【中１数学】正の数と負の数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　正の数と負の数

1.1　正の数と負の数

小学校では、「0」または「0 よりも大きな数」について学習してきました。しかし、天気予報などで、「マイナス 2 度」なんていう言葉を聞いたことがあると思います。これは「0 度よりも 2 度低い」ということを表しています。このように、0 よりも小さな数が世の中には存在するので、これからは「0 よりも小さい数」も使えるようにしていきます。

今まで使ってきた、「0 よりも大きい数」のことを**正の数**といい、これから学習していく「0 よりも小さい数」のことを**負の数**といいます。正の数や負の数には次のような例があり、正の数は**正の符号**「+（プラス）」をつけて、負の数は**負の符号**「−（マイナス）」をつけて表します。

正の数 $\cdots +4,\ +3.8,\ +\dfrac{7}{4}$ など　　　負の数 $\cdots -2,\ -2.5,\ -4\dfrac{3}{5}$ など

ただし、今まで正の数には正の符号をつけなかったように、省略することが可能ですが、負の数の負の符号は必ずつけます。

また、

$$\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \cdots$$

のように、小数や分数でない数を**整数**といい、0 より大きい整数、つまり、正の整数

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

を**自然数**といいます。

自然数と言われたときに、「0」を含めるのかどうかを間違える人がよくいます。自然 に 数 を数えるときには、「1 個、2 個、3 個、$\cdots$」と数えるように、「0 個」とは数えないので、**「自然数は 0 を含めない」**ということが当たり前だと思えるようにしておきましょう。

【例題 1 − 1】

次の数を、正の符号、負の符号をつけて表しなさい。

(1) 0 より 3 小さい数　　(2) 0 より 5 大きい数

(3) 0 より $\dfrac{5}{4}$ 大きい数　　(4) 0 より 0.7 小さい数

＜解説＞

0 より大きい数には正の符号「+」をつけて、0 より小さい数には負の符号「−」をつけて表します。0 より大きいのか小さいのかが問題なので、小数や分数であっても 0 より大きければ正の符号、0 より小さければ負の符号をつけます。そのことから、

(1) -3　　(2) $+5$　　(3) $+\dfrac{5}{4}$　　(4) -0.7

となります。正の符号は省略できるので、

$$+5 \longrightarrow 5, \qquad +\frac{5}{4} \longrightarrow \frac{5}{4}$$

と表すこともできますが、「正の符号、負の符号をつけて表しなさい」という問題になっているので、この問題では省略できないので注意してください。

1.2 符号のついた数と量

右の表は、おこづかい帳を表しています。

	収入（円）	残り（円）
おこづかい	$+1000$	1000
文房具	-350	650
お菓子	-200	450
お手伝い	$+100$	550

このとき、おこづかいをもらったりお手伝いをしたときの「$+1000$」や「$+100$」は収入を、文房具やお菓子を買ったときの「-350」や「-200」は支出を表していることになります。しかし、「収入」の項目のところに「-350」や「-200」とかかれているので、元々は「-350 円の収入」や「-200 円の収入」ということになります。つまり、「-350 円の収入」と「350 円の支出」、「-200 円の収入」と「200 円の支出」はそれぞれ同じ意味になります。

ここでの例のように、「収入」と「支出」のような性質が反対の量は、正の符号「$+$」や負の符号「$-$」（この 2 つを合わせて「**符号**」といいます）を使って表すことができ、負の符号（負の数）を使うと、正の符号（正の数）とは反対の量（反対の意味）を表すことができます。

【例題 1 − 2】

（　　）内のことばを使って、次のことを同じ意味になるように言いかえなさい。

(1) 5 人少ない　（多い）　　(2) 7 kg 軽い　（重い）

<解説>

(1) 正の符号を省略しないで表すと、問題文は「$+5$ 人少ない」となります。「$+5$ 人少ない」を「多い」ということばを使って表すと、「少ない」を「多い」という反対のことばを使って表すことになるので、

$+5$ 人少ない $\longrightarrow$ -5 人多い

のように、負の符号を使って表せば同じ意味になります。「反対の反対は元に戻る」ことと同じように、

$+5 \longrightarrow -5,$　　少ない $\longrightarrow$ 多い

と、2 つのものを反対の意味にすれば、元と同じ意味になると考えるとわかりやすいと思います。

(2) 問題文にあるように、

軽い $\longrightarrow$ 重い

と反対のことばを使うので、符号の部分も

$+7 \longrightarrow -7$

と反対にして

7 kg 軽い $\longrightarrow$ -7 kg 重い

とすれば同じ意味になります。

1.3 基準との違い

学校の定期テストの結果などで、「今回は前回のテストよりも、**プラス 15 点**だった！」であったり、「今回は前回のテストよりも、**マイナス 20 点**だった！」なんて会話を聞いたりすることがあるかもしれません。

例えば、前回のテストの結果が「70 点」で、今回のテストの結果が「85 点」であれば、

$$85 - 70 = 15\,(\text{点})$$

と 15 点高くなるので、「プラス 15 点」ということができ、今回のテストの結果が「50 点」であれば、

$$70 - 50 = 20\,(\text{点})$$

と 20 点低くなるので、「マイナス 20 点」ということができます。

このように、前回のテストの結果など、あるものを基準にして、そのときよりも点数が高い（数や量が大きい）場合に正の符号（正の数)、低い場合（数や量が小さい）場合に負の符号（負の数）を用いて表す場合があります。

【例題 1 − 3】

右の表は、A, B, C, D, E 5 人の体重を表したものです。このとき、B の体重を基準にして、各生徒の B との体重差を +, − を使って表しなさい。

生徒	A	B	C	D	E
体重（kg）	56	54	49	60	50

＜解説＞

A の場合: $56 - 54 = 2$ より、A は B よりも 2kg 多いことがわかります。これを、正の符号を使って「+2 (kg)」のように表されます。

B の場合: B は基準なので差はありません。つまり、「0」となります。

C の場合: $54 - 49 = 5$ より、C は B よりも 5kg 少ないことがわかります。これを、負の符号を使って「−5 (kg)」のように表されます。

D の場合: $60 - 54 = 6$ より、D は B よりも 6kg 多いことがわかります。これを、正の符号を使って「+6 (kg)」のように表されます。

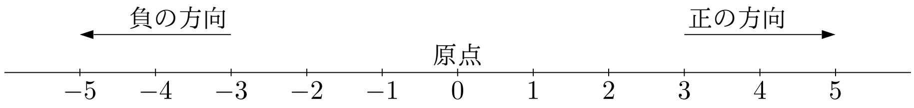
E の場合: $54 - 50 = 4$ より、E は B よりも 4kg 少ないことが分かります。これを、負の符号を使って、「−4 (kg)」のように表されます。

このことから、B の体重を基準にしたとき、次の表のようになります。

生徒	A	B	C	D	E
体重（kg）	56	54	49	60	50
体重差（kg）	+2	0	−5	+6	−4

1.4 数直線

次の図のように、左右にのびる直線をかきます。そして、直線上に基準となる点をとり、その点を 0 と対応させます。この基準となる点を**原点**といい、原点の左右に、一定の間隔で目盛りをつけて、正の数・負の数を対応させた直線が**数直線**になります。このとき、原点よりも右側に正の数、左側に負の数を対応させます。

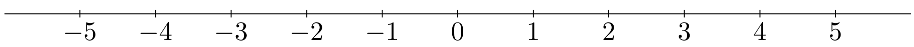


数直線上では、右に行けば行くほど数は大きくなり、左に行けば左に行くほど数は小さくなります。普通、数が大きくなる向きを基準にして考えるので、数の大きくなる右方向のことを**正の方向**、それとは逆に、数の小さくなる左方向のことを**負の方向**ということがあります。

【例題 1 − 4】

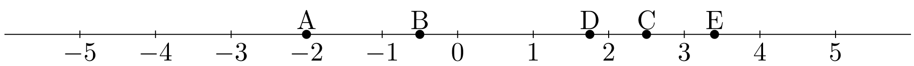
次の数を下の数直線上に表しなさい。

A -2　　B -0.5　　C 2.5　　D $\dfrac{7}{4}$　　E $\dfrac{17}{5}$



<解説>

正の数は「0」よりも右側、負の数は「0」よりも左側になるので、答は下の図のようになります。



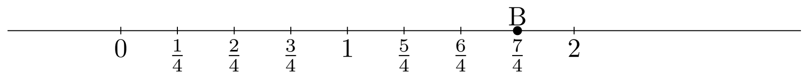
点 A，B，C は特に問題はないと思います。点 D を考えるとき、

$$\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1.75$$

として考えた人もいると思いますが、「1.75」という数が、数直線上でどこにあるのかは意外と判断しづらく、また、この問題では割り切れましたが、分数を小数で表すとき、割り算をして必ず割り切れる訳ではありません。そのため、分数は割り算を計算して小数で表すのではなく、なるべく分数を分数のまま扱えるようにした方がいいです。そこで $\dfrac{7}{4}$ は、

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

のように帯分数で表し、「1 と 1 を 4 つに分けたうちの 3 つ分」として考えた方が、どこにあるのかが「1.75」よりも明確です。



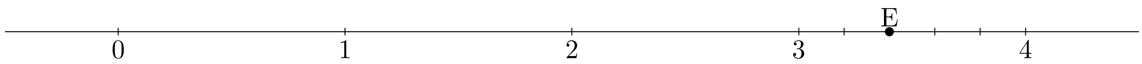
同様にして点 E も、

$$\frac{17}{5} = 17 \div 5 = 3.4$$

として考えてもいいんですが、

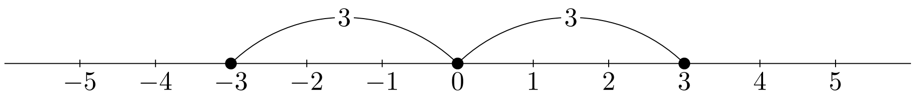
$$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$$

として帯分数で表し、「3 と 1 を 5 つに分けたうちの 2 つ分」と考える癖をつけておいたほうが、割り切れないという心配をする必要がなくなり、また、割り算を延々と続けなくてすむので、速く答えを求めることができます。



1.5　絶対値

次の図のような数直線があるとします。



このとき、「3」を表す点と原点との距離は「3」になり、数直線上で、ある数を表す点と原点（0 の点）との距離を、その数の**絶対値**といいます。つまり、3 の絶対値は「3」となり、このことを記号を用いると、

$$|3| = 3$$

と表されます。

また、数直線上での原点との距離が「3」になる点は、「3」を表す点だけではなく、「−3」と原点との距離も「3」になります。このように、数直線上で原点との距離が同じになる点は、原点を中心として反対にもあることになります。

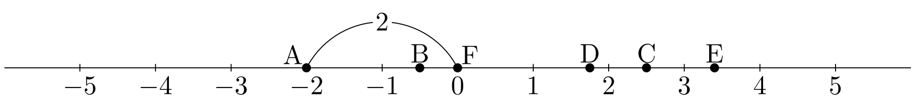
【例題 1 − 5】

次の数の絶対値を答えなさい。

(1) -2　　(2) -0.5　　(3) 2.5　　(4) $+\dfrac{7}{4}$　　(5) $\dfrac{17}{5}$　　(6) 0

<解説>

「絶対値」は数直線上での原点との距離を考えるので、まずは、それぞれの数が表す点を、(1) からそれぞれ A, B, C, D, E, F として、その点を数直線上に表してみます。



このことから絶対値記号を用いると、

(1) $|-2| = 2$　　(2) $|-0.5| = 0.5$　　(3) $|2.5| = 2.5$

(4) $\left|+\dfrac{7}{4}\right| = \dfrac{7}{4}$　　(5) $\left|\dfrac{17}{5}\right| = \dfrac{17}{5}$　　(6) $|0| = 0$

と表すことができます。

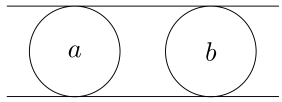
ただ、絶対値を求める問題の答えは、その数の符号を取ったもの（なくしたもの）と考えることができますが、必ず、「**絶対値は原点からの距離**」ということをしっかりと覚えておいてください。また、「距離」を表しているので、絶対値が負の値になることは絶対にありません。

1.6 数の大小

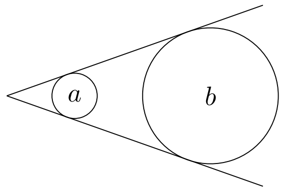
数の大小関係が等しいとき、式では「=」という**等号**を用いて表すことができました。これとは違って、どちらかが大きくてどちらかが小さいといったような数の大小関係が等しくない場合には等号は使えません。そこで、数の大小を表す場合には、「<」,「>」という**不等号**を用いて表します。

等号や不等号は、次の図のように、2 つの量を棒をはさんで比べたときの様子を表していると言われています。

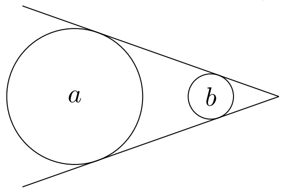
(i) 2 つの量が等しい
右の図から「$a=b$」は、「a と b は等しい」 ということを表します。



(ii) 左が小さく右が大きい
右の図から「$a<b$」は、「a が b より小さい」であったり、「b が a より大きい」ということを表します。



(iii) 左が大きく右が小さい
右の図から「$a>b$」は、「a が b より大きい」であったり、「b が a より小さい」ということを表します。



【例題 1 − 6】
次の 2 数の大小関係を、不等号を用いて表しなさい。
(1) $+6,\ +3$ (2) $-7,\ 3$

＜解説＞

(1) +6 と +3 では +6 の方が大きいので、これを不等号を用いて表すと

$$+6>+3$$

のように表せます。正の符号は省略できるので

$$6>3$$

と表しても意味は同じですが、問題文には「次の 2 数の〜」となってます。「次の 2 数」とは、正の符号のついた「+6」と「+3」ですので、この場合の答えは正の符号をつけたものにしておきましょう。答えにはなるべく問題文で使われた数や文字を使うほうがいいです。また、

$$+3<+6$$

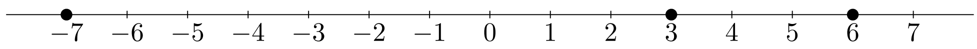
のように書いても答えは OK です。

(2) −7 と 3 では 3 の方が大きいので、これを不等号を用いて表すと

$$-7<3 \quad (\text{または、}3>-7)$$

と表せます。

この問題で扱われた数であれば難しくはないので、すぐに大小関係を判断できると思いますが、それぞれの数を表す数直線上の点を考えれば、左にある数は小さく、右にいけばいくほど大きくなるので、大小関係は簡単に判断することができます。



このため、数の大小関係を考える場合には、数直線をイメージしながら考え、イメージだけでは判断が難しいようであれば、数直線を描いて判断するようにしましょう。

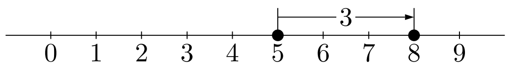
【演習 1 − 6】

次の数の大小を不等号を用いて表しなさい。

(1) $0,\ 5,\ 3$　　(2) $0,\ -3,\ -5$　　(3) $3,\ -3,\ -5$

2　加法と減法

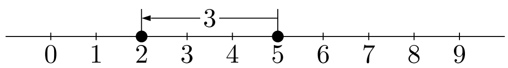
2.1　正の数を足すこと、引くこと



「$5+3$」という式を文章を使うと、「5 から 3 増える」と表すことができます。このことを数直線で考えると、右の図のように、「5」のところにあった点が、3 つ右の方向（正の方向）に移動して、「8」に移ったと考えることができます。そのことから、

$$5+3=8$$

になると考えることができます。



「$5-3$」という式は、「5 から 3 減る」ことを表していると考えることができます。これを数直線で考えると、右の図のように、「5」のところにあった点が、3 つ左の方向（負の方向）に移動して、「2」に移ったと考えることができます。そのことから、

$$5-3=2$$

となると考えることができます。

以上のことから、正の数を足したり引いたりするときには、数直線上で、

- 正の数を足す :「正の方向にその数だけ移動させる」
- 正の数を引く :「負の方向にその数だけ移動させる」

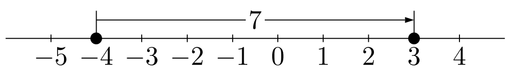
ことにより、答えを求めることができます。

【例題 2 − 1】

次の計算をしなさい。

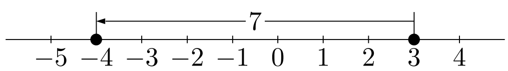
(1) $(-4)+7$　　　　(2) $3-7$

<解説>



(1) 数直線上で、(-4) の点から右方向（正の方向）に 7 だけ移動させればよいので、

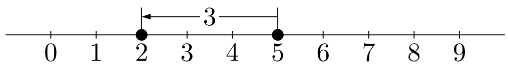
$$(-4)+7=3$$



(2) 数直線で、3 の点から左方向（負の方向）に 7 だけ移動させればよいので、

$$3-7=-4$$

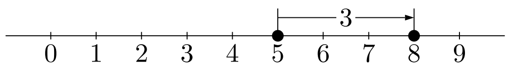
2.2　負の数を足すこと、引くこと



「$5+(-3)$」という式を文章を使うと、「5 から (-3) 増える」と表すことができます。この「(-3) 増える」という言葉は、「3 減る」と同じ意味を表すので、

$$5+(-3)=5-3$$

のように考えることができます。このことは、負の符号は反対の意味にする働きがあるので、「-3」の負の符号の力で、その前についている「+」が、反対の意味である「−」に変わったと判断することができます。つまり、「負の数の足し算」は「正の数の引き算」と同じように考えればよいことがわかります。



「$5-(-3)$」という式を文章を使うと、「5 から (-3) 減る」と表すことができます。この「(-3) 減る」という言葉は、「3 増える」と同じ意味を表すので、

$$5-(-3)=5+3$$

のように考えることができます。このことは、負の符号は反対の意味にする働きがあるので、「-3」の負の符号の力で、その前についている「−」が、反対の意味である「+」に変わったと判断することができます。つまり、「負の数の引き算」は「正の数の足し算」と同じように考えればよいことがわかります。

以上のことから、負の数を足したり引いたりすることは、数直線上で

- 負の数を足す :「負の方向にその数だけ移動させる」
- 負の数を引く :「正の方向にその数だけ移動させる」

ことにより、答えを求めることができ、正の数のときと比べてみるとちょうど反対の関係になっています。

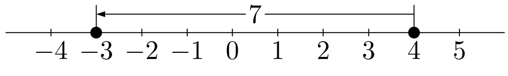
【例題 2 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $4+(-7)$　　　(2) $(-3)-(-6)$

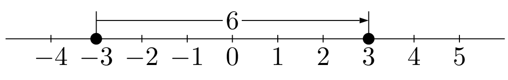
<解説>

正の数と負の数の計算は、計算に慣れるまでは面倒でも数直線をかいて確実に正解できるよう解くようにしましょう。



(1) 数直線上で、4 の点から左方向（負の方向）に 7 だけ移動させればよいので、

$$4+(-7)=4-7=-3$$



(2) 数直線上で、(-3) の点から右方向（正の方向）に 6 だけ移動させればよいので、

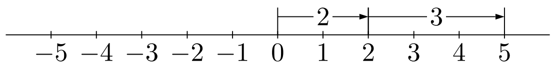
$$(-3)-(-6)=(-3)+6=3$$

2.3 同符号の 2 数の和

足し算は、「数を加える計算方法」ということで**加法（かほう）**といい、加法で計算した結果のことを**和**といいます。それに対し引き算は、「数を減らす計算方法」と言うことで**減法（げんぽう）**といい、減法で計算した結果のことを**差**といいます。そして、加法と減法を略して「加減」と言うこともあります。また、2 つの数の符号が同じことを**同符号**といい、ここでは、同符号の 2 数の和について考えます。

(i) 同符号 $(+)$ の 2 数の和 : $(+2)+(+3)$

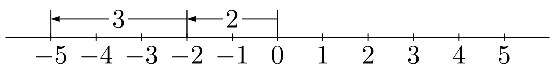
「$(+2)+(+3)$」は、数直線の 0（原点）を基準に、正の方向に「2」だけ移動し、さらに、正の方向に「3」移動することを意味するので、



$$(+2)+(+3)=+(2+3)=+5$$

(ii) 同符号 $(-)$ の 2 数の和 : $(-2)+(-3)$

「$(-2)+(-3)$」は、数直線の 0（原点）を基準に、負の方向に「2」だけ移動し、さらに、負の方向に「3」移動することを意味するので、



$$(-2)+(-3)=-(2+3)=-5$$

以上のことから、同符号の 2 数の和は、「$(+2)+(+3)$」は 2 つとも正の方向に、「$(-2)+(-3)$」は 2 つとも負の方向といったように、数直線上で同じ方向に動きます。そのため、どれだけ原点からはなれたかを、2 数の絶対値の和を計算することで求め、正か負かは 2 数と同じ符号になるので、そのことでどの位置に移動したかが判断できることになります。つまり、2 数の絶対値の和を求め、2 数と同じ符号をつけることで計算できます。

【例題 2 − 3】

次の計算をしなさい。

(1) $(+9)+(+13)$　(2) $(-9)+(-4)$　(3) $(+12)+(+4)$　(4) $(-1)+(-12)$

＜解説＞

(1) $(+9)+(+13)=+(9+13)=21$　(2) $(-9)+(-4)=-(9+4)=-13$

(3) $(+12)+(+4)=+(12+4)=16$　(4) $(-1)+(-12)=-(1+12)=-13$

【演習 2 − 3】

次の計算をしなさい。

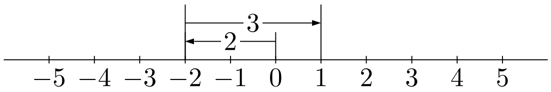
(1) $(+10)+(+12)$　(2) $(-13)+(-10)$　(3) $(+7)+(+4)$　(4) $(-2)+(-9)$

2.4 異符号の 2 数の和

2 つの数の符号が異なることを**異符号**といい、ここでは、異符号の 2 数の和について考えます。

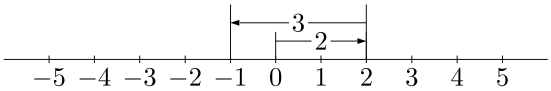
(i) 異符号の 2 数の和：$(-2)+(+3)$

「$(-2)+(+3)$」は数直線の 0（原点）を基準に、負の方向に「2」だけ移動し、さらに、正の方向に「3」移動することを意味するので、



$$(-2)+(+3) = +(3-2) = +1$$

(ii) 異符号の 2 数の和：$(+2)+(-3)$ 「$(+2)+(-3)$」は数直線の 0（原点）を基準に、正の方向に「2」だけ移動し、さらに、負の方向に「3」移動することを意味するので、



$$(+2)+(-3) = -(3-2) = -1$$

以上のことから、異符号の 2 数の和は数直線上で、正の数は正の方向に、負の数は負の方向といったように、それぞれの数により反対方向に動きます。つまり、反対方向の動きによって、最初に動いた分の一部または全部が打ち消されてしまうことになってしまいます。そのため、どれだけ原点からはなれたかを 2 数の絶対値の差を計算し、正か負かは、与えられた 2 数のうち絶対値の大きい方の符号になるので、そのことでどの位置に移動したかが判断できます。つまり、2 数の絶対値の差を求め、2 数のうち絶対値の大きい方の符号をつけることで計算できます。

【例題 2 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $(-13)+(+4)$　(2) $(+8)+(-11)$　(3) $(-2)+(+2)$　(4) $(+12)+(-3)$

＜解説＞

(1) 2 数の絶対値を考えると、

$$|-13| = 13, \qquad |+4| = 4$$

より、$13 > 4$ となるので、計算結果には、絶対値の大きい「-13」の符号である「$-$」がつきます。あとは、2 数の絶対値の差を計算して、

$$(-13)+(+4) = -(13-4) = -9$$

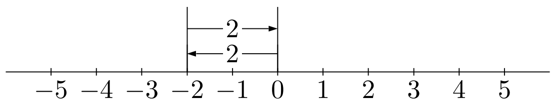
(2) 2 数の絶対値を考えると、

$$|+8| = 8, \qquad |-11| = 11$$

より、$8 < 11$ となるので、計算結果には、絶対値の大きい「-11」の符号である「$-$」がつきます。あとは、2 数の絶対値の差を計算して、

$$(+8)+(-11) = -(11-8) = -3$$

(3)



2 数の絶対値を考えると、

$$|-2|=2, \qquad |+2|=2$$

より、2 数の絶対値は等しくなります。このとき、数直線の 0（原点）を基準に、負の方向に「2」だけ移動し、さらに、正の方向に「2」移動することを意味するので、

$$(-2)+(+2)=0$$

となり、絶対値の等しい異符号の 2 数の和は「0」になります。

(4) 2 数の絶対値を考えると、

$$|+12|=12, \qquad |-3|=3$$

より、$12>3$ となるので、計算結果には、絶対値の大きい「+12」の符号である「+」がつきます。あとは、2 数の絶対値の差を計算して、

$$(+12)+(-3)=+(12-3)=+9$$

【演習 2 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $(-11)+(+1)$　(2) $(+5)+(-12)$　(3) $(-7)+(+10)$　(4) $(+11)+(-12)$

2.5 正の数・負の数の減法

「$7-(-10)$」のような負の数の引き算は、負の符号の力で、その前についている「$-$」を「$+$」に変えることができたので、

$$7-(-10)=7+10$$

のようにして、引き算を足し算（加法だけの式）にすることができます。

また、「$4+(-7)$」のような負の数の足し算は、負の符号の力で、その前についている「$+$」を「$-$」に変えて、

$$4+(-7)=4-7$$

のようにして、正の数の引き算にすることができますが、これとは逆に、「$4-7$」という正の数の引き算を無理矢理、

$$4-7=4+(-7)$$

のようにして、負の数の足し算（加法だけの式）にすることもできます。

このように、減法は加法になおすことができます。

(i) $\bigcirc-\square=\bigcirc+(-\square)$　　(ii) $\bigcirc-(-\square)=\bigcirc+\square$

このことから、正の数と負の数の減法では、減法を加法になおすことで、2 数の和を求める方法を利用して計算することができます。

【例題 2 − 5】

次の式を加法だけの式に直し、計算しなさい。

(1) $3-7$　(2) $(-2)-3$　(3) $0-(-8)$　(4) $0-12$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}3-7&=3+(-7)\\&=-(7-3)=-4\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(-2)-3&=(-2)+(-3)\\&=-(2+3)=-5\end{aligned}$$

(3)

$$0-(-8)=0+8=8$$

(4)

$$0-12=0+(-12)=-12$$

【演習 2 − 5】

次の式を計算しなさい。

(1) $7-(-15)$　(2) $9-(-6)$　(3) $(-6)-8$　(4) $-8-(-4)$

2.6　小数、分数を含む加法と減法

小数や分数を含む式においても、整数のときと同じ計算ルールに従うことで、答えを求めることができます。

(i) 同符号の 2 数の和：2 数と同じ符号をつけ、2 数の絶対値の和を計算する。
(ii) 異符号の 2 数の和：2 数のうち絶対値の大きい方の符号をつけ、2 数の絶対値の差を計算する。

また、小数や分数を含む式の減法においても、減法を加法になおせば、同じ方法で計算することができます。

【例題 2 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $(-2.4)+(-3.4)$　(2) $(-9.3)+0.8$　(3) $5-(-0.2)$　(4) $(-0.1)-1.8$

(5) $\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{12}\right)$　(6) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)$　(7) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)$　(8) $\left(-\frac{3}{8}\right)-\frac{5}{12}$

＜解説＞

(1) 同符号 (−) の 2 数の和を求めるので、

$$\begin{aligned}(-2.4)+(-3.4)&=-(2.4+3.4)\\&=-5.8\end{aligned}$$

(2) 異符号の 2 数の和を求めるので、

$$\begin{aligned}(-9.3)+0.8&=-(9.3-0.8)\\&=-8.5\end{aligned}$$

(3) 減法を加法になおし、同符号 (+) の 2 数の和を求めて、

$$\begin{aligned}5-(-0.2)&=5+0.2\\&=+(5+0.2)=5.2\end{aligned}$$

(4) 減法を加法になおし、同符号 (−) の 2 数の和を求めて

$$\begin{aligned}(-0.1)-1.8&=(-0.1)+(-1.8)\\&=-(0.1+1.8)=-1.9\end{aligned}$$

(5) 同符号 (−) の 2 数の和を求めますが、分数の和や差を求めるときにはまず通分をして、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{12}\right)&=\left(-\frac{2}{12}\right)+\left(-\frac{1}{12}\right)\\&=-\left(\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)\\&=-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(6) 異符号の 2 数の和を求めますが、まずは通分をして

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{9}\right)&=\frac{6}{9}+\left(-\frac{1}{9}\right)\\&=+\left(\frac{6}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

(7) 通分をして減法を加法になおし、同符号 (+) の 2 数の和を求めて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)&=+\left(\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\right)\\&=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

(8) 通分をして減法を加法になおし、異符号の 2 数の和を求めて、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{8}\right)-\frac{5}{12}&=\left(-\frac{9}{24}\right)+\left(-\frac{10}{24}\right)\\&=-\left(\frac{9}{24}+\frac{10}{24}\right)=-\frac{19}{24}\end{aligned}$$

【演習２－６】

次の計算をしなさい。

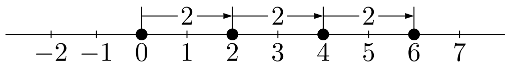
(1) $1.5 + (-9.2)$　(2) $(-9) + 0.7$　(3) $1 - 1.3$　(4) $(-0.1) - (-3)$

(5) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5}$　(6) $\frac{1}{9} + \left(-1\frac{3}{10}\right)$　(7) $\left(-1\frac{3}{5}\right) - 2\frac{1}{2}$　(8) $\left(-1\frac{4}{15}\right) - 2\frac{7}{30}$

3　乗法と除法

3.1　正の数を掛けること

$(+2)\times(+3)$ は、「2 を 3 回加える」という意味になるので、

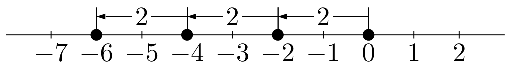


$$(+2)\times(+3) = 2+2+2 = 6$$

となります。このことを数直線上に表すと図のように、原点を基準に、正の方向に 2 だけ移動することを 3 回行って、「6」に移動することになります。このように、(正の数) × (正の数) は、数直線上を正の方向に移動していくので、答えは必ず正の数になります。

（正の数）×（正の数）＝（正の数）

$(-2)\times(+3)$ は、「(-2) を 3 回加える」という意味になるので、



$$(-2)\times(+3) = (-2)+(-2)+(-2) = -6$$

となります。このことを数直線上に表すと図のように、原点を基準に、負の方向に 2 だけ移動することを 3 回行って、「−6」に移動することになります。このように、(負の数) × (正の数) は、数直線上を負の方向に移動していくので、答えは必ず負の数になります。

（負の数）×（正の数）＝（負の数）

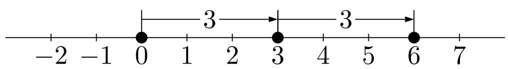
【例題 3 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $(+3)\times(+2)$　　(2) $(-3)\times(+2)$

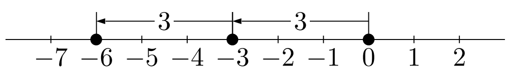
<解説>

(1) $(+3)\times(+2)$ は、「3 を 2 回加える」という意味になるので、



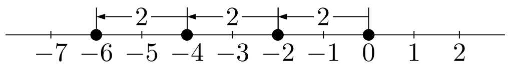
$$(+3)\times(+2) = 3+3 = 6$$

(2) $(-3)\times(+2)$ は、「(-3) を 2 回加える」という意味になるので、



$$(-3)\times(+2) = (-3)+(-3) = -6$$

3.2　負の数を掛けること



$(+2) \times (-3)$ は、「2 を (-3) 回加える」という意味になりますが、「-3」の負の符号の力で意味が反対になると考えると、

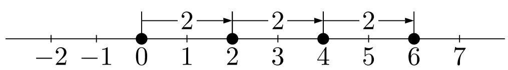
「2 を (-3) 回<u>加える</u>」$\longrightarrow$「2 を 3 回<u>減らす</u>」

となります。このことを数直線上に表すと図のように、原点を基準に、負の方向に 2 だけ移動することを 3 回行って、「-6」に移動することになります。つまり、「2×3」のときと比べると、負の符号の力で向きが反対になっています。このことから、

$2 \times (-3) = -6$

となります。また、数直線上を負の方向に移動していくので、答えは必ず負の数になります。

（正の数）×（負の数）=（負の数）



$(-2) \times 3$ という計算を数直線上で考えると、原点を基準に、負の方向に 2 だけ移動することを 3 回行うことです。それと比べ $(-2) \times (-3)$ は、「-3」の負の符号の力でそれと向きが反対になるので、原点を基準に、正の方向に 2 だけ移動することを 3 回行うことになります。このことから、

$(-2) \times (-3) = 6$

となります。また、数直線上を正の方向に移動していくので、答えは必ず正の数になります。

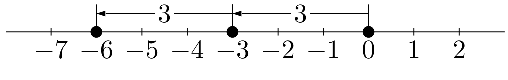
（負の数）×（負の数）=（正の数）

【例題 3 − 2】

次の計算をしなさい。

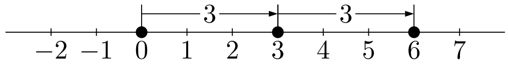
(1) $(+3) \times (-2)$　　　　(2) $(-3) \times (-2)$

<解説>



(1) $(+3) \times (-2)$ は、「3 を (-2) 回加える」、つまり、「3 を 2 回減らす」という意味になるので、

$(+3) \times (-2) = -6$



(2) 数直線上の原点を基準に、正の方向に 3 だけ移動することを 2 回行うので、

$(-3) \times (-2) = 6$

3.3　2 数の積

掛け算は、「数を乗ずる計算方法」であるので**乗法**といい、その計算結果を**積**といいます。

正の数や負の数を掛けることで、その計算結果は右の表のようになります。このとき、

計算	答え
(正の数) × (正の数)	正の数
(正の数) × (負の数)	負の数
(負の数) × (正の数)	負の数
(負の数) × (負の数)	正の数

(正の数) × (正の数) = (正の数)

を基準にして、

- (正の数) × (正の数) ⟶ (負の数) × (正の数)
- (正の数) × (正の数) ⟶ (正の数) × (負の数)

のように、正の数が 1 つ負の数に変わると、負の符号によって意味が反対になり、答えが正の数から負の数に変わります。そして、

(正の数) × (正の数) ⟶ (負の数) × (負の数)

のように、正の数が 2 つ負の数に変わると、負の符号によって意味が反対になりますが、2 つあるので「反対の反対は元に戻る」ことから、答えは正の数のままになると考えることができます。

以上のことから、「**同符号の 2 数の積は正、異符号の 2 数の積は負**」という関係になってるので、正の数と負の数の乗法では、次の手順で計算します。

(i) 表の関係から、まず符号を決める（計算した答えが正の数になるのか、負の数になるのかを考える)。
(ii) 符号を除いた数（絶対値）を計算（掛け算）する。

【例題 3 − 3】

次の計算をしなさい。

(1) 7×3　(2) $(-15) \times (-7)$　(3) $(-2) \times 11$　(4) $6 \times (-13)$

＜解説＞

(1) 「(正の数) × (正の数) = (正の数)」であるので、

$$7 \times 3 = +(7 \times 3) = 21$$

(2) 「(負の数) × (負の数) = (正の数)」であるので、

$$(-15) \times (-7) = +(15 \times 7) = 105$$

(3) 「(負の数) × (正の数) = (負の数)」であるので、

$$(-2) \times 11 = -(2 \times 11) = -22$$

(4) 「(正の数) × (負の数) = (負の数)」であるので、

$$6 \times (-13) = -(6 \times 13) = -78$$

【演習 3 − 3】

次の計算をしなさい。

(1) 5×4　(2) $(-3) \times (-9)$　(3) $(-7) \times 8$　(4) $25 \times (-7)$

3.4　2 数の商

割り算は、「数を除する計算方法」であるので**除法**といい、その計算結果を**商**といいます。

割り算は掛け算の逆の計算で、$2 \times \boxed{} = 6$ のような掛け算の式の $\boxed{}$ にあてはまる数を求める計算です。このことを、

$$\boxed{} = 6 \div 2 = 3$$

のように表します。ここで、1 つ確認をしておくと、

$$(\text{正の数}) \times (\text{正の数}) = (\text{正の数})$$

であったので、「2」と「6」が正の数であることから、$\boxed{}$ にあてはまる数も正の数になります。このことから、

$$(\text{正の数}) \div (\text{正の数}) = (\text{正の数})$$

ということがわかります。

では次に、$(-2) \times \boxed{} = -6$ という式ではどうでしょうか。

$$(\text{負の数}) \times (\text{正の数}) = (\text{負の数})$$

になるので、$\boxed{}$ には正の数が入ることになります。次に、符号を無視して考えると、2 と掛けて 6 になる数は 3 になります。このことから $\boxed{}$ は、

$$\boxed{} = (-6) \div (-2) = 3$$

ということになり、

$$(\text{負の数}) \div (\text{負の数}) = (\text{正の数})$$

ということがわかります。

また、$2 \times \boxed{} = -6$ という式では、

$$(\text{正の数}) \times (\text{負の数}) = (\text{負の数})$$

になるので、$\boxed{}$ には負の数が入ることになります。次に、符号を無視して考えると、2 と掛けて 6 になる数は 3 になります。このことから $\boxed{}$ は

$$\boxed{} = (-6) \div 2 = -3$$

ということになり、

$$(\text{負の数}) \div (\text{正の数}) = (\text{負の数})$$

ということがわかります。

最後に、$(-2) \times \boxed{} = 6$ という式では、

$$(\text{負の数}) \times (\text{負の数}) = (\text{正の数})$$

になるので、$\boxed{}$ には負の数が入ることになります。次に、符号を無視して考えると、2 と掛けて 6 になる数は 3 になります。このことから $\boxed{}$ は

$$\boxed{} = 6 \div (-2) = -3$$

ということになり、

（正の数）÷（負の数）＝（負の数）

ということがわかります。

以上のことから、2 数の商についてまとめると右の表のようになり、**「同符号の 2 数の商は正、異符号の 2 数の商は負」**という関係になっています。このことを利用して、正の数と負の数の除法でも乗法と同じようにして、次の手順で計算します。

計算	答え
（正の数）÷（正の数）	正の数
（正の数）÷（負の数）	負の数
（負の数）÷（正の数）	負の数
（負の数）÷（負の数）	正の数

(i) 表の関係から、まず符号を決める（計算した答えが正の数になるのか、負の数になるのかを考える）。
(ii) 符号を除いた数字のみを計算する。

【例題 3 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $10 \div 2$　(2) $16 \div (-8)$　(3) $(-14) \div (-2)$　(4) $(-35) \div 7$

<解説>

(1) 「（正の数）÷（正の数）＝（正の数）」より、

$$\begin{aligned} 10 \div 2 &= +(10 \div 2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

(2) 「（正の数）÷（負の数）＝（負の数）」より、

$$\begin{aligned} 16 \div (-8) &= -(16 \div 8) \\ &= -2 \end{aligned}$$

(3) 「（負の数）÷（負の数）＝（正の数）」より、

$$\begin{aligned} (-14) \div (-2) &= +(14 \div 2) \\ &= 7 \end{aligned}$$

(4) 「（負の数）÷（正の数）＝（負の数）」より、

$$\begin{aligned} (-35) \div 7 &= -(35 \div 7) \\ &= -5 \end{aligned}$$

【演習 3 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $14 \div 7$　(2) $30 \div (-3)$　(3) $(-48) \div (-16)$　(4) $(-96) \div 6$

3.5 逆数

2 つの数の積が 1 になるとき、一方の数を、他方の数の**逆数**といいます。この「逆数」というのは、一方の数の「分子と分母を逆にした数」になります。

（例） $\dfrac{\square}{\bigcirc} \times \dfrac{\bigcirc}{\square} = 1$

【例題 3 − 5】

次の逆数を求めなさい。

(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) 4　(3) 0.3　(4) -3

<解説>

(1) $\dfrac{2}{3}$ の分母は「3」、分子は「2」であるので、この分母と分子を逆にした数を考えて、

$\dfrac{2}{3}$ の逆数：$\dfrac{3}{2}$

(2) 4 には分母がないので、逆数にはできなさそうですが、4 を無理矢理

$$4 = \frac{4}{1}$$

のように分数にすると、分母は「1」、分子は「4」であるので、この分母と分子を逆にした数を考えて、

4 の逆数：$\dfrac{1}{4}$

(3) 0.3 にも分母がないので、まずは先ほどと同様に分数にすることを考えます。すると、0.3 は

$$0.3 = \frac{3}{10}$$

のように分数で表すことができるので、分母と分子を逆にした数を考えて、

0.3 の逆数：$\dfrac{10}{3}$

(4) -3 にも分母がないので、分数にして表すと、

$$-3 = -\frac{3}{1}$$

のようになります。この分母と分子を逆にした数を考えて、

-3 の逆数：$-\dfrac{1}{3}$

【演習 3 − 5】

次の逆数を求めなさい。

(1) $-\dfrac{1}{5}$　(2) 6　(3) -0.4　(4) $1\dfrac{1}{4}$

3.6　除法と乗法の関係

「2 で割る」ことと「$\frac{1}{2}$ にする」ことは同じなので、

「$\div 2$」と「$\times \frac{1}{2}$」

という計算は同じになります。つまり、「ある数で割ること」と「その数の逆数を掛けること」は同じ計算になります。この関係を用いることで、除法は乗法に直すことができます。

【例題 3 − 6】

次の除法を乗法になおして計算しなさい。

(1) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div 6$　　(2) $5 \div \left(-\frac{25}{7}\right)$

＜解説＞

(1) 割る数「6」の逆数は $\frac{1}{6}$ であるので、

$$\div 6 \longrightarrow \times \frac{1}{6}$$

のように除法を乗法にすることができます。このことから、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{4}\right) \div 6 &= \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{6} \\ &= -\left(\frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{6}\,{}^{2}}\right) = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(2) 割る数「$-\frac{25}{7}$」の逆数は $-\frac{7}{25}$ であるので、

$$\div \left(-\frac{25}{7}\right) \longrightarrow \times \left(-\frac{7}{25}\right)$$

のように除法を乗法にすることができます。このことから、

$$\begin{aligned}5 \div \left(-\frac{25}{7}\right) &= 5 \times \left(-\frac{7}{25}\right) \\ &= -\left(\cancel{5} \times \frac{7}{\cancel{25}\,{}^{5}}\right) = -\frac{7}{5}\end{aligned}$$

【演習 3 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $(-4) \div \frac{2}{3}$　　(2) $1 \div \left(-3\frac{1}{2}\right)$

3.7　小数、分数を含む乗法と除法

ここでは、小数や分数を含む式における乗法や除法について考えますが、小数や分数になったからといって、整数のときと計算方法が変わるわけではありません。つまり、小数や分数を含む式でも、整数のときの計算と同じように、

(i) 符号を決める（計算した答えが正の数になるのか、負の数になるかを考える）。
(ii) 符号を除いた数のみを計算する。

という手順で行います。

【例題 3 − 7】

次の計算をしなさい。

(1) $(-2.4) \times 2.5$　(2) $1.6 \div (-0.8)$　(3) $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{6}$　(4) $\left(-\frac{3}{10}\right) \div \left(-\frac{3}{8}\right)$

＜解説＞

(1) 異符号の 2 数の積であるので、

$$(-2.4) \times 2.5 = -(2.4 \times 2.5) = -6$$

また、小数を分数になおすことで次のように計算することもできます。

$$\begin{aligned}(-2.4) \times 2.5 &= \left(-\frac{12}{5}\right) \times \frac{5}{2} \\ &= -\left(\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{5}^{1}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}^{1}}\right) = -6\end{aligned}$$

(2) 異符号の 2 数の商であるので、

$$1.6 \div (-0.8) = -(1.6 \div 0.8) = -2$$

また、小数を分数になおすことで次のように計算することもできます。

$$\begin{aligned}1.6 \div (-0.8) &= \frac{8}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\left(\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{5}^{1}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{4}^{1}}\right) = -2\end{aligned}$$

(3) 異符号の 2 数の積であるので、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{6} &= -\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}^{1}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}^{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4) 同符号の 2 数の商であるので、

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{10}\right) \div \left(-\frac{3}{8}\right) &= +\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{10}^{5}} \times \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}^{1}}\right) \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

【演習 3 − 7】

次の計算をしなさい。

(1) $(-1.8) \times 0.8$　(2) $(-0.6) \div (-1.8)$　(3) $8\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$　(4) $\frac{3}{7} \div \left(-1\frac{1}{5}\right)$

4　いろいろな計算

$4+(-7)$ のような式の場合、かっこを省略すると

$$4+-7$$

のようになり、「+」と「−」の記号が、たし算やひき算を表す記号なのか、それとも正の符号や負の符号を表しているのかがまぎらわしいので、省略することができません。しかし、$(-4)+7$ のように式のはじめに負の数があるような場合には、

$$(-4)+7 \longrightarrow -4+7$$

と、かっこを省略しても負の符号であることはわかるので、省略することができます。

また、$7+10+4+(-7)$ のように加法だけで式を表すとき、「7」、「10」、「4」、「-7」という 4 つの数の足し算と考えることができ、この 4 つの数それぞれを**項**といいます。このとき、正の数である項を**正の項**、負の数である項を**負の項**といいます。

正の項 : 7,　10,　4　　　　　負の項 : − 7

しかし、項を考えるとき、わざわざ加法のみの式で表すのは面倒なので、次のような考え方で項を判断します。

(i) 式の中に（　　）のない形を作る。

$$7-(-10)+4-7 \longrightarrow 7+10+4-7$$

(ii) 「+」や「−」の記号の前に「/」を入れる。

$$7+10+4-7 \longrightarrow 7/+10/+4/-7$$

(iii) 「/」により区切られたそれぞれの数が項。
（「+」の符号は省略できるので、+10 と 10、+4 と 4 はどちらで表しても問題ありません）。

$$7,\quad +10,\quad +4,\quad -7$$

4.1　加法の交換法則

加法のみの式であれば、

$$\bigcirc + \square = \square + \bigcirc$$

のように計算の順序を変えても結果は変わりません。これを**加法の交換法則**といいます。

例えば、

$$3+4=7, \qquad 4+3=7$$

のように、「3」と「4」の順序を変えても計算結果は変わりません。このようになることはすでに経験していたり、何となくそうなるだろうということを知っている人は多いと思います。ただ、このようになることは、

正の数のときで経験していることだったのですが、負の数をふくむ式でも、この「加法の交換法則」が成り立ちます。

しかし、「加法」の交換法則なので、減法のときは、

$$7-4=3, \qquad 4-7=-3$$

のように交換法則は成り立たちません。そのため、加法のみの式で考える必要がありますが、加法のみの式で表したときのそれぞれの数が「項」です。つまり、加法のみの式で表したときに計算の順序を変えることができるということは、「項の順序なら変えてもいい」ということになります。このことから減法のときでも、

$$7-4 \longrightarrow 7/-4 \longrightarrow \text{（項の順序を入れかえて）} \longrightarrow -4+7$$

のようにして順序を変えれば、交換法則が成り立ちます。つまり、「加法の交換法則」というのは言いかえれば、「項の交換法則」ということができると思います。ただし、省略している正の符号が必要になる場合もあるので注意しましょう。

また、加法の交換法則は、2 つの項のときだけでなく、項の数がどれだけ増えても成り立ちます。

【例題 4 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $(-3)+8$　　(2) $8+(-3)$

<解説>

(1) 異符号の 2 数の和を求めるので、

$$(-3)+8=+(8-3)=5$$

(2) 異符号の 2 数の和を求めるので、

$$8+(-3)=+(8-3)=5$$

以上のことから

$$(-3)+8=8+(-3)$$

となり、計算の順序を変えても結果は変わらないので、加法の交換法則が成り立つことが確認できます。

4.2 加法の結合法則

加法のみの式であれば、

$$(\bigcirc + \square) + \triangle = \bigcirc + (\square + \triangle)$$

のように加える数をどのようにまとめても結果は同じになり、これを**加法の結合法則**といいます。

例えば、$5 + 3 + 7$ という式があったとき、

(i) 「$5 + 3$」を先に計算

$$(5 + 3) + 7 = 8 + 7 = 15$$

(ii) 「$3 + 7$」を先に計算

$$5 + (3 + 7) = 5 + 10 = 15$$

と、どちらの方法で計算しても答えは一致します。そして、このようになることは今までに経験している人もいると思いますが、それは正の数のみの式のときでした。しかし、この「加法の結合法則」は、負の数を含む式でも成り立ちます。また、減法のときは成り立ちませんが、加法のみの式で表せば（項で考えれば）成り立つことになります。

3 つ以上の項を含む加法・減法では、加法の交換法則や結合法則を利用することで、面倒な計算が楽になる場合があります。特に、計算が面倒だと感じるような問題では、工夫ができることが多くあります。計算が楽になれば、速く解けることはもちろんのこと、計算ミスを減らすことにもつながります。このようなことを意識して計算に取り組むようにしてください。

【例題 4 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $\{(-10) + 4\} + (-2)$

(2) $(-10) + \{4 + (-2)\}$

<解説>

通常、足し算や引き算をするときには左から順番に計算をしますが、かっこがある場合はかっこから先に計算をします。

(1) まずはかっこのある「$(-10) + 4$」を先に計算します。異符号の 2 数の和であるので、

$$(-10) + 4 = -(10 - 4) = -6$$

このことから、

$$\{(-10) + 4\} + (-2) = (-6) + (-2)$$

と変形できます。そして、この同符号の 2 数の和を計算すると、

$$(-6) + (-2) = -(6 + 2) = -8$$

以上のことから、次のように計算することができます。

$$\begin{aligned}\{(-10) + 4\} + (-2) &= -(10 - 4) + (-2) \\ &= (-6) + (-2) \\ &= -(6 + 2) = -8\end{aligned}$$

(2) こちらもまずはかっこのある「$4+(-2)$」を先に計算します。異符号の 2 数の和であるので、

$$4+(-2)=+(4-2)=2$$

このことから、

$$(-10)+\{4+(-2)\}=(-10)+2$$

と変形できます。そして、計算した式も異符号の 2 数の和になるので、

$$(-10)+2=-(10-2)=-8$$

となり、次のように計算することができます。

$$\begin{aligned}(-10)+\{4+(-2)\}&=(-10)+(4-2)\\&=(-10)+2\\&=-(10-2)=-8\end{aligned}$$

(1), (2) の計算結果からどちらも同じ値になり、加法の結合法則が成り立っていることがわかります。

【演習 4 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $(-6)+8-4-(-8)$

(2) $(-14)+73+27-36$

4.3 乗法の交換法則

乗法のみの式であれば、

$$\bigcirc \times \square = \square \times \bigcirc \qquad (例\quad 2 \times 3 = 3 \times 2)$$

と計算の順序を変えても結果は変わりません。これを加法のときと同じように**乗法の交換法則**といい、負の数を含んでいても成り立ちます。

【例題 4 − 3】

次の計算をしなさい。

(1) $(-5) \times 4$　　(2) $4 \times (-5)$

＜解説＞

(1) 異符号の 2 数の積であるので、

$$(-5) \times 4 = -(5 \times 4) = -20$$

(2) 異符号の 2 数の積であるので、

$$4 \times (-5) = -(4 \times 5) = -20$$

この計算の結果から

$$(-5) \times 4 = 4 \times (-5)$$

となっているので、計算の順序を変えても結果が変わらないことが確認できます。

4.4 乗法の結合法則

乗法のみの式であれば、

$$(\bigcirc \times \square) \times \triangle = \bigcirc \times (\square \times \triangle)$$

のように掛ける数をどのようにまとめても結果は同じになり、これを**乗法の結合法則**といいます。
例えば、「$3 \times 2 \times 5$」という 3 つの数の掛け算の場合では、

$$(3 \times 2) \times 5 = 6 \times 5 = 30, \qquad 3 \times (2 \times 5) = 3 \times 10 = 30$$

のようにして、掛ける数をどのようにまとめても計算した結果は一致します。このことは、正の数のときであればすでに経験している人もいると思いますが、負の数を含んでいても成り立ちます。
また、「乗法」の結合法則や交換法則なので、除法では成り立ちません。ただし、除法は乗法になおすことができるので、除法が含まれている式でも、乗法のみの式で表せば交換法則や結合法則を利用することができます。そのため、除法が含まれている式では、まず最初に乗法になおしてから計算するようにします。
負の数を何個か掛ける場合、結合法則を利用して、

$$\{ (\text{負の数}) \times (\text{負の数}) \} \times \{ (\text{負の数}) \times (\text{負の数}) \} \times \cdots$$

のように 2 つずつのグループにすることができます。このとき、(負の数) × (負の数) = (正の数) になるので、

$$(\text{正の数}) \times (\text{正の数}) \times \cdots$$

のようになります。正の数は何回かけても正の数なので、結局のところ、2 つずつの負の数のグループがぴったりだったのか、それとも 1 つ余ってしまうのかがポイントになりますね。ぴったりの場合は、もちろん正の数。1 つ余ってしまう場合には負の数になります。つまり、、

負の数が偶数個の積：正の数,　　負の数が奇数個の積：負の数

となるので、このことを利用して積の符号をチェックします。

【例題 4 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $\{3 \times (-4)\} \times 5$　　(2) $3 \times \{(-4) \times 5\}$

＜解説＞

かっこが含まれる式では必ずかっこの中身から計算をしていきます。

(1)

$$\begin{aligned} \{3 \times (-4)\} \times 5 &= \{-(3 \times 4)\} \times 5 \\ &= (-12) \times 5 \\ &= -(12 \times 5) \\ &= -60 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 3 \times \{(-4) \times 5\} &= 3 \times \{-(4 \times 5)\} \\ &= 3 \times (-20) \\ &= -(3 \times 20) \\ &= -60 \end{aligned}$$

この計算の結果から

$$\{3 \times (-4)\} \times 5 = 3 \times \{(-4) \times 5\}$$

となっていて、掛ける数をどのようにまとめても計算の結果は変わらないことが確認できます。

また、3 つ以上の項を含む乗法・除法では、乗法の交換法則や結合法則を利用することで、面倒な計算が楽になる場合があります。

【演習 4 − 4】

次の計算をしなさい。

(1) $(-2.5) \times (-3) \times (-4)$　(2) $\left(-\frac{2}{3}\right) \div \frac{9}{10} \div \left(-\frac{5}{2}\right)$　(3) $6 \times (-8) \div (-16)$

4.5 同じ数の積（累乗）

同じ数をいくつか掛け合わせたものを**累乗（るいじょう）**といい、

$7\times 7=7^2$ （7 の 2 乗）, $7\times 7\times 7=7^3$ （7 の 3 乗）

のようにして表すことができます。このとき、数の右上に掛け合わせた個数を表し、その数のことを**指数**といいます。

（例）7^2の指数：2, 7^3の指数：3

また、2 乗のことを**平方**、3 乗のことを**立方**と言うことがあります。

（例）7^2 : 7 の平方, 7^3 : 7 の立方

面積や体積の単位が、

cm^2:平方センチメートル, cm^3:立方センチメートル

となっていることからも納得できると思います。

【例題 4 − 5】

次の計算をしなさい。

(1) $(-3)^2$　(2) -3^2　(3) $-(-3)^2$　(4) $(-3)^3$

＜解説＞

(1) まずは累乗を掛け算の形になおして計算してみましょう。

$$\begin{aligned}(-3)^2&=(-3)\times(-3)\\&=+(3\times 3)=9\end{aligned}$$

(2) 「3」の右上に指数があるので、「3 を 2 つかけ合わせた」ことを表しています。

$$-3^2=-(3\times 3)=-9$$

(3) 指数はかっこの右上についているので、かっこを 2 つかけ合わせたことを表しています。

$$\begin{aligned}-(-3)^2&=-\{(-3)\times(-3)\}\\&=-\{+(3\times 3)\}=-9\end{aligned}$$

(4) かっこの右上に指数がついているので、かっこを 3 つかけ合わせたことを表しています。そのことから、

$$(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)$$

負の数が 3 個（奇数個）の積を求めるので、答えは負の数になります。このことから、

$$\begin{aligned}(-3)^3&=(-3)\times(-3)\times(-3)\\&=-(3\times 3\times 3)=-27\end{aligned}$$

【演習 4 − 5】

次の計算をしなさい。

(1) $(-1)^3 \times (-2)^2$

(2) $(-0.2)^4 \times 5^3$

(3) $(-4)^2 \div (-2)^3$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times (-3)^4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

4.6 分配法則

「2 を 3 個と 2 を 5 個を合わせる」ということを式に表すと、

$$2 \times 3 + 2 \times 5$$

となります。また、このとき 2 は $(3+5)$ 個あることになるので、このことを式では、

$$2 \times 3 + 2 \times 5 = 2 \times (3+5)$$

と表すことができます。

このように、

$$(\bigcirc + \square) \times \triangle = \bigcirc \times \triangle + \square \times \triangle$$

と式変形することができ、かっこの中のすべての項にそれぞれ掛け算を 分配 するこの計算法則を、**分配法則**といいます。

また、乗法の交換法則が成り立つので、掛け算の順序を逆にして、

$$\triangle \times (\bigcirc + \square) = \triangle \times \bigcirc + \triangle \times \square$$

という形でも分配法則が成り立ちます。

【例題 4 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 6$　　(2) $48 \times 614 + 48 \times 386$

<解説>

(1) 一般的な計算の仕方では、かっこを先に計算するので、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 6 &= \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \times 6 \\ &= \frac{5}{\cancel{6}} \times \cancel{6} = 5\end{aligned}$$

また、分配法則を利用すると通分しなくて済むので、計算が少し楽になります。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times 6 &= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{6}^{3} + \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{6}^{2} \\ &= 3 + 2 = 5\end{aligned}$$

(2) 分配法則「$\triangle \times (\bigcirc + \square) = \triangle \times \bigcirc + \triangle \times \square$」を右から左の変形に利用すると、

$$\begin{aligned}48 \times 614 + 48 \times 386 &= 48 \times (614 + 386) \\ &= 48 \times 1000 = 48000\end{aligned}$$

分数をふくむ式の計算では通分が面倒なのですが、分配法則を利用することで通分せずに計算することができる場合があり、このようなときには計算が非常に楽になります。

「計算が面倒だな」と思うときは、交換法則、結合法則、分配法則を利用し工夫することで、計算が楽になる場合が多くあります。計算が楽になるということは、速く正確に計算できることにもつながるので、このようなことにも意識しながら、計算問題に取り組んでみてください。

【演習 4 − 6】

次の計算をしなさい。

(1) $41 \times 29 - 17 \times 29 + 23 \times 29 - 27 \times 29$　　(2) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) \times (-6^2)$

4.7　四則を含む式の計算

数の加法、減法、乗法、除法をまとめて**四則**といいます。

式を計算するときには普通、左から順に計算しますが、加減と乗除が混じった式を計算（四則計算）する場合には、乗除を先に計算します。ただし、かっこをふくむ式の計算では、かっこの中を先に計算します。

【例題 4 − 7】

次の計算をしなさい。

(1) $8-(-2)^2$　(2) $7\times 3-(-5)$　(3) $15\div(-3)+6$　(4) $(1-3\times 4)\times 3$

＜解説＞

加法、減法、乗法、除法が混じった式を計算する場合、計算の順序に気をつけなければいけませんが、計算の仕方は今までと変わりません。

(1) 累乗（乗法）を先に計算します。

$$8-(-2)^2=8-4=4$$

(2) 乗法を先に計算します。

$$7\times 3-(-5)=21+5=26$$

(3) 除法を先に計算します。

$$15\div(-3)+6=-5+6=1$$

(4) かっこの中の乗法を先に計算します。

$$\begin{aligned}(1-3\times 4)\times 3&=(1-12)\times 3\\&=(-11)\times 3=-33\end{aligned}$$

【演習 4 − 7】

次の計算をしなさい。

(1) $\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{2}{13}\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{6}\right)$　(2) $(-5)\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\div\left(-1\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(-1\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　(4) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\div 0.75\times\left(-\dfrac{9}{5}\right)+\dfrac{1}{5}$