【中１数学】平面図形

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　平面図形の基礎

1.1　直線

2 点 A, B を通り、両方に限りなくのびているまっすぐな線を**直線 AB** といいます。また、直線 AB のうち、点 A から点 B までの部分を**線分 AB** といい、線分 AB の長さを **2 点 A, B 間の距離**といいます。このとき、線分 AB の長さを「AB」で表します。さらに、点 A を端として他方（点 B の方向）に限りなくのびているものを**半直線 AB** といいます。両方に限りなくのびているのではなく、半分（片方）だけ直線になっていると考えてください。

【例題 1 − 1】

2 点 A, B が図のように与えられているとき、次の図をかきなさい。

(1) 直線 AB

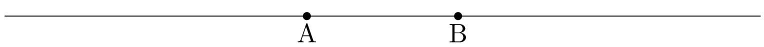
(2) 線分 AB

(3) 半直線 AB

(4) 半直線 BA

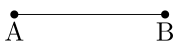
＜解説＞

(1) 直線 AB は、2 点 A, B を通り、両方に限りなくのびているまっすぐな線なので、次のようになります。

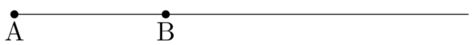


ただ、「両方に限りなくのびる」といっても、かくスペースには限りがあります。かくスペースが指定されている場合には、そのスペースいっぱいにかき、特に指定されていない場合には、 2 点 A, B を通る過ぎるように、適当な長さ延長しておけば問題ありません。

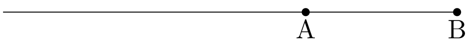
(2) 線分 AB は、(1) でかいた直線の点 A から点 B までの部分になります。つまり、点 A(B) と点 B(A) を結んだまっすぐな線をかけばよいので、次のようになります。



(3) 半直線 AB は、A を端として、点 B の方向に限りなくのびているまっすぐな線になるので、次のようになります。



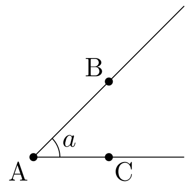
(4) 半直線 BA は、半直線 AB とは異なり、点 B を端として、点 A の方向に限りなくのびているまっすぐな線なので、次のようになります。



直線 AB と直線 BA、線分 AB と線分 BA は同じものを表しますが、半直線 AB と半直線 BA は異なるものになるので注意してください。

1.2 角

3 つの点 A, B, C をとり、A を端の点とする半直線 AB と半直線 AC をかきます。このようにしてできる図形を**角**といい、記号で ∠BAC（∠CAB）と表し、「角 BAC」と読みます。また、∠BAC の大きさを ∠A や $\angle a$ のように表すこともあるので覚えておきましょう。

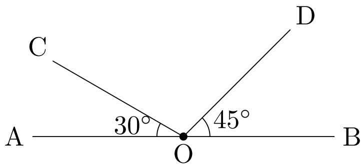


【例題 1 − 2】

右の図において、次の角の大きさを求めなさい。

(1) ∠AOC　　(2) ∠DOB

(3) ∠COD　　(4) ∠AOD



<解説>

(1) ∠AOC は、半直線 OA と OC によりできる図形なので、その大きさは図より、

$$\angle \mathrm{AOC} = 30^\circ$$

(2) ∠DOB は、半直線 OD と OB によりできる図形なので、その大きさは図より、

$$\angle \mathrm{DOB} = 45^\circ$$

(3) ∠COD は、半直線 OC と OD によりできる図形です。その大きさは、図からは直接わかりませんが、一直線の作る角 ∠AOB の大きさが 180° であるので、

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{COD} &= \angle \mathrm{AOB} - (\angle \mathrm{AOC} + \angle \mathrm{BOD}) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) \\ &= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ\end{aligned}$$

(4) ∠AOD は、半直線 OA と OD によりできる図形です。その大きさは (3) より、

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AOD} &= \angle \mathrm{AOC} + \angle \mathrm{COD} \\ &= 30^\circ + 105^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

または、一直線の作る角 ∠AOB から ∠DOB を取り除くことによって、

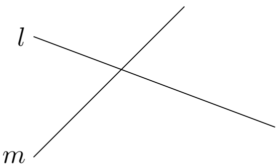
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AOD} &= \angle \mathrm{AOB} - \angle \mathrm{DOB} \\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

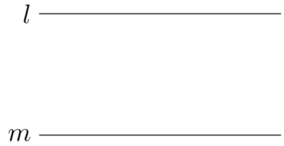
1.3　2 直線の位置関係

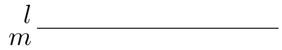
2 つの直線に関する位置の関係について考えるとき、手元に 2 つの棒状のもの（ペンなど）を用意し、それらを動かしていろいろな置き方をしてみると、イメージがつかみやすくなります。

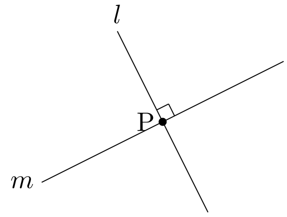
同じ平面上に 2 つの直線 l, m があるとき、この 2 直線の位置関係には、次の 3 つの場合が考えられます。

① 1 点で交わる　　② 交わらない　　③ 一致する



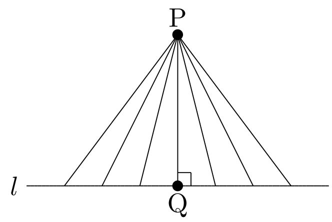






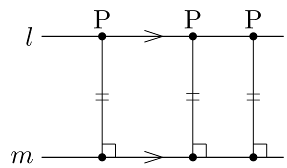
①のように 2 つの直線が 1 点で交わるとき、その交点を P とします。このとき、$\angle$P の大きさが 90°（直角）であると、l と m は**垂直**である（**直交**する）といい、$l \perp m$ と表します。また、図では右図のようにして直角であることを表します。

垂直な 2 直線の一方を、他方の**垂線**といいます。



右の図のように点 P から直線 l 上の点 Q と結んだとき、PQ $\perp$ l となると線分 PQ の長さは最も短くなり、この長さを**点 P と直線 l との距離**といいます。2 点 A, B 間の距離が線分 AB の長さになりますが、これも、2 点 A, B を結んだときに「最も短くなる」長さだからです。

このように、数学で「距離」を考えるときは、「最短の長さ」になります。

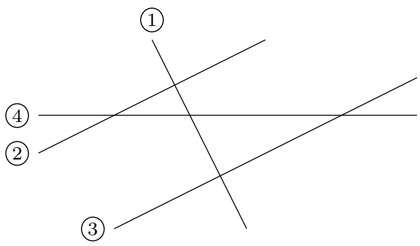


次に、②のように 2 つの直線が交わらないとき、l と m は**平行**であるといい、$l \mathbin{/\!/} m$ と表します。また、図では右図のようにして、平行である 2 つの直線に同じ向きの矢印をつけることで、平行であることを表します。このとき、直線 l 上に点 P をとったとき、点 P が直線 l 上のどこにあっても、点 P と直線 l との距離は一定になり、この距離を**平行な 2 直線 l, m 間の距離**といいます。

【例題 1 − 3】

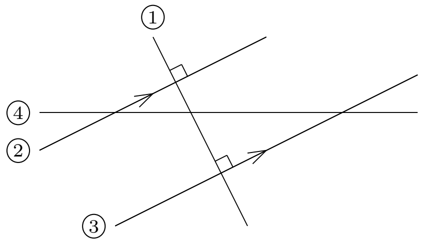
右の図の中から、2 直線の位置関係が、次のようになっているものをそれぞれ記号で答えなさい。

(1) 平行　　(2) 垂直



＜解説＞

それぞれの直線は右図のような関係になっています。



(1) 交わらない 2 つの直線は、

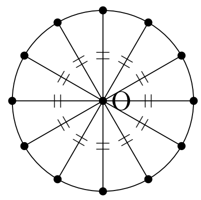
②と③

(2) 直角に交わる 2 つの直線は、

①と②,　①と③

2 円とおうぎ形

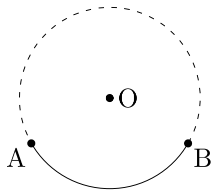
2.1 円とおうぎ形



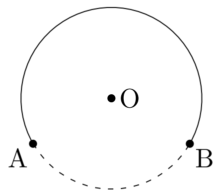
右の図のように、平面上のある 1 点から等しい距離にある点の集まりを**円**、または、**円周**といいます。このとき、図のように基準となる点を O とすると、点 O を**円の中心**といい、O を中心とする円を**円 O** と表します。

また、次の図のように 2 点 A, B を両端とする円周の一部を**弧 AB** といい、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ のように表します。2 点 A, B にはさまれる弧は、図のように短いもの（劣弧）と長いもの（優弧）の 2 つがありますが、普通、弧 AB というときは短い弧（劣弧）をさします。

(i) 弧 AB（短い）

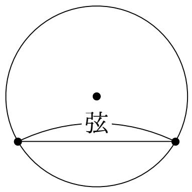


(ii) 弧 AB（長い）

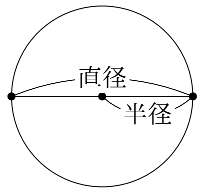


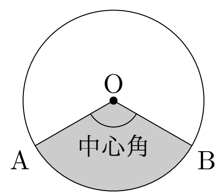
そして、円周上の 2 点を結ぶ線分を**弦**といい、そのうち、円の中心を通るものを**直径**といいます。また、円の中心と円周上の点を結ぶ線分を**半径**といいます。

(i) 弦



(ii) 直径と半径





円の中心を頂点とし、2 辺が弧の両端を通る角（∠AOB）を、その弧（$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$）に対する**中心角**といいます。また、それとは逆に、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を中心角 ∠AOB に対する弧といいます。

右の図のように 1 つの弧（$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$）とその中心角を与える 2 辺（OA, OB）で囲まれた図形（色のついた部分）を**おうぎ形**といいます。

2.2 円の周の長さと面積

円周の直径に対する割合を**円周率**といい、次の式によって得られる値になります。

$$(\text{円周率}) = (\text{円周}) \div (\text{直径})$$

この値は円の大きさにかかわらず、どのような円でも同じ値になり、次のようにどこまでも続く値になります。

$$3.14159265358979323846264338327950288841971693\cdots\cdots$$

この値をそのまま使うのは不便であるので、普通、円周率には「3.14」という数を用いたり、「π（パイ）」という記号を用いて表すこともあります。

【例題 2 − 2】

半径 r の円があるとき、次のものをそれぞれ r を用いて表しなさい。ただし、円周率は π とします。

(1) 円の周の長さ l　　(2) 円の面積 S

<解説>

(1) 円の周の長さは、

$$(\text{円の周の長さ}) = (\text{直径}) \times (\text{円周率})$$

で求めることができます。また、直径は半径の 2 倍であるので、半径を用いると、

$$(\text{円の周の長さ}) = 2 \times (\text{半径}) \times (\text{円周率})$$

で求めることができます。この式に、円の周の長さ l、半径 r、円周率 π をあてはめて、

$$l = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$$

(2) 円の面積は

$$(\text{円の面積}) = (\text{半径}) \times (\text{半径}) \times (\text{円周率})$$

で求めることができるので、この式に、円の面積 S、半径 r、円周率 π をあてはめて、

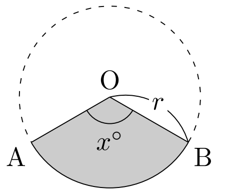
$$S = r \times r \times \pi = \pi r^2$$

【演習 2 − 2】

次の円について、面積 S と周の長さ l を求めなさい。ただし、円周率は π とします。

(1) 直径が 8 cm の円　　(2) 半径が 3 cm の円

2.3　おうぎ形の弧の長さと面積



右の図のように、おうぎ形は円の一部分です。そこで、中心角が 360° になっているおうぎ形が円になると考えると、中心角が $x°$ のおうぎ形は、円の $\dfrac{x}{360}$（円を 360 等分したときの x 個分）になります。このことから、半径 r、中心角 $x°$ のおうぎ形の弧の長さと面積は、次のようにして求めることができます。

$$
\begin{aligned}
(\text{おうぎ形の弧の長さ}) &= (\text{円の周の長さ}) \times \frac{x}{360}\\
&= 2\pi r \times \frac{x}{360}\\
(\text{おうぎ形の面積}) &= (\text{円の面積}) \times \frac{x}{360}\\
&= \pi r^2 \times \frac{x}{360}
\end{aligned}
$$

このとき、おうぎ形の弧の長さを l とすると、

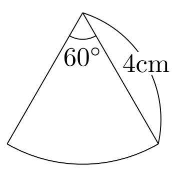
$$
\begin{aligned}
(\text{おうぎ形の面積}) &= \pi r^2 \times \frac{x}{360}\\
&= \frac{1}{2} \times 2 \times \pi r \times r \times \frac{x}{360}\\
&= \frac{1}{2} \times \left(2\pi r \times \frac{x}{360}\right) \times r\\
&= \frac{1}{2} lr
\end{aligned}
$$

のように表され、おうぎ形の面積は、底辺 l、高さ r の三角形の面積を求めるものだと考えることができます。

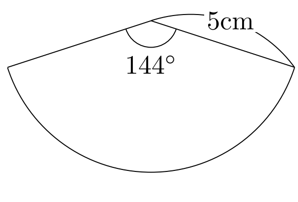
【例題 2 − 3】

次のようなおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。

(1) 半径 4cm、中心角 60°



(2) 半径 5cm、中心角 144°



＜解説＞

(1) 半径 4cm、中心角 60° のおうぎ形の弧の長さと面積は、円の $\dfrac{60}{360}$ になるので、

$$(\text{おうぎ形の弧の長さ}) = \cancel{2}^{1} \times \pi \times 4 \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}^{3}} = \frac{4}{3}\pi\ (\text{cm})$$

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \pi \times 4 \times \cancel{4}^{2} \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}^{3}} = \frac{8}{3}\pi\ (\text{cm}^2)$$

また、求めたおうぎ形の弧の長さから、次のようにして面積を求めることもできます。

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 4 = \frac{8}{3}\pi\ (\text{cm}^2)$$

(2) 半径 5cm、中心角 144° のおうぎ形の弧の長さと面積は、円の $\dfrac{144}{360}$ になるので、

$$(\text{おうぎ形の弧の長さ}) = 2 \times \pi \times \cancel{5}^{\,1} \times \frac{\cancel{144}^{\,2}}{\cancel{360}_{\,1}} = 4\pi\ (\text{cm})$$

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \pi \times 5 \times \cancel{5}^{\,1} \times \frac{\cancel{144}^{\,2}}{\cancel{360}_{\,1}} = 10\pi\ (\text{cm}^2)$$

また、求めたおうぎ形の弧の長さから、次のようにして面積を求めることもできます。

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 5 = 10\pi\ (\text{cm}^2)$$

【演習 2 − 3】

次のようなおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

(1) 半径 10 cm、弧の長さ 4π cm　　(2) 半径 12 cm、面積 18π cm^2

3　点の集合と作図

3.1　三角形の決定条件

三角形の 3 つの頂点を A, B, C とするとき、このような三角形を △ABC と表します。
三角形は次のいずれかの条件が与えられると、三角形をただ 1 つに決めることができます。

① 3 辺の長さ
② 2 辺の長さとその間の角の大きさ
③ 1 辺の長さとその両端の角の大きさ

【例題 3 − 1】

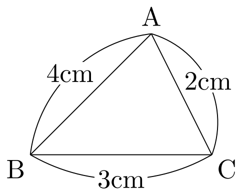
次の (1)〜(4) について、△ABC がただ 1 通りに決まるのはどの場合ですか。番号で答えなさい。

(1) AB =4cm, BC =3cm, CA =2cm
(2) AB =5cm, BC =6cm, ∠B =45°
(3) AB =7cm, CA =9cm, ∠C =30°
(4) BC =3cm, ∠B =60°, ∠C =20°

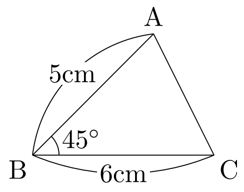
＜解説＞

適当な形、大きさの三角形を用意し、その三角形に与えられた条件をあてはめると考えやすくなります。

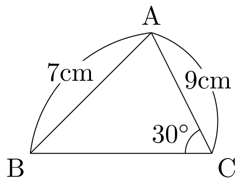
(1) 三角形の「3 辺の長さ（①）」が与えられているので、1 通りに決まります。



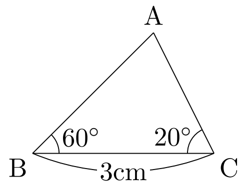
(2) 三角形の「2 辺の長さとその間の角の大きさ（②）」が与えられているので、1 通りに決まります。



(3) 三角形の「2 辺の長さと 1 つの角の大きさ」が与えられていますが、2 辺の間の角ではありません。そのため 1 通りには決まりません。



(4) 三角形の「1 辺の長さとその両端の角の大きさ（③）」が与えられているので、1 通りに決まります。



以上のことから、△ABC がただ 1 通りに決まるのは、

(1), (2), (4)

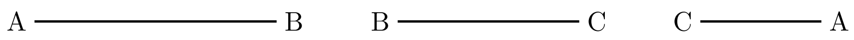
3.2　作図の基本

直線をひくための定規と、円をかいたり長さを移したりするためのコンパスのみを使って図形をかくことを、**作図**といいます。作図の場合、定規は長さを測るために使うのではないことに注意してください。

また、作図の問題の解答では、どのように作図をしたのかわかるように、作図に使った線は消さないで残しておきます。

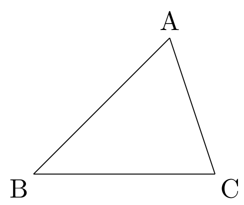
【例題 3 − 2】

3 辺 AB, BC, CA が次の図に示された長さとなるような △ABC を作図しなさい。



＜解説＞

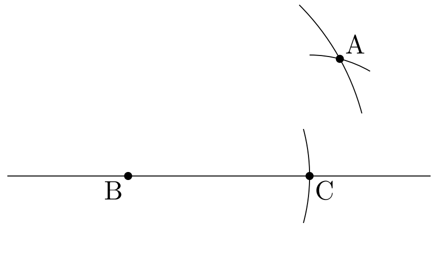
大きさ、形が同じ三角形（合同な三角形）を作図できれば、どのような手順で作図をしてもかまいませんが、ここではその一例を紹介します。



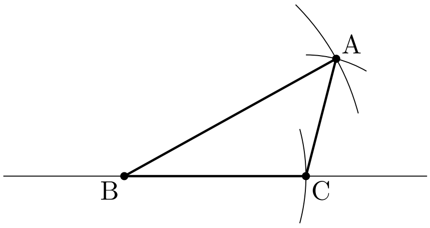
まずは、△ABC がどのような向きにするのかを決めておきます。△ABC をかくとき、右図のように、頂点 A が上にあり、辺 BC が下にある三角形をイメージすることが多いと思うので、その向きの三角形を作図してみます。

そこで、まずは基準となる底辺 BC を作図するために、適当な長さの直線を横に 1 本引きます。そして、そこに辺 BC を作図しますが、定規で長さを測ることができないので、問題に与えられている辺 BC の長さになるようにコンパスを広げ、そのコンパスの幅が変わらないようにしながら、先ほどかいた直線にその長さを写し取ります。

あとは、頂点 A を特定できれば △ABC を作図することができます。そこで、先ほどと同じようにして、問題に与えられている辺 AB と辺 CA の長さをコンパスで測りとり、頂点 B、頂点 C にコンパスの針をそれぞれ合わせて、辺 AB、辺 CA を半径とする円をかきます。そのとき、それぞれの円がどこで交わるのかがわかればよいので、円全部をかく必要はなく、交わりそうな部分のみかけば問題ありません。



これで、△ABC のすべての頂点 A, B, C を作図できたので、あとはそれぞれの頂点を結べば △ABC を作図することができます。

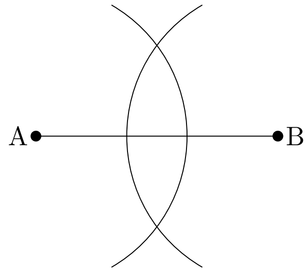


また、問題では 3 つの辺 AB, BC, CA の長さが与えられていることになるので、△ABC はただ 1 つに決まることもポイントです。

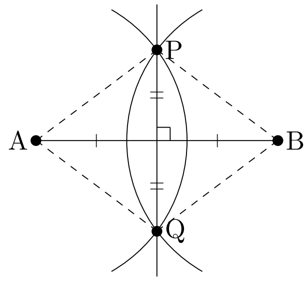
3.3 垂直二等分線

ある線分を垂直に 2 等分する直線を、**垂直二等分線**といいます。

ここでは、右の図のような線分 AB を垂直に 2 等分する直線（垂直二等分線）の作図を考えます。



線分 AB の垂直二等分線を作図するには、まず、線分の両端の点 A, B をそれぞれ中心とするような等しい半径の円をかきます（右図）。このとき、円の半径は 2 つの円が交わるような大きさである必要があります。また、2 つの円の交点がわかればよいので、円をすべてかく必要はありません。



次に、2 つの円の交点（ここではわかりやすいように P, Q とします）を通る直線を引くと、この直線（直線 PQ）が線分 AB の垂直二等分線になります。

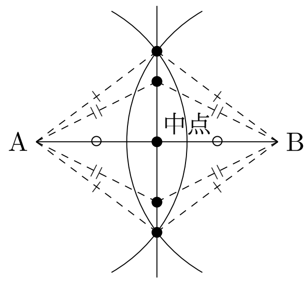
なぜ直線 PQ が線分 AB の垂直二等分線になるかというと、AP, BP, AQ, BQ はそれぞれ等しい半径の円の半径であるので、

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \mathrm{AQ} = \mathrm{BQ}$$

となり、四角形 AQBP はひし形になります。ひし形には、

- 対角線は直交する（垂直に交わる）
- 対角線はそれぞれの中点で交わる

という性質があるので、ひし形 AQBP の対角線である線分 AB と PQ は、PQ は AB を垂直に 2 等分する、つまり、AB の垂直二等分線になるからです。



このことから、垂直二等分線は次の手順により作図することができます。

① 線分の両端の点をそれぞれ中心とするような等しい半径の円をかく
② 2 つの円の交点を通る直線をひく

また、線分と垂直二等分線の交点は線分の中点になるので、同じ手順により中点も作図できることになります。

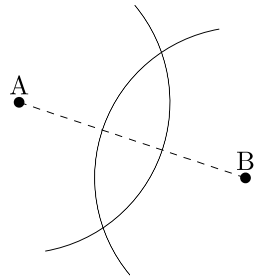
さらに、線分 AB の垂直二等分線上の点は、2 点 A, B から等しい距離にある点の集まりになります。このことはとても重要なので、しっかり覚えておきましょう。

【例題 3 − 3】

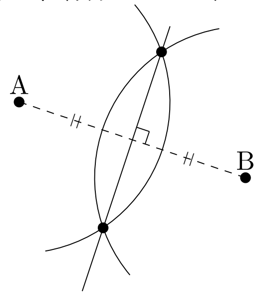
下の図のような 2 点 A, B があります。線分 AB の垂直二等分線を作図しなさい。

＜解説＞

まず、点 A, B をそれぞれ中心とするような等しい半径の円をかきます。

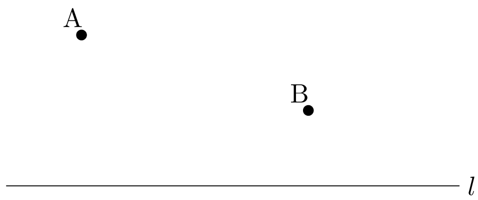


次に 2 つの円の交点を通る直線を引けば、線分 AB の垂直二等分線を作図することができます。



【演習 3 － 3】

下の図のような 2 点 A, B と直線 l があります。直線 l 上に点 P をとって、AP = BP となるようにしたいと思います。点 P を作図しなさい。

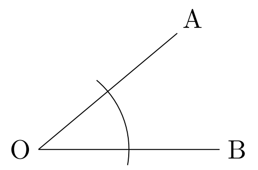


3.4　角の二等分線

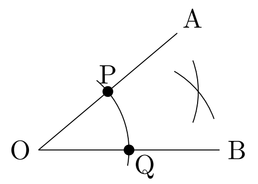
角を 2 等分する半直線を**角の二等分線**といいます。

ここでは、右の図のような ∠AOB の二等分線を作図します。

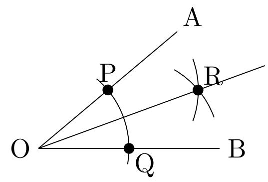
∠AOB の二等分線を作図するには、まず、点 O を中心とする円をかきます（右図）。このとき、辺 OA と辺 OB との交点がわかればよいので、円をすべてかく必要はありません。



次に、辺 OA と辺 OB との交点（ここではわかりやすいように P, Q とします）をそれぞれ中心とするような等しい半径の円をかきます（右図）。このとき、円の半径は、2 つの円が交わればどのような長さでもかまいませんが、OP と同じ長さにしておくと作図が楽です。また、2 つの円の交点がわかればよいので、円をすべてかく必要はありません。



最後に、点 O から 2 つの円の交点（ここではわかりやすいように R とします）を通る半直線を引くと、この半直線（半直線 OR）が ∠AOB の二等分線になります。



なぜ半直線 OR が角の二等分線になるかは、△POR と △QOR という 2 つの三角形が合同になるからです。（三角形の合同を学習してから、下の解説を読んでみてください。）

△POR と △QOR において、

$$\mathrm{PO} = \mathrm{QO}, \quad \mathrm{PR} = \mathrm{QR}, \quad \mathrm{OR} = \mathrm{OR}$$

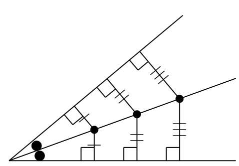
と 3 つの辺の長さが等しいため 2 つの三角形は合同になります。合同な図形では対応する角の大きさが等しくなるため、

$$\angle\mathrm{POR} = \angle\mathrm{QOR}$$

となり、半直線 OR は ∠AOB の二等分線であることがわかります。

このように、角の二等分線は次の手順により作図することができます。

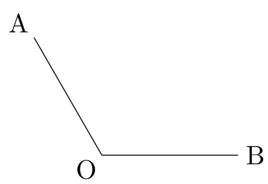
① 角の頂点を中心とする円をかく
② その円と角を作る 2 辺との交点を中心とするような等しい半径の円をかく
③ 角の頂点から、2 つの円の交点を通る半直線をひく



また、角の二等分線上の点は、右の図のように 2 辺から等しい距離にある点の集まりになります。

【例題 3 − 4】

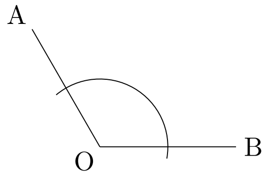
下の図において、∠AOB の二等分線を作図しなさい。



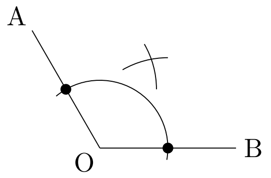
＜解説＞

手順では 90° よりも小さい角（鋭角）について説明をしましたが、この例題では、90° よりも大きい角（鈍角）について角の二等分線を作図します。しかし、鈍角であっても、角の二等分線の作図方法は鋭角のときと同じです。

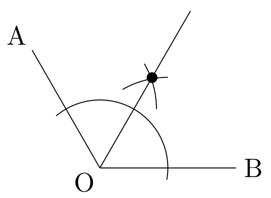
まずは、角の頂点である点 O を中心とする円をかきます。



次に、その円と辺 OA, OB との交点を中心とするような等しい半径の円をかきます。

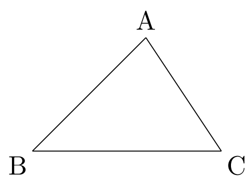


そして、角の頂点 O から 2 つの円の交点を通る半直線をひくことで、∠AOB の二等分線を作図することができます。



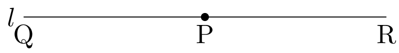
【演習 3 － 4】

右の図のような △ABC において、辺 AB, BC, CA から等しい距離にある点 P を作図しなさい。



3.5 直線上にある点を通る垂線

右の図のような直線 l 上にある点 P を通る l の垂線の作図を考えます。



ここで、図のように直線 l 上に点 Q, R をとると、∠QPR は一直線の作る角になるので、その大きさは、

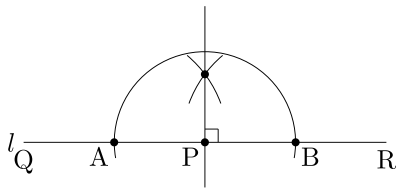
$$\angle \mathrm{QPR} = 180^\circ$$

になります。直線 l の垂線は、直線 l と垂直に交わる直線、つまり、直線 l とその垂線の作る角の大きさは 90° になるので、

$$180^\circ \div 2 = 90^\circ$$

になることから、点 P を通る直線 l の垂線は、∠QPR の二等分線を作図すればよいことになります。

そこでまず、点 P を中心とする円をかき、直線 l との交点を A, B とします。そして、2 点 A, B を中心とする等しい半径の円をかき、その 2 つの円の交点と点 P を結ぶことで、∠QPR の二等分線、つまり、点 P を通る直線 l の垂線を作図することができます。



以上のことから、次の手順により垂線を作図することができます。

① 基準となる点を中心とする円をかく
② 円と直線との交点を中心とする円をかく
③ 2 つの円の交点と基準となる点を結ぶ直線をひく

【例題 3 − 5】

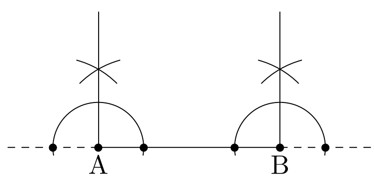
下の図のような線分 AB があります。線分 AB を 1 辺とする正方形（すべての辺の長さが等しく、すべての角の大きさの等しい四角形）を 1 つ作図しなさい。

A ———————— B

<解説>

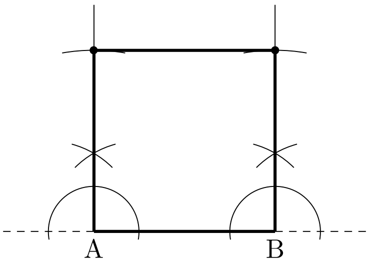
正方形を作図する手順は複数あるので、ここではその一例を紹介します。

まず、∠A, ∠B が 90°（直角）になるように、点 A, B において、線分 AB の垂線をひきます。そのために、線分 AB を延長して直線 AB にしておきます。



次に、点 A, B をそれぞれ中心とする円をかき、さらに、その円と直線 AB との交点を中心とする円をかきます。そして、その円の交点と点 A, B をそれぞれ結んだ直線を引けば、この直線が点 A, B における線分 AB の垂線になり､､∠A, ∠B は 90° になります。

正方形にするには、垂線の長さが線分 AB の長さと等しくならなければいけません。そこで、コンパスを線分 AB の長さに合わせて、点 A, B からその長さ分だけ垂線を切り取ります。定規を使って長さを測ってはいけないので注意してください。あとは、切り取られた垂線のところでつなげてあげれば、正方形の出来上がりです。



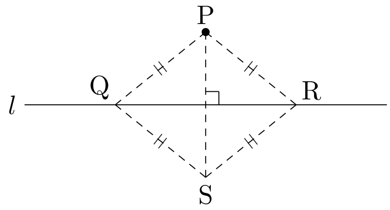
【演習 3 − 5】

大きさ 45° の角を作図しなさい。

3.6 直線上にない点を通る垂線

ひし形（4 つの辺の長さが等しい四角形）には、「対角線が直交する（垂直に交わる）」という性質があります。

そこで、直線 l 上にない点 P を通る垂線を作図するとき、右の図のように、点 P を頂点とし、直線 l 上にひし形の対角線 (QR) が重なるようなひし形を作ることができれば、直線 PS が点 P を通る直線 l の垂線になります。

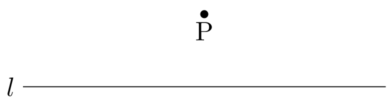


このことから、基準となる点が直線上にあるかないかにかかわらず、次の手順により垂線を作図することができます。

① 基準となる点を中心とする円をかく
② 円と直線との交点を中心とする円をかく
③ ２つの円の交点と基準となる点を結ぶ直線をひく

【例題 3 − 6】

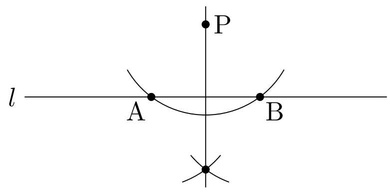
右の図のような直線 l と、直線 l 上にない点 P があります。このとき、点 P を通る直線 l の垂線を作図しなさい。



＜解説＞

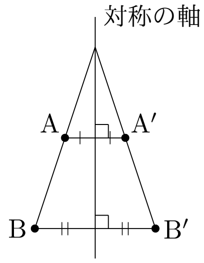
まず、直線 l と交わるように点 P を中心とする円をかきます。（このとき、直線 l と円との交点を A, B としておきます。）

次に、点 A, B から等しい半径の円を交点が 1 つもつようにかき、その交点と点 P を結ぶ直線をひくことで、点 P を通る l の垂線を作図することができます。



4　対称な図形

4.1　線対称

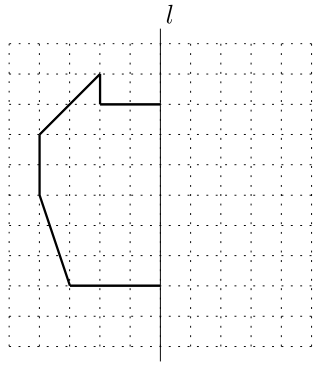


右の図のように、ある直線を折り目として折り返すとき、両側の部分がぴったり重なり合う図形は**線対称**であるといい、折り目にした直線を**対称の軸**（または、**対称軸**）といいます。また、対称の軸で折り返したとき、ぴったりと重なる点、辺、角をそれぞれ、**対応する点、対応する辺、対応する角**といいます。

線対称な図形には、対称の軸（対称軸）が必ず 1 本はあり、複数ある場合もあります。さらに、対称軸（対称の軸）は、対応する点を結ぶ線分の垂直二等分線になります。つまり、対応する 2 点を結ぶ線分は、対称軸と垂直に交わり、対応する 2 点は、その 2 点を結ぶ線分と対称軸との交点から等しい距離にあります。

【例題 4 − 1】

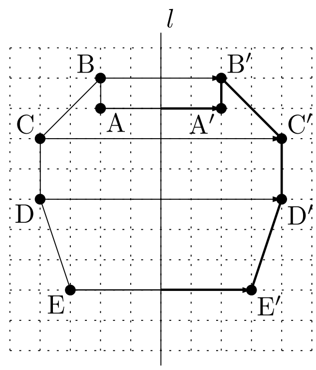
下の図において、直線 l が対称軸になるように線対称な図形をかきなさい。



<解説>

対称軸に鏡を置いて鏡をのぞいたときにときに出来上がる図形が、ちょうど線対称な図形になります。対称軸をはさんで左右対称で、ぴったり重なる図形です。

また、大きさのあるものをとらえるとき、全体をとらえるのではなく、特徴的な部分（「頂点」など）に着目すると考えやすくなります。



まずは、元になる対称軸の左側の図について、頂点などの特徴的な点を選び出します。ここでは説明のため、それぞれの頂点を点 A, B, C, D, E とします。

次に、対称軸が対応する点を結ぶ線分を垂直に 2 等分するように、点 A, B, C, D, E に対応する点 A′, B′, C′, D′, E′ をかきます。ちょうど、対称の軸をはさんで反対側になります。

最後に、点 A′, B′, C′, D′, E′ を順に結べば、線対称な図形をかくことができます。

【演習 4 − 1】

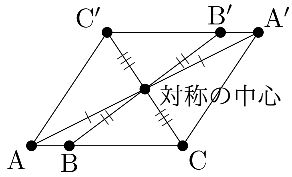
次のアルファベットの中から、線対称なものを選びなさい。

A　B　C　D　E　F　G　U　V　W　X　Y　Z

4.2 点対称

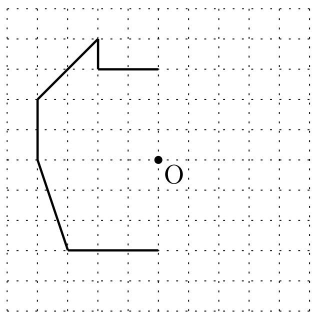
右の図のように、ある点を中心として 180° 回転（半回転）するとき、もとの図形にぴったり重なり合う図形は**点対称**であるといい、回転の中心とした点を**対称の中心**といいます。

点対称な図形では、対応する点を結ぶ線分は対称の中心を通り、対称の中心によって 2 等分されます。また、線対称な図形の場合、対称の軸が複数存在する場合がありましたが、点対称な図形の対称の中心は 1 つしか存在しません。



【例題 4 − 2】

下の図において、点 O が対称の中心になるように、点対称な図形をかきなさい。

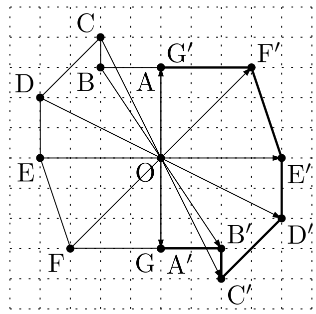


＜解説＞

まずは、元になる図について、頂点などの特徴的な点を選び出します。ここでは説明のため、それぞれの頂点を点 A, B, C, D, E, F, G とします。

次に、対称の中心が対応する点を結ぶ線分を 2 等分するように、点 A, B, C, D, E, F, G に対応する点 A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′ をかきます。ちょうど、対称の中心をはさんで反対側になります。

最後に、点 A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′ を順に結べば、点対称な図形をかくことができます。



【演習 4 − 2】

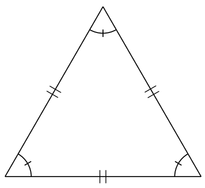
次のアルファベットの中から、点対称なものを選びなさい。

H　I　J　K　L　M　N　O　P　Q　R　S　T

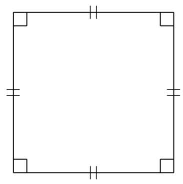
4.3 多角形

いくつかの線分で囲まれた図形のことを**多角形**といいます。そして、すべての辺の長さが等しく、すべての角の大きさが等しい多角形を**正多角形**といい、次のようなものがあります。

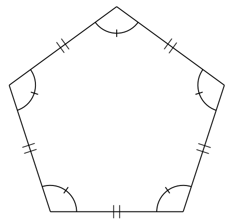
(i) 正三角形



(ii) 正四角形（正方形）



(iii) 正五角形



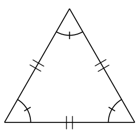
【例題 4 − 3】

正三角形、正方形、正五角形、正六角形について次の問いに答えなさい。
(1) 線対称であるものはどれか選びなさい。また、対称軸はそれぞれ何本あるか答えなさい。
(2) 点対称であるものはどれか選びなさい。

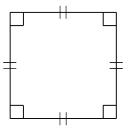
＜解説＞

各図形は次の図のようになります。

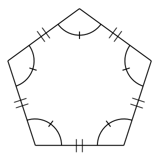
① 正三角形



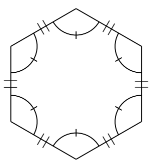
② 正方形



③ 正五角形

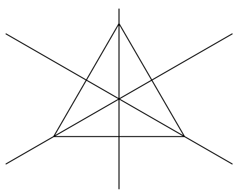


④ 正六角形



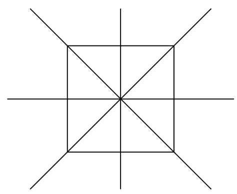
(1) 角（頂点、辺）の数が奇数である正多角形は、頂点を通る各辺の垂直二等分線が対称軸になります。また、角（頂点、辺）の数が偶数である正多角形は、向かい合う 2 つの頂点を結ぶ直線と、各辺の垂直二等分線が対称軸になります。そのため、すべての正多角形は線対称な図形になり、対称軸の本数は次の通りです。

① 正三角形



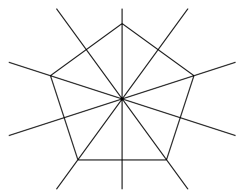
3 本

② 正方形



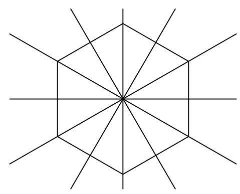
4 本

③ 正五角形



5 本

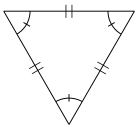
④ 正六角形



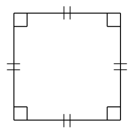
6 本

(2) 点対称な図形は、このテキストを上下さかさまにしても同じ形の図形を選べばよいので、

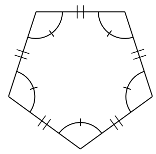
① 正三角形



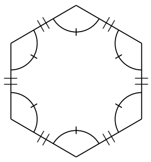
② 正方形



③ 正五角形



④ 正六角形



上の図から点対称な図形は、

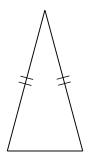
正方形、正六角形

となり、角（頂点、辺）の数が偶数である正多角形はすべて、点対称な図形になります。

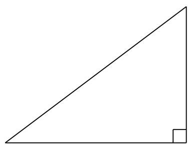
【演習 4 − 3】

①〜⑧の図形について、次の問いに答えなさい。

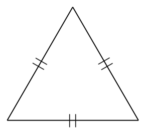
① 二等辺三角形



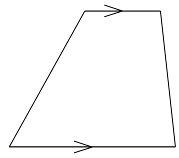
② 直角三角形



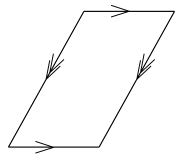
③ 正三角形



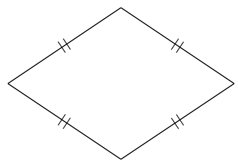
④ 台形



⑤ 平行四辺形

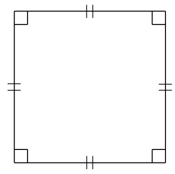


⑥ ひし形



⑦ 長方形

⑧ 正方形



(1) 線対称である図形を選びなさい。また、対称軸はそれぞれ何本あるか答えなさい。

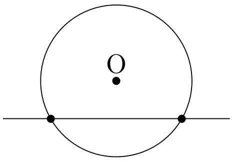
(2) 点対称である図形を選びなさい。

4.4　円と直線

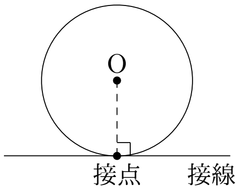
円は対称軸（直径）が無数にある線対称な図形です。また、円の中心を対称の中心とする、点対称な図形でもあります。

円と直線の位置関係を調べてみると、次のような 3 つの場合が考えられます。

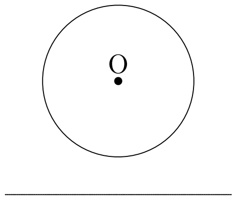
(i) 2 点で交わる



(ii) 1 点だけ共有する（接する）



(iii) 交わらない



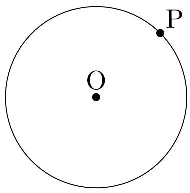
(ii) のように円と直線が 1 点だけを共有するとき、直線は円に**接する**といい、その点を**接点**、その直線を**接線**といいます。このとき、(ii) の図形は、円の中心 O と接点を結ぶ直線に対して線対称な図形になります。一直線の作る角の大きさは 180° になるので、対称軸によって同じ大きさに分けられると、

$$180^\circ \div 2 = 90^\circ$$

となり、円の接線は、接点を通る半径（接点と円の中心を通る直線）と垂直になります。

【例題 4 − 4】

次の図において、点 P における円 O の接線を作図しなさい。

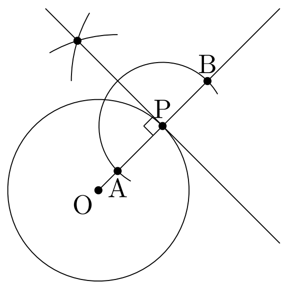


<解説>

接線は、円の中心（点 O）と接点（点 P）を結ぶ直線と垂直になるので、点 P における円 O の接線は、点 P における直線 OP の垂線を作図すればよいことになります。

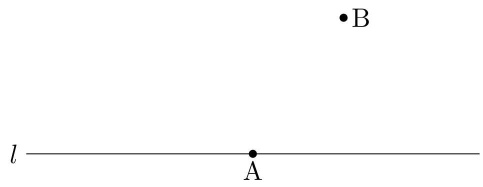
そこで、まず半直線 OP を引き、点 P を中心とする適当な大きさの半径の円をかきます。（説明のため、半直線 OP と円との交点を A, B とします。）

次に、2 点 A, B を中心とする等しい半径の円をかき、その交点と点 P を結ぶ直線を引けば、点 P における直線 OP の垂線、つまり、点 P における円 O の接線を作図することができます。



【演習 4 − 4】

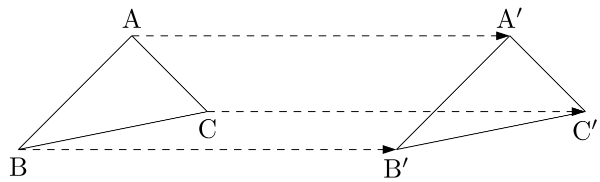
下の図において、点 A で直線 l に接し、点 B を通る円の中心 O を作図しなさい。



5 図形の移動

5.1 平行移動

次の図のように、$\triangle ABC$ を向きや大きさを変えることなくずらして、$\triangle A'B'C'$ になったとします。



このように、ある図形を、一定の方向に、一定の距離だけずらす移動を**平行移動**といいます。このとき、図形上のすべての点が、同じ方向に同じ距離だけ移動するので、対応する 2 点を結ぶ線分は、平行で長さは等しくなります。先の図では、

$$AA' \parallel BB' \parallel CC', \qquad AA' = BB' = CC'$$

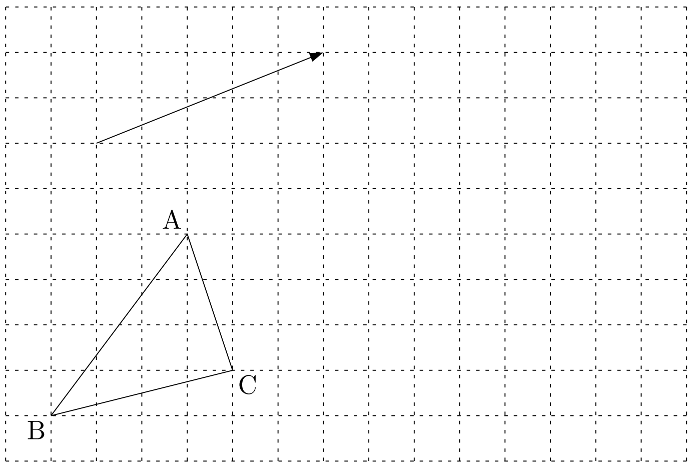
という関係が成り立っています。また、対応する線分は、平行で長さが等しいので、

- $AB = A'B'$, $AB \parallel A'B'$
- $BC = B'C'$, $BC \parallel B'C'$
- $CA = C'A'$, $CA \parallel C'A'$

という関係も成り立ちます。

【例題 5 − 1】

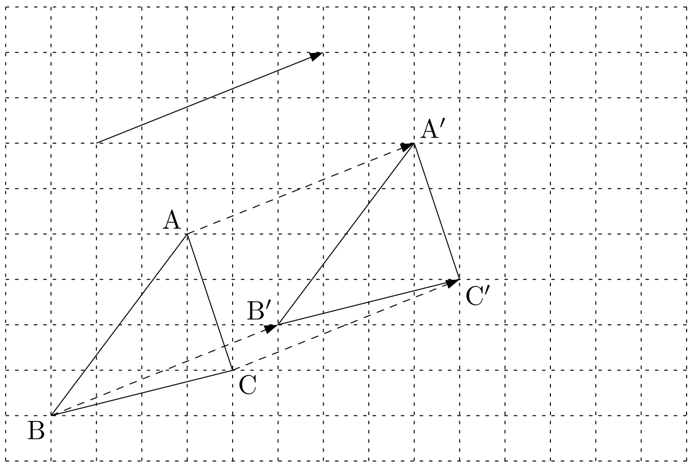
次の $\triangle ABC$ を矢印の方向に、その長さだけ平行移動した図形をかきなさい。



＜解説＞

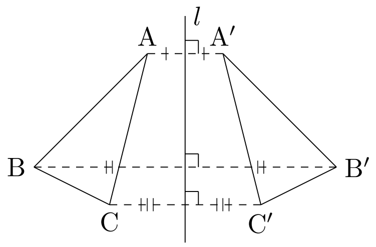
図形上のすべての点を、同じ方向に同じ距離だけ移動させれば平行移動させることができますが、すべての点を移動させるのは面倒です。そのため、大きさのあるものの移動を考えるときには、目印となるような特徴的な点を移動させることを考えます。

三角形で特徴のある点といえば、ずばり「頂点」です。そこで、三角形の頂点 A, B, C をそれぞれ矢印の方向にその長さだけ移動させます。（説明のため、その点を A′, B′, C′ とします。）そして、その 3 点を結べば △ABC を平行移動した △A′B′C′ をかくことができます。



5.2 対称移動

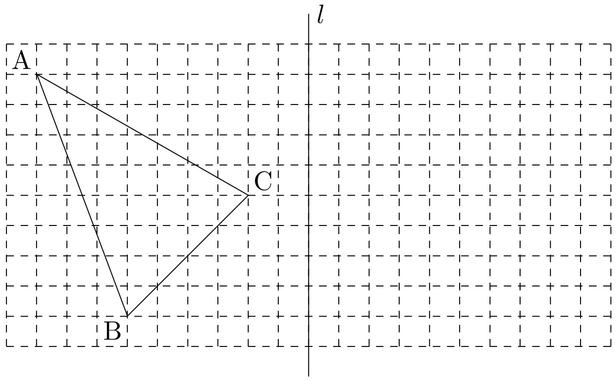
用紙を半分に折って広げ、その用紙の左側にインクをたっぷりとつけてある図をかいたあとで、また用紙を半分に折って広げれば、用紙の右側にも向きが反対になった同じ図形があらわれます。このように、ある図形を折り返して移すことを**対称移動**といい、折り目を**対称の軸**といいます。次の図では、直線 l を折り目として △ABC を対称移動させると、△A′B′C′ となり、直線 l が対称の軸となります。



このとき、△ABC と △A′B′C′ は直線 l を対称の軸として**対称である**、または、**線対称である**といい、線対称な図形と同じように、対称の軸 l は、対応する 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線になります。

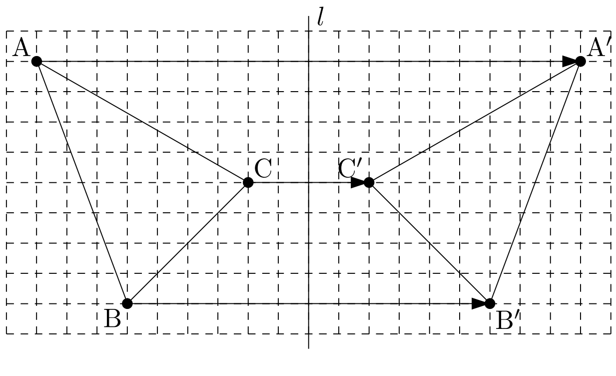
【例題 5 − 2】

次の図の △ABC と、直線 l を対称の軸として線対称である図形をかきなさい。



<解説>

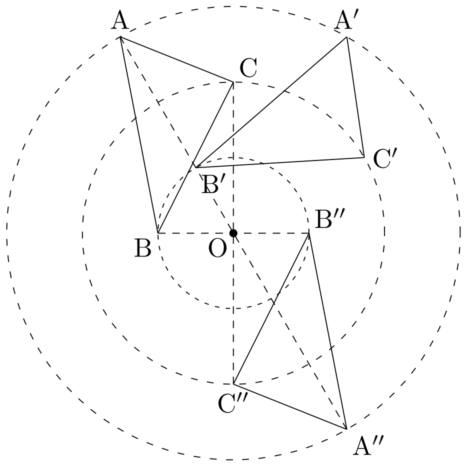
線対称な図形をかく手順と同じように、対称軸である直線 l が対応する点を結ぶ線分を垂直に 2 等分するように、点 A, B, C に対応する点 A′, B′, C′ をかき、それを結びます。



5.3 回転移動

用紙に何か図をかき、その用紙の 1 点を画びょうなどでとめて用紙を動かすと、図が移動します。このように、ある図形を、ある点を中心として一定の角度だけ回転する移動を**回転移動**といいます。

次の図のように、$\triangle$ABC を点 O を中心に回転移動させて、$\triangle$A$'$B$'$C$'$ になるとき、点 O を**回転の中心**といいます。



このとき、図形上のすべての点が回転の中心 O を中心とする同じ円周上を同じ角度だけ動きます。つまり、それぞれ対応する点は、回転の中心から等しい距離になり、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'},\quad \mathrm{OB} = \mathrm{OB'},\quad \mathrm{OC} = \mathrm{OC'}$$

という関係が成り立ち、また、対応する点を、回転の中心 O と結んでできる角（**回転角**）はすべて等しく、

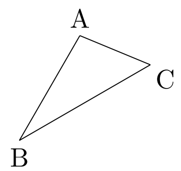
$$\angle \mathrm{AOA'} = \angle \mathrm{BOB'} = \angle \mathrm{COC'}$$

という関係も成り立ちます。

そして、$\triangle$ABC を点 O を中心に回転角が 180° になるような回転移動（$\triangle$A$''$B$''$C$''$）を特に、**点対称移動**といい、回転の中心 O を**対称の中心**といいます。このとき、$\triangle$ABC と $\triangle$A$''$B$''$C$''$ は点 O を中心として**対称である**、または、**点対称である**といいます。

【例題 5 − 3】

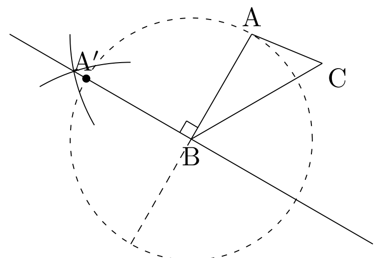
次の図のような $\triangle$ABC があります。点 B を中心として左回り（反時計回り）に 90° 回転移動した三角形を作図しなさい。



＜解説＞

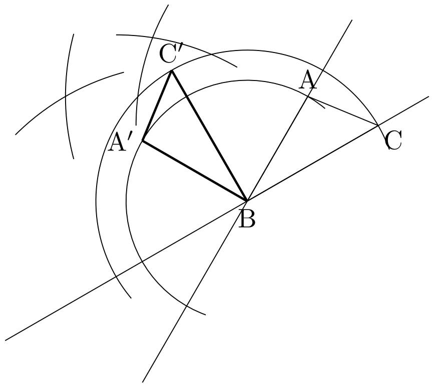
図形を回転移動するとき、その図形上のすべての点が、回転の中心を中心とする円周上を同じ角度だけ動きますが、「すべての点」を移動させるのは無理があるので、頂点などの特徴的な点を移動させます。このとき、対応する点は、「回転の中心からの距離」と「回転角」という 2 つの要素が決まれば特定することができます。どちらの要素から決めていってもいいのですが、ここでは「距離」、「回転角」という順で行います。

点 A を回転移動させたときに対応する点を A' とすると、対応する点は、回転の中心 B から等しい距離になるので、$BA = BA'$ となり、点 A' は点 B を中心とする半径 BA の円の円周上のどこかにあります。



次に、回転角が 90° になるので、$\angle A'BA = 90°$ となります。90° を作図するには垂線を作図すればよいので、AB を延長して、直線 AB 上の点 B を通る垂線を作図します。これで、「距離」と「角度」が決まったので、点 A に対応する点 A' は右の図のようになります。

そして、点 C に対応する点 C' も、同じようにして「距離」と「回転角」を決めれば、右の図のように特定されます。



このことから、点 A', B, C' を結ぶと △ABC を左回りに 90° 回転移動した三角形を作図することができます（作図に使用した線は残しています）。