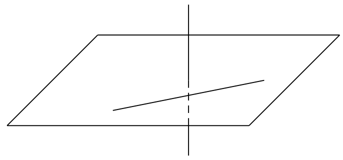
2.2　2 直線の位置関係

空間内の 2 直線の位置関係には、次のような 3 つの場合があります。

(ｉ) 1 点で交わる　　(ii) 平行　　(iii) **ねじれの位置**







(i), (ii) は「同じ平面上にある」2 直線の位置関係で、(ii) の 2 直線は、どこまで延長しても交わりません。(iii) は「同じ平面上にない」2 直線の位置関係で、どこまで延長しても交わらず、空間内の 2 直線の位置関係特有のものになります。

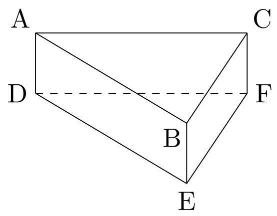
【例題 2 − 2】

右の三角柱で、AD と次のような関係にある辺を答えなさい。

(1) 平行な辺

(2) 垂直に交わる辺

(3) ねじれの位置にある辺



＜解説＞

三角柱には AD 以外に、AB, BC, CA, BE, CF, DE, EF, FD という 8 つの辺があるので、その中から条件に当てはまる辺を選びます。

(1) 8 つの辺の中で、AD とどこまで延長しても交わらない辺は BC, BE, CF, EF の 4 つあります。その中で、

BE, CF

の 2 つの辺は、面 ADEB, 面 ADFC のように、辺 AD と同じ面にある辺になるので、この 2 つの辺が、同じ平面にあって、どこまで延長しても交わらない平行な辺になります。

(2) 8 つの辺の中で AD と交わる辺には、次の 4 つがあります。

AB, CA, DE, FD

この 4 つの辺すべてが AD と垂直に交わります。見取り図では実際の角度と異なる部分があるので、わかりにくい場合は、三角柱を実際に組み立てて考えてみてください。

(3) 8 つの辺の中で、AD とどこまで延長しても交わらない辺は、(1) で考えたように BC, BE, CF, EF の 4 つあります。そして、その中で AD と同じ平面上にない辺は、(1) 以外の辺ということになるので、

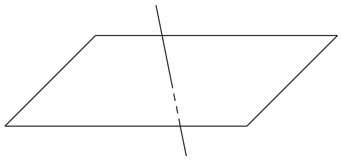
BC, EF

が AD とねじれの位置にある辺ということになります。

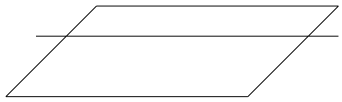
2.3　直線と平面の位置関係

直線と平面の位置関係には、次の 3 つの場合があります。

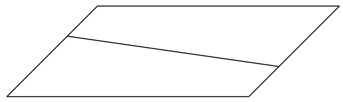
(i) 交わる（1 点で交わる）



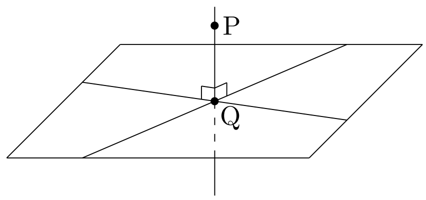
(ii) 平行である



(iii) 直線は平面上にある



また、直線と平面が交わるとき、直線が平面上のすべての直線に垂直である場合には、その直線と平面は**垂直**であるといいます。しかし、交わる 2 直線は 1 つの平面を決定するので、平面上の 2 直線と垂直であれば、直線と平面は垂直であることになります。



そして、点 P と平面上の点との 2 点間の距離を考えると、図のように平面上に点 Q があるとき、2 点 P, Q 間の距離は最も短くなり、この線分 PQ の長さを**点 P と平面との距離**といいます。

【例題 2 − 3】

下の直方体について、次の面や辺をいいなさい。

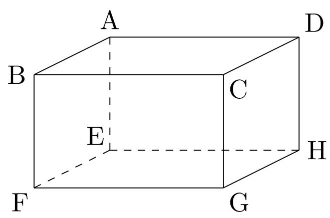
(1) 辺 AB を含む面

(2) 辺 AB と垂直な面

(3) 辺 AB と平行な面

(4) 面 ABCD と垂直な辺

(5) 面 ABCD と平行な辺



<解説>

面を答えるときは、その面に含まれるある頂点を基準に、反時計（左）回りに 1 周するように頂点を並べて答えます。基本的には反時計（左）回りに 1 周しますが、時計（右）回りで答えても間違いではありません。ただし、必ず 1 周するようにして頂点を並べるようにしましょう。

辺の場合は、「辺 AB」であっても「辺 BA」であっても同じものを表すので、どちらで答えても問題ありません。

(1) 辺 AB を含む面は次の 2 つです。

面 ABCD, 面 ABFE

(2) 辺 AB と垂直な面を考えるために、まず辺 AB と垂直な辺を考えると、辺 AD, 辺 BC, 辺 AE, 辺 BF の 4 つあります。辺 AB と 2 つの辺が垂直であれば、その辺を含む面は垂直であることになるので、そのような面は次の 2 つの面になります。

- 辺 AD と辺 AE を含む面 AEHD
- 辺 BC と辺 BF を含む面 BFGC

(3) 辺 AB と平行な面は、辺 AB とその面をどこまで延長しても交わらない面です。そのような面は次の 2 つ

の面になります。

面 CGHD, 面 EFGH

(4) 面 ABCD と垂直な辺は、面 ABCD 上にある 2 つの辺と垂直な辺です。そのような辺には次の 4 つがあります。

- 辺 AB と辺 DA に垂直な辺 AE
- 辺 AB と辺 BC に垂直な辺 BF
- 辺 BC と辺 CD に垂直な辺 CG
- 辺 CD と辺 DA に垂直な辺 DH

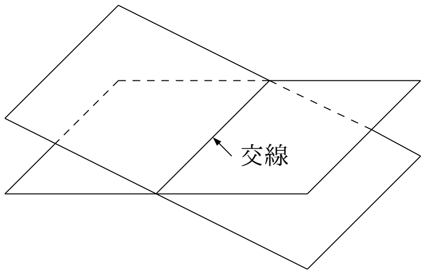
(5) 面 ABCD と平行な辺は、面 ABCD とどこまで延長しても交わらないような辺で、次の 4 つがあります。

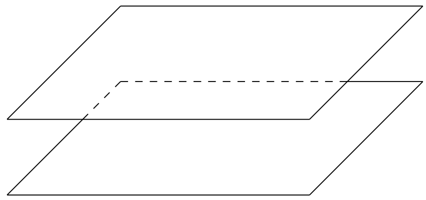
辺 EF, 辺 FG, 辺 GH, 辺 HE

2.4　2 平面の位置関係

2 平面の位置関係には、次の 2 つの場合があります。

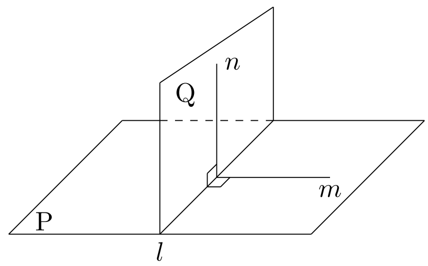
① 交わる　　　　② 平行である





直線と直線が交わるとき、その部分は点になるので「交点」といいますが、平面と平面が交わる部分は、図のように直線になります。そのため、その部分は**交線**といいます。

また、右の図のように、2 つの平面 P, Q があり、その 2 つの平面の交線を l とします。平面 P 上に、直線 l と垂直な直線 m、平面 Q 上に l と垂直な直線 n を引くとき、直線 m と直線 n のなす角が平面 P と平面 Q のなす角になり、$m \perp n$ ならば、平面 P と平面 Q は**垂直である**といい、2 直線が垂直であることと同じように、平面の場合も次のように表します。



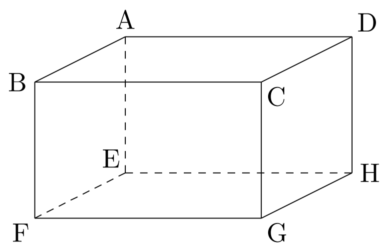
$$\mathrm{P} \perp \mathrm{Q}$$

【例題 2 − 4】

右の直方体について、次の面をいいなさい。

(1) 面 ABCD と垂直な面

(2) 面 ABCD と平行な面



＜解説＞

(1) 面 ABCD と面 BFEA の交線は AB で、

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}, \quad \mathrm{AB} \perp \mathrm{BF}$$

であるので、BC と BF のなす角が面 ABCD と面 BFEA のなす角になります。立体は直方体なので、BC ⊥ BF となることから、

$$\text{面 ABCD} \perp \text{面 BFEA}$$

このようにして考えることによって、面 ABCD と垂直な面は次の 4 つになります。

面 BFEA, 面 BFGC, 面 CGHD, 面 AEHD

(2) 面 ABCD と平行な面は、面 ABCD とその面をどこまで延長しても交わらない面なので、そのような面は、

面 EFGH

3　立体のいろいろな見方

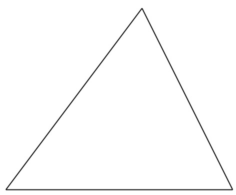
3.1　面を平行に動かしてできる立体

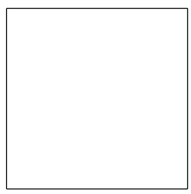
1 つの多角形や円を、その面に垂直な方向に、一定の距離だけ平行に動かすと、その多角形や円の通ったあとに、柱状の立体（角柱や円柱）ができます。これは、それぞれの図形と同じ形をした紙を机の上に置き、その紙とぴったり重なるように、同じ形の紙を順に積み重ねたときにできる立体だと考えることができます。

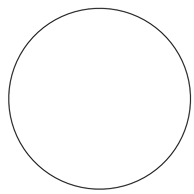
【例題 3 − 1】

下の図で、(1) は三角形、(2) は正方形、(3) は円です。それぞれの図形を、その面に垂直な方向に、一定の距離だけ動かすと、どんな立体ができますか。

(1) 三角形　(2) 正方形　(3) 円

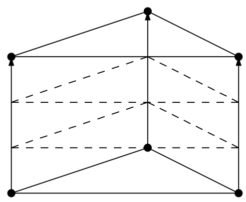




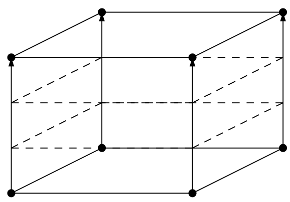


＜解説＞

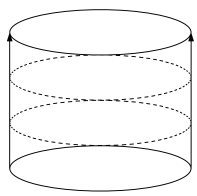
(1) 図の三角形と同じ形をした紙を机の上に置き、その三角形と同じ形の紙を下の三角形とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような三角柱ができます。



(2) 図の正方形と同じ形をした紙を机の上に置き、その正方形と同じ形の紙を下の正方形とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような四角柱ができます。しかし、底面は正多角形である正方形なので、ただの四角柱ではなく、「正四角柱」になることに注意してください。また、面に垂直な方向への移動距離が、正方形の 1 辺の長さと等しい場合には、立方体になります。



(3) 図の円と同じ形をした紙を机の上に置き、その円と同じ形の紙を下の円とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような円柱ができます。



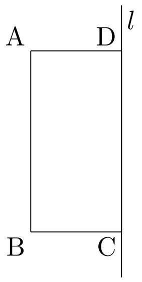
3.2 面を回転させてできる立体

1 つの平面図形を、その平面上の直線のまわりに 1 回転させてできる立体を**回転体**といいます。このとき、回転の基準となる直線を**回転の軸**といい、回転体の側面を作り出す線分を**母線**といいます。

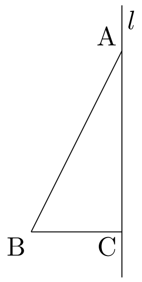
【例題 3 − 2】

下の図で、(1) は長方形、(2) は直角三角形、(3) は半円です。それぞれの図形を、直線 l を軸として 1 回転してできる立体の名前を答えなさい。

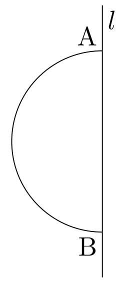
(1) 長方形



(2) 直角三角形



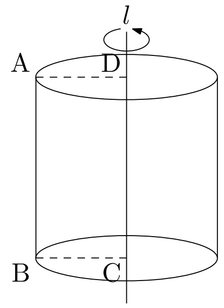
(3) 半円



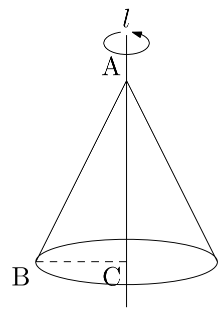
<解説>

割り箸のような長い棒を直線 l とし、その棒にそれぞれの図形と同じ形に紙を貼り付け、棒を回転軸となるように回転させたとき、どのような図形ができるのかを考えます。

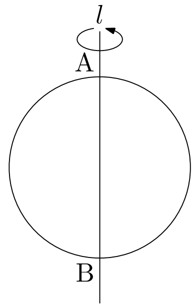
(1) 長方形を直線 l を軸として 1 回転させると、右の図のような円柱ができます。また、このとき、線分 AB が円柱の側面を作る線分になるので、母線は線分 AB になります。



(2) 直角三角形を直線 l を軸として 1 回転させると、右の図のような円錐ができます。また、このとき、線分 AB が円錐の側面を作る線分になるので、母線は線分 AB になります。



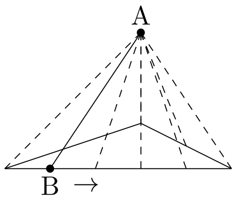
(3) 半円を直線 l を軸として 1 回転させると、右の図のような球ができます。



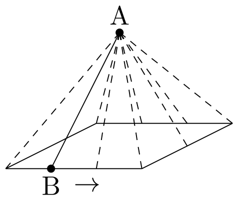
3.3 線を動かしてできる立体

固定した点 A から、多角形や円の周上の点 B を、その周にそって 1 まわりさせると、頂点 A と点 B を結ぶ線分 AB が動いてできる立体は、角錐や円錐になります。

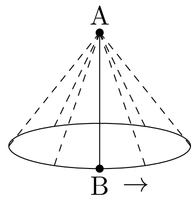
(i) 三角錐（三角形を 1 周）



(ii) 四角錐（四角形を 1 周）



(iii) 円錐（円を 1 周）

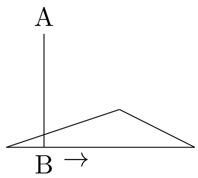


このとき、線分 AB はそれぞれの立体の側面を作り出す線分になるので**母線**になります。

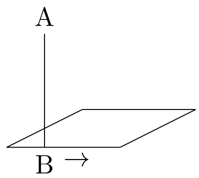
【例題 3 − 3】

下の図のように、線分 AB を、多角形や円に垂直に立てたまま、その周にそって 1 まわりさせると、線分 AB が動いたあとは、どのような図形になりますか。

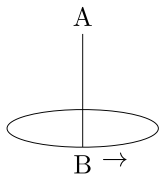
(1) 三角形



(2) 四角形



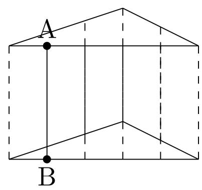
(3) 円



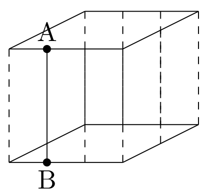
<解説>

線分 AB はそれぞれの立体の側面を作り出す線分になるので**母線**になります。

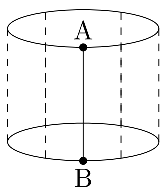
(1) 線分 AB を、三角形に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような三角柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



(2) 線分 AB を、四角形に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような四角柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



(3) 線分 AB を、円に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような円柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



3.4　立体の切断

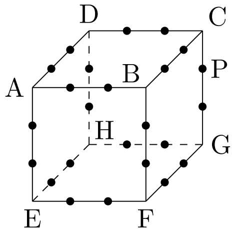
立体を平面で切ることを**切断**といい、切ったときの切り口を**切断面**といいます。

立体を 1 つの平面で切ったときの切り口を考えるとき、次の法則に従って行います。

(i) 切り口の辺は立体の面上にあるので、同一平面上の 2 点を結ぶ。
(ii) 平行な 2 つの面の切り口が平行になることを利用する。
(iii) (i), (ii) だけで切り口をかくことができない場合、切り口の線分またはその延長が、その線分を含む面の交線上で交わることを利用する。

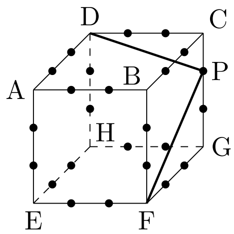
【例題 3 − 4】

右の図は、立方体の見取り図で、点 P は、CG を 3 等分している点です。他の辺上の各点もそれぞれの辺を 3 等分しています。この立方体を 3 点 D, P, F を通る平面で切ったとき、その切り口の図形の辺を右の図にかき入れなさい。



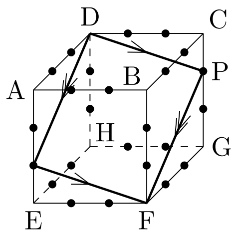
＜解説＞

まず、D, P, F の 3 点のうち、同一平面上で結ぶことのできる D と P（面 DHGC 上)、P と F（面 BFGC 上）を結びます。このとき、D と F を結ぶ線分は立体の内部になってしまうので、この 2 点を結ぶことはできません。



次に、平行な 2 つの面の切り口が平行になることを利用します。立方体の向かい合う面は平行になるので、面 DHGC と面 AEFB は平行です。そのため、面 DHGC 上にある切り口の辺 DP と平行になる辺が面 AEFB にあることになります。切り口は途中で途切れることはないので、点 F を通り DP と平行になる線分を面 AEFB にかきます。

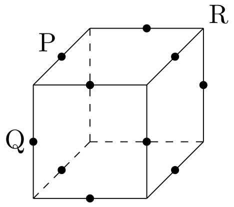
同じようにして、面 BFGC と面 AEHD も平行になるので、面 BFGC 上にある切り口の辺 PF と平行になる辺が面 AEHD にもあることになります。そこで、点 D を通り PF と平行になる線分を面ＡＥＨＤにかくと、右図のようにすべての辺がつながり、これが切り口の図形の辺になります。



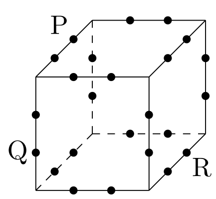
【演習 3 − 4】

次の図の立方体を、3 点 P, Q, R を通る平面で切ったときの切り口をそれぞれかきなさい。

(1) 図中の ● は、各辺を 2 等分する点です。



(2) 図中の ● は、各辺を 3 等分する点です。



3.5 立体の展開図

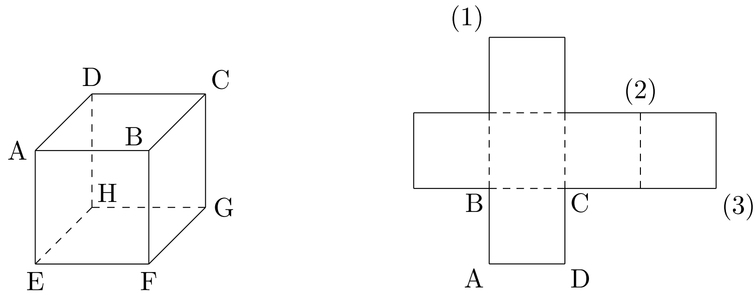
立体の表面を（辺にそって）切り開いて、平面上に広げた図を**展開図**といいます。

見取り図の頂点と展開図の頂点との対応関係を考えるとき、次のような手順で展開図の頂点を決定していきます。ただし、頭の中で立体から展開図を作ったり、展開図から元の立体を組み立てられる人は、その図を利用して頂点を対応させれば問題ありません。

(ｉ) 展開図に与えられた頂点の条件から、基準となる面を見取り図で確認する。
(ii) 展開図においてその面と辺を共有する面を見つけ、その面と同じになる面を見取り図から見つけ出す。
(iii) 面が特定できたら、展開図に頂点を書き加える。
(iv) すべての頂点が特定できるまで (ii), (iii) を繰り返す。

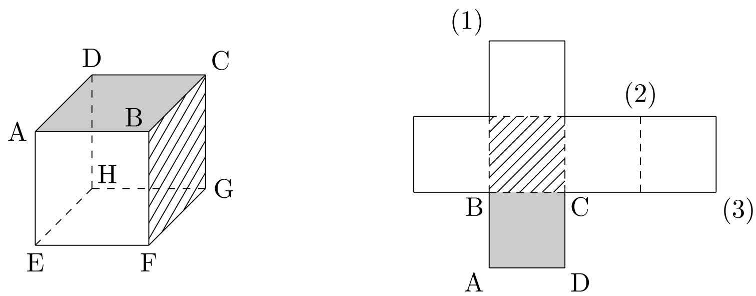
【例題 3 － 5】

下の図のような立方体とその展開図があります。展開図の (1)〜(3) にあてはまる頂点を答えなさい。



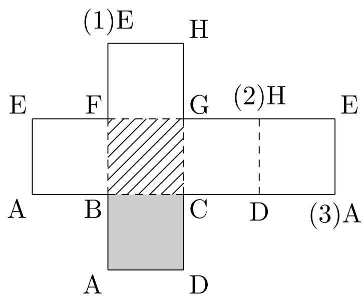
＜解説＞

まず、展開図で頂点の条件が与えられている面 ADCB があるので、この面を基準として考えていきます。そして、これと同じ面を見取り図で見つけると、次の図の色のついた部分になります。



次に、展開図で面 ADCB と辺 BC を共有する面（図の斜線部分）があることがわかるので、それと対応する面を見取り図で見つけると、面 BFGC になることがわかります。そのことから、展開図の辺 BC を共有する面（斜線部分）の残りの頂点を特定することができます。

同じようにして、展開図から面 FBCG と辺 FB, CG, GF を共有する面があることがわかるので、それと対応する面を見取り図から見つけということをすべての頂点が特定できるまで繰り返すと、対応する頂点は右図



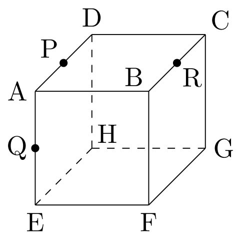
のようになります。

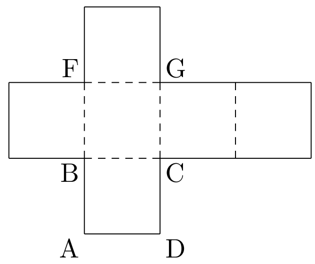
このことから、(1)～(3) にあてはまる頂点は次のようになります。

(1) 点 E　　(2) 点 H　　(3) 点 A

【演習 3 − 5】

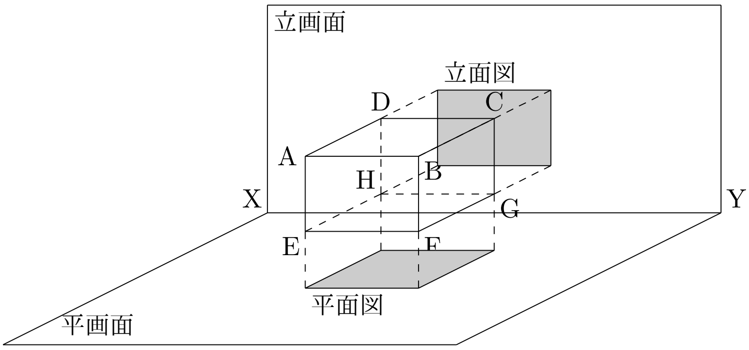
下の図のような立方体とその展開図があります。点 P, Q, R は、それぞれ辺 AD, AE, BC の中点です。3 点 P, Q, R を含む平面で立方体を切るとき、その平面と立方体の各面が交わってできる線を下に示した立方体の展開図にかき入れなさい。



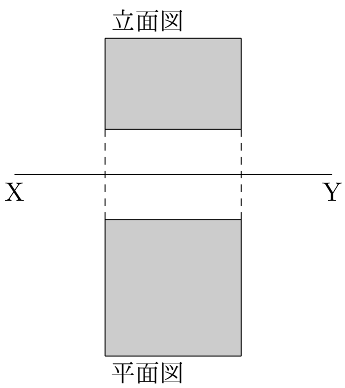


3.6 投影図

右の図のように、立体（ここでは直方体 ABCD-EFGH）を水平な平面（**平画面**）と、それに垂直な平面（**立画面**）の前に置きます。その立体に平画面の真上から光を当てると平画面にその立体の影ができ、これを**平面図**といいます。同じように、立画面に垂直な光を立体に当てれば立画面にその立体の影ができ、これを**立面図**といいます。少し違う言い方をすれば、立体を真上から見た図が「平面図」で、正面から見た図が「立面図」になります。また、立画面と平画面が交わる直線（図では直線 XY）を**基線**といいます。



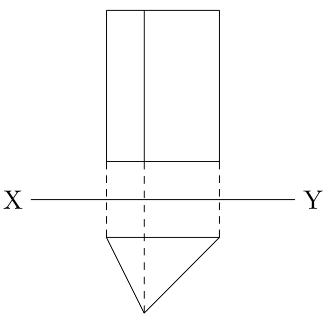
立体を平行な光で平画面、立画面に垂直に投影した図が平面図と立面図であるので、これらをまとめて**投影図**といいます。平面図と立面図は直線 XY（基線）で直角に折り曲げた 1 枚の用紙にかかれているとすると、投影図は右の図のように、その用紙を広げた図で表されます。



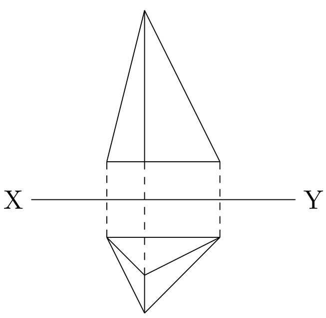
【例題 3 − 6】

次の (1)〜(3) の投影図で表された立体の名前を答えなさい。

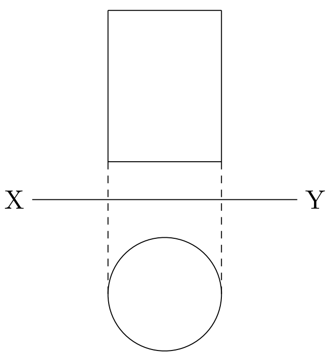
(1)



(2)



(3)



＜解説＞

立面図（真正面から見た図）が長方形ならば、立体は柱状になっていと考えることができるので、角柱や円

柱になります。また、三角形ならとがっている立体と考えることができるので、その立体は角錐や円錐であることがわかります。そして、平面図は真上から見た図になるので、立体の底面の形を確認することができ、このことから立体の名前を決定することができます。

(1) 立面図が長方形なので、角柱や円柱になります。そして、平面図が三角形なので、底面の形が三角形ということがわかります。このことから、この立体は、

三角柱

(2) 立面図が三角形なので、角錐や円錐になります。そして、平面図が三角形なので、底面の形が三角形です。このことから、この立体は、

三角錐

(3) 立面図が長方形なので、角柱や円柱になります。。そして、平面図が円なので、底面の形が円になります。このことから、この立体は、

円柱

4　立体の表面積と体積

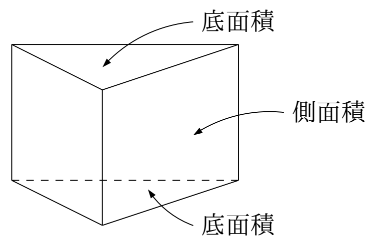
立体の表面全体の面積を**表面積**といい、1 つの底面の面積を**底面積**、側面全体の面積を**側面積**といいます。

4.1　角柱・円柱の表面積

右の図の三角柱の例でもわかるように、角柱や円柱には 2 つの底面があります。そのため、角柱や円柱の表面積は、

$$(\text{角柱・円柱の表面積}) = (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積})$$

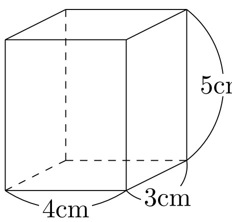
という計算で、表面積を求めることができますが、表面積は「表面全体の面積」であるので、表面全体がわかりやすいように、見取り図から展開図を作ると考えやすくなります。



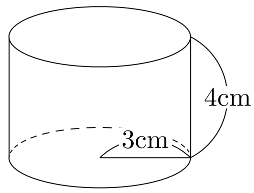
【例題 4 − 1】

次の立体の表面積を求めなさい。

(1) 四角柱



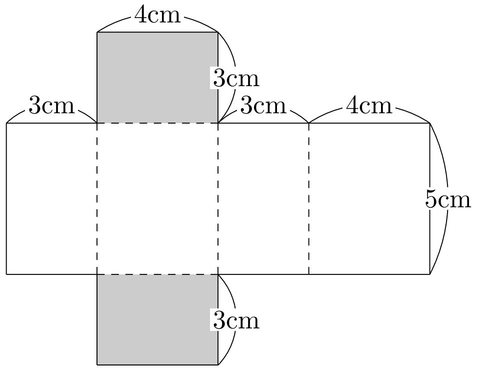
(2) 円柱



<解説>

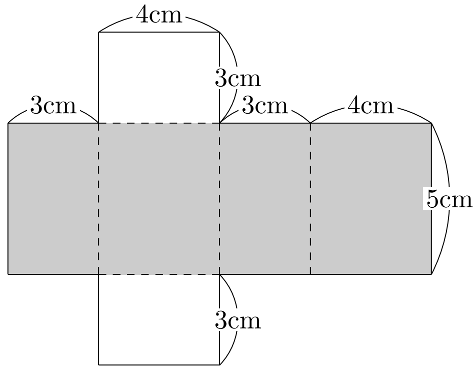
(1) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積（2 つ分）



$(\text{底面積}) = 4 \times 3 = 12\ (\text{cm}^2)$

(ii) 側面積



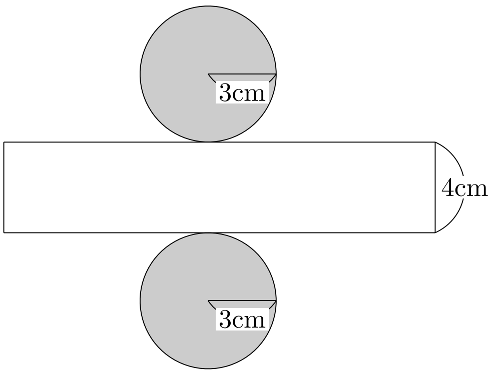
$$\begin{aligned}(\text{側面積}) &= (3 + 4 + 3 + 4) \times 5 \\ &= 14 \times 5 = 70\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

このことから、四角柱の表面積は、

$$\begin{aligned}(\text{四角柱の表面積}) &= (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積}) \\ &= 12 \times 2 + 70 = 94\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

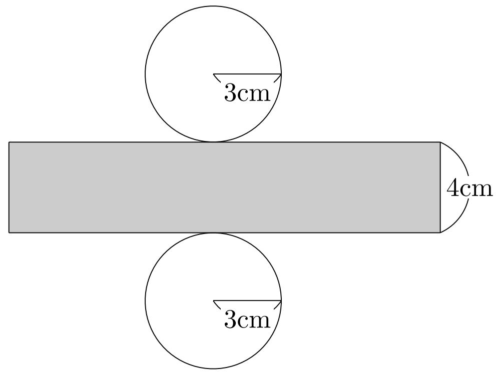
(2) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積（2 つ分）



$$(\text{底面積}) = \pi \times 3^2 = 9\pi\ (\text{cm}^2)$$

(ii) 側面積



側面の横の長さの部分は底面（円）の周の長さと一致するので、

$$\begin{aligned}(\text{側面の横の長さ}) &= (\text{底面の周の長さ}) \\ &= 2 \times \pi \times 3 = 6\pi\ (\text{cm})\end{aligned}$$

このことから側面積は、

$$(\text{側面積}) = 4 \times 6\pi = 24\pi\ (\text{cm}^2)$$

以上のことから、円柱の表面積は、

$$\begin{aligned}(\text{円柱の表面積}) &= (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積}) \\ &= 9\pi \times 2 + 24\pi \\ &= 18\pi + 24\pi = 42\pi\ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

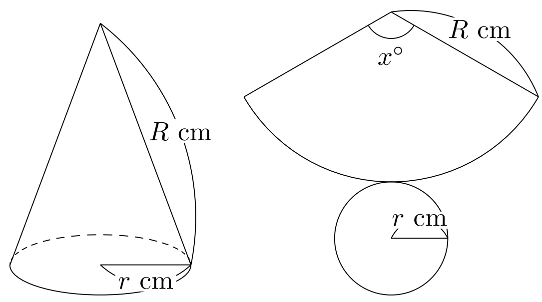
4.2　角錐・円錐の表面積

角錐や円錐は、底面が 1 つなので、

(角錐・円錐の表面積) = (底面積) + (側面積)

という計算で、表面積を求めることができますが、表面積は「表面全体の面積」であるので、表面全体がわかりやすいように、見取り図から展開図を作ると考えやすくなります。

右の図のような底面の半径が r cm、母線の長さが R cm の円錐では、展開図を考えると、側面は半径 R cm のおうぎ形になるので、中心角を x° とすると、おうぎ形の弧の長さは次のように表すことができます。



$$(\text{おうぎ形の弧の長さ}) = (2\times\pi\times R)\times\frac{x}{360}\ (\text{cm})$$

また、底面の円周の長さは、半径 r cm の円なので、

$$(\text{底面の円周の長さ}) = 2\times\pi\times r\ (\text{cm})$$

このとき、おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは一致することから、おうぎ形の中心角は次のように表すことができます。

$$(\text{おうぎ形の弧の長さ}) = (\text{底面の円周の長さ})$$

$$(\cancel{2\times\pi}^{1}\times R)\times\frac{x}{360} = \cancel{2\times\pi}^{1}\times r$$

$$x = 360\times\frac{r}{R} \longrightarrow (\text{おうぎ形の中心角}) = 360^\circ\times\frac{\text{底面の半径}}{\text{母線の長さ（おうぎ形の半径）}}$$

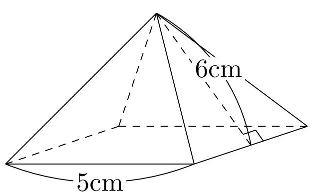
さらに、円錐の側面積であるおうぎ形の面積は次のように表され、円錐の側面積を求めるのには、この式を公式として利用します。

$$\begin{aligned}(\text{円錐の側面積}) &= \frac{1}{2}\times(\text{おうぎ形の弧の長さ})\times(\text{おうぎ形の半径})\\ &= \frac{1}{2}\times(\text{底面の円周の長さ})\times(\text{おうぎ形の半径})\\ &= \frac{1}{2}\times 2\pi r\times R\\ &= \pi Rr \longrightarrow \pi\times(\text{母線の長さ})\times(\text{底面の半径})\end{aligned}$$

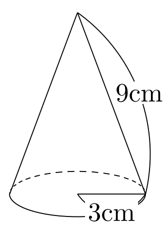
【例題 4 − 2】

次の立体の表面積を求めなさい。

(1) 正四角錐



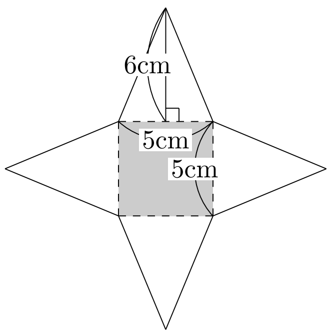
(2) 円錐



＜解説＞

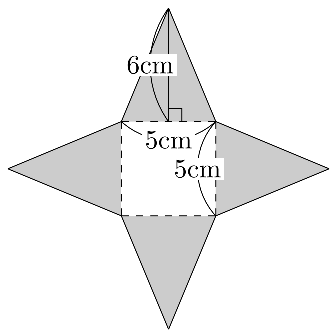
(1) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積



$$(\text{底面積}) = 5 \times 5 = 25 \ (\text{cm}^2)$$

(ii) 側面積



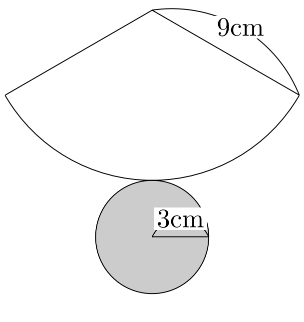
$$(\text{側面積}) = \left(\frac{1}{\cancel{2}_1} \times 5 \times \cancel{6}^3\right) \times 4 = 60 \ (\text{cm}^2)$$

以上のことから、正四角錐の表面積は

$$\begin{aligned}(\text{正四角錐の表面積}) &= (\text{底面積}) + (\text{側面積}) \\ &= 25 + 60 = 85 \ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

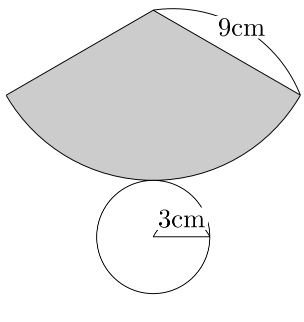
(2) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積



$$(\text{底面積}) = \pi \times 3^2 = 9\pi \ (\text{cm}^2)$$

(ii) 側面積



$$(\text{側面積}) = \pi \times 9 \times 3 = 27\pi \ (\text{cm}^2)$$

以上のことから、円錐の表面積は、

$$\begin{aligned}(\text{円錐の表面積}) &= (\text{底面積}) + (\text{側面積}) \\ &= 9\pi + 27\pi = 36\pi \ (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

4.3 角柱・円柱の体積

角柱や円柱の体積は、

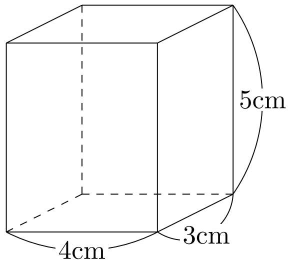
$$(\text{角柱・円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

という公式で求めます。また、ここでいう「高さ」とは、「底面から底面までの距離」になります。

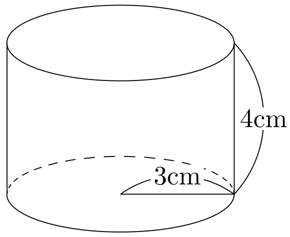
【例題 4 − 3】

次の立体の体積を求めなさい。

(1) 四角柱



(2) 円柱



＜解説＞

(1) 体積を求める公式から、

$$\begin{aligned}(\text{四角柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \\ &= (4 \times 3) \times 5 \\ &= 12 \times 5 = 60\ (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

ちなみに、四角柱は別名「直方体」ともいいます。直方体の体積は、

$$(\text{直方体の体積}) = (\text{たて}) \times (\text{横}) \times (\text{高さ})$$

により求めることができますが、「たて × 横」は底面積を求める式になっているので、直方体の体積を求める公式も、次のように表すことができます。

$$(\text{直方体の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

(2) 体積を求める公式から、

$$\begin{aligned}(\text{円柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \\ &= (\pi \times 3^2) \times 4 \\ &= 9\pi \times 4 = 36\pi\ (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

4.4 角錐・円錐の体積

角錐や円錐の体積は、同じ底面と高さである角柱や円柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ 倍になります。つまり、角錐や円錐の体積は、

$$\begin{aligned}(\text{角錐・円錐の体積}) &= (\text{角柱・円柱の体積}) \times \frac{1}{3} \\ &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

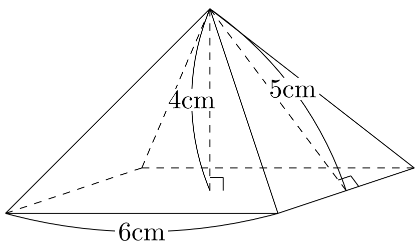
という公式で求められます。また、ここでいう「高さ」とは、「頂点から底面までの距離」になります。

三角形などの平面図形では、「高さ」と言われれば「頂点から底辺に下ろした垂線の長さ」のことで、「高さ」と「底辺」は垂直に交わっています。同じように、角錐や円錐の高さは「頂点から底面までの距離」で、「頂点から底面に下ろした垂線の長さ」になり、こちらも「高さ」と「底面」は垂直に交わっています。角柱や円柱のときと比べて、「高さ」が少しわかりにくいですが、その点に注意しながら見極められるようにしてください。

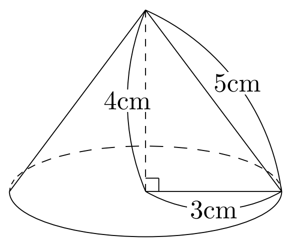
【例題 4 − 4】

次の立体の体積を求めなさい。

(1) 正四角錐



(2) 円錐



＜解説＞

(1) 正四角錐なので、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形です。また、高さは頂点から底面に下ろした垂線の長さなので、4 cm です。よって、体積を求める公式から、

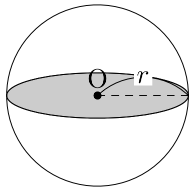
$$\begin{aligned}(\text{正四角錐の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} \\ &= (6 \times \cancel{6}^{2}) \times 4 \times \frac{1}{\cancel{3}^{1}} = 48\ (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

(2) 円錐の底面は半径 3 cm の円です。また、高さは頂点から底面に下ろした垂線の長さなので、4 cm です。よって、体積を求める公式から、

$$\begin{aligned}(\text{円錐の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} \\ &= (\pi \times 3 \times \cancel{3}^{1}) \times 4 \times \frac{1}{\cancel{3}^{1}} = 12\pi\ (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

4.5 球の表面積と体積

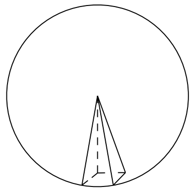
右の図のような、中心 O、半径 r の球を考えます。



球の表面積は、球の中心 O を通る面で切ったときにできる半径 r の円（図の色のついた部分）の 4 倍であることが知られています。つまり、球の表面積を S とすると、次の式で表されます

$$S = \pi r^2 \times 4 = 4\pi r^2$$

次に、半径 r の球を、右図のような角錐でものすごく細かく分割していきます。分割した角錐の体積の和が球の体積になりますが、1 つ 1 つの角錐の体積は



$$(\text{角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

で求めることができ、角錐の高さはすべて r になります。また、角錐の底面をすべて合わせると、球の表面になるので、

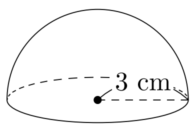
$$(\text{角錐の底面積の和}) = (\text{球の表面積})$$

という関係になっています。このことから、球の体積を V とすると、次のような式で表すことができます。

$$\begin{aligned} V &= (\text{角錐の体積の和}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{底面積の和}) \times (\text{高さ}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{球の表面積}) \times r \\ &= \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

【例題 4 － 5】

右の半球の表面積と体積を求めなさい。



＜解説＞

半球の表面積は、球の表面積の半分に円の面積を加えたものになるので、

$$\begin{aligned} (\text{半球の表面積}) &= (\text{球の表面積}) \times \frac{1}{2} + (\text{円の面積}) \\ &= 4\pi \times 3^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times 3^2 = 27\pi \ (\mathrm{cm}^2) \end{aligned}$$

また、半球の体積は球の体積の半分になるので、

$$\begin{aligned} (\text{半球の体積}) &= (\text{球の体積}) \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi \times 3^3\right) \times \frac{1}{2} = 18\pi \ (\mathrm{cm}^3) \end{aligned}$$