【中１数学】比例と反比例

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　関数と座標

1.1　関数

数量を x や y などの文字で表すとき、いろいろな値をとることのできる文字を**変数**といいます。「いろいろな値」とは、「数が変化するもの」と考えることができるので、「変数」という言葉になっていると考えることができます。そして、この「変数」に対して、決まった数や値の決まった文字を**定数**といいます。「決まった数」には、次のような整数や小数、分数があり、誰が見ても数であることが明らかなものです。

$$1, \qquad -3, \qquad 1.3, \qquad -\frac{5}{2}$$

また、「決まった文字」には、「$2x+3$」のような x の 1 次式を、

$$2x+3 \longrightarrow ax+b$$

のように文字「a」と「b」を用いて表したとき、a と b は見た目は文字ですが、

$$a=2, \qquad b=3$$

のように「値の決まった文字」になるので、これらの値の定まった数や文字を「定数」ということができます。

また、ともなって変わる 2 つの変数（x と y）があって、他方（x）の値を決めると、それに対応してもう一方（y）の値がただ 1 つに決まるような数の関係を、（y は x の）**関数**であるといいます。

【例題 1 − 1】

次の文章のうち、正しいものを選びなさい。

① 身長は、体重の関数である。

② 1 本 50 円の鉛筆を買うとき、代金は、鉛筆の本数の関数である。

＜解説＞

① 「身長が体重の関数である」ときは、「体重を決めると、身長がただ 1 つに決まる」ことになります。しかし、実際には、体重を「60 kg」のように決めても、それに対応する身長は、

- 体重 60 kg で、身長 180 cm
- 体重 60 kg で、身長 170 cm

のようにただ 1 つに決まるとは限りません。つまり、「身長は、体重の関数ではない」 ということになります。

② 「代金が鉛筆の本数の関数である」ときは、「鉛筆の本数を決めると、代金はただ 1 つに決まる」ことになります。確かに、鉛筆の本数を 1 本、2 本、3 本、$\cdots$ と決めれば、その代金は次の表のように、鉛筆の本数に対してその代金はただ 1 つに決まります。

鉛筆の本数（本）	1	2	3	4	$\cdots$
代金（円）	50	100	150	200	$\cdots$

このことから、「代金は、鉛筆の本数の関数である」ということができます。

以上のことから、正しいものは②ということがわかります。

1.2　変域

「領域」や「地域」という言葉に「域」という字が使われている通り、「域」という字には「範囲」という意味があります。そのため、変数のとる値の範囲を、その変数の**変域**といいます。

変数は、「いろいろな値をとることのできる文字」ですが、「いろいろな値」と言ってもどんな値でもいいというわけではなく，制限がある場合があり、それが変域になります。

【例題 1 − 2】

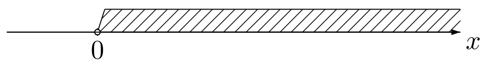
次のそれぞれの場合について、変数 x の変域を不等号を用いて表しなさい。

(1) x は正の数　　(2) x は 15 以下の数

(3) x は -10 よりも大きい負の数　　(4) x は 3 以上 8 未満の数

＜解説＞

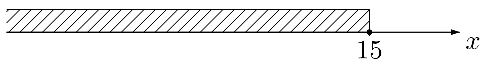
(1) 「x は正の数」は、「x は 0 よりも大きい数」という意味と同じです。これを不等号を用いて表すと、



$$x > 0$$

さらに、数直線上では図のように表すことができます。このとき、「0」は含まないので、その部分を白丸「○」にし、それよりも大きい範囲なので、その右側の範囲（図の斜線部分）になります。

(2) 「x は 15 以下の数」とは、「x は 15 を含み、それよりも下の数」ということになります。これを不等号を用いて表すと、



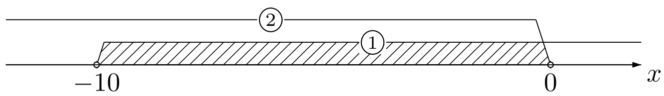
$$x = 15 \quad \text{または} \quad x < 15$$

のようになりますが、これを 1 つにまとめて、

$$x \leqq 15$$

と表します。さらに、数直線上では図のように表すことができます。このとき、「15」を含むのでその部分を黒丸「●」にし、それよりも小さい範囲なので、その左側の範囲（図の斜線部分）になります。

(3) 「x が -10 よりも大きい数」であることは、不等号を用いて、



$$x > -10 \ \cdots\cdots \ ①$$

のように表せます。また、「x が負の数」は、「x は 0 よりも小さい数」であるので、

$$x < 0 \ \cdots\cdots \ ②$$

と表せます。この①と②の範囲を数直線上に表してみると、図のようになります。

「x が -10 よりも大きい負の数」は、「x が -10 よりも大きい数」で、さらに「x が負の数」であることなので、①と②の範囲の重なったところ（図の斜線部分）になります。このことを不等号を用いて表すと、

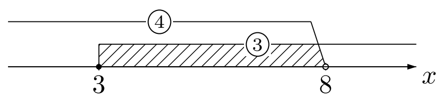
$$-10 < x < 0$$

また、

$$0 > x > -10$$

のように表しても間違いではありませんが、小さい順に書く（数直線上の数の大小関係と同じにする）のが普通です。

(4) 「x は 3 以上の数」とは、「x は 3 を含み、それよりも上の数」ということになります。これを不等号を用いて表せば、



$$x = 3 \quad \text{または} \quad x > 3$$

になるので、これを 1 つにまとめて、

$$x \geqq 3 \cdots\cdots ③$$

と表せます。また、「x が 8 未満の数」とは、「x は 8 よりも小さい」という意味になります。これを不等号を用いて表せば、

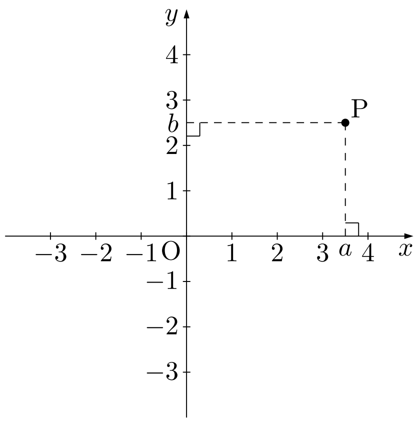
$$x < 8 \cdots\cdots ④$$

となるので、この③と④の範囲を数直線上に表してみると、図のようになります。
「x が 3 以上 8 未満の数」である場合、x は「3 以上の数」で、さらに「8 未満の数」であることから、③と④の範囲の重なったところ（図の斜線部分）になるので、不等号を用いて

$$3 \leqq x < 8$$

のように表すことができます。

1.3　平面上の点の座標

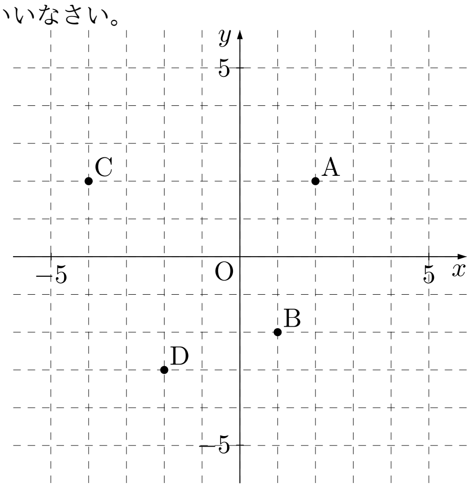


右の図のように、それぞれの原点で垂直に交わる、縦と横の 2 つの数直線を考えます。このとき、横の数直線は x **軸**、縦の数直線は y **軸**といい、その両方を合わせて**座標軸**といいます。この座標軸が x 軸と y 軸であることがわかるように、数直線の端に x, y を明記します。また、座標軸の交点を**原点**といい、「原点」の英語である「origin」の頭文字をとって**点 O** で表します。

図のように、原点 O から x 軸の正の方向に a、y 軸の正の方向に b だけ行ったところに点 P があるとします。この点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ と表し、a を点 P の x **座標**、b を点 P の y **座標**、$(a,\ b)$ を点 P の**座標**といいます。

【例題 1 − 3】

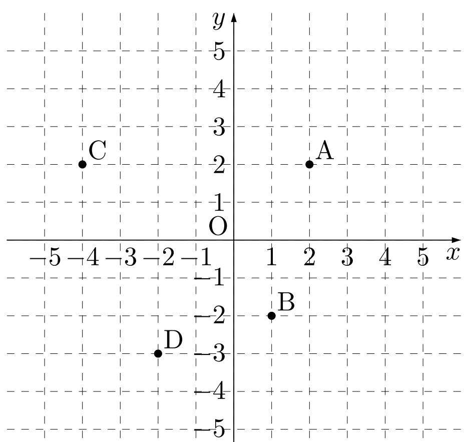
下の図で、点 A〜D の座標をいいなさい。



＜解説＞

わかりやすいように細かく目盛りをつけてみます。x 座標、y 座標の順に x 軸、y 軸の目盛りをそれぞれ読み取って、

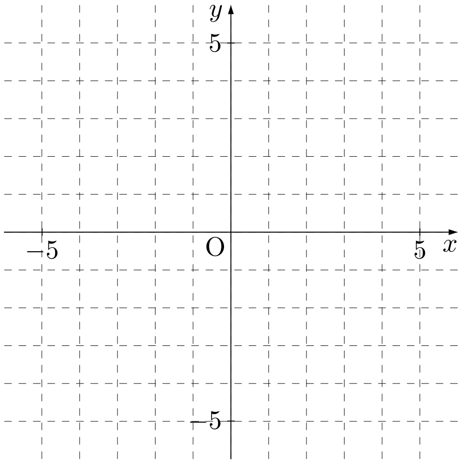
$$\mathrm{A}(2,\ 2),\quad \mathrm{B}(1,\ -2),\quad \mathrm{C}(-4,\ 2),\quad \mathrm{D}(-2,\ -3)$$



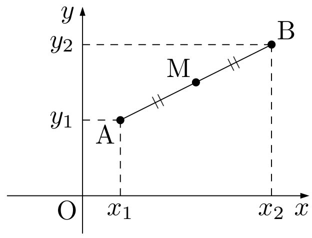
【演習１－３】

次の点 X～W を図にかき入れなさい。

(1) X(3, 4)　(2) Y(−2, 3)　(3) Z(−3, −1)　(4) W(4, −2)



1.4 中点の座標



線分を 2 等分する点を**中点**といいます。

右の図のように、2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2\ y_2)$ を結ぶ線分 AB の中点を M とすると、M の座標は、

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

と表され、2 点 A, B の x 座標、y 座標それぞれの平均（足して 2 で割る）を計算することで求めることができます。

【例題 1 − 4】

次の座標で表される 2 点を結ぶ線分の中点の座標を求めなさい。

(1) $(1,\ -2)$, $(5,\ -4)$　　(2) $(3,\ 2)$, $(-2,\ -2)$

＜解説＞

(1) x 座標、y 座標をそれぞれ足して 2 で割ると、

x 座標: $\dfrac{1+5}{2}=3$,　y 座標: $\dfrac{(-2)+(-4)}{2}=-3$

となるので、求める中点の座標は、

$(3,\ -3)$

(2) x 座標、y 座標をそれぞれ足して 2 で割ると、

x 座標: $\dfrac{3+(-2)}{2}=\dfrac{1}{2}$,　y 座標: $\dfrac{2+(-2)}{2}=0$

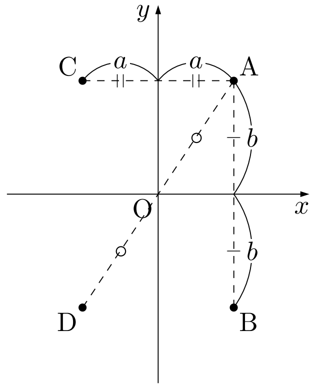
となるので、求める中点の座標は、

$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

【演習 1 − 4】

2 点 $(a,\ -6)$, $(-4,\ b)$ を結ぶ線分の中点の座標が $(5,\ -12)$ のとき、a, b の値をそれぞれ求めなさい。

1.5　対称な点の座標



右の図のような点 A(a, b) について、x 軸に関して対称な点（x 軸を基準に折り曲げるとちょうど点 A と重なる点）を B とします。このとき、点 A から x 軸までの距離と点 B から x 軸までの距離は等しくなるので、点 B の座標は、

B (a, $-b$)

と表すことができ、x 座標は変わらず、y 座標の符号が変わります。

また、点 A について y 軸に関して対称な点（y 軸を基準に折り曲げるとちょうど点 A と重なる点）を C とします。このとき、点 A から y 軸までの距離と点 C から y 軸までの距離は等しくなるので、点 C の座標は、

C ($-a$, b)

と表すことができ、y 座標は変わらず、x 座標の符号が変わります。

次に、点 A について原点に関して対称な点（点 O を基準に点 A の反対側にある点）を D とします。このとき、点 A から原点までの距離と点 D から原点までの距離は等しくなり、点 D は、点 B について y 軸に関して対称な点（点 C について x 軸に関して対称な点）になります。そのため、点 D の座標は、

D ($-a$, $-b$)

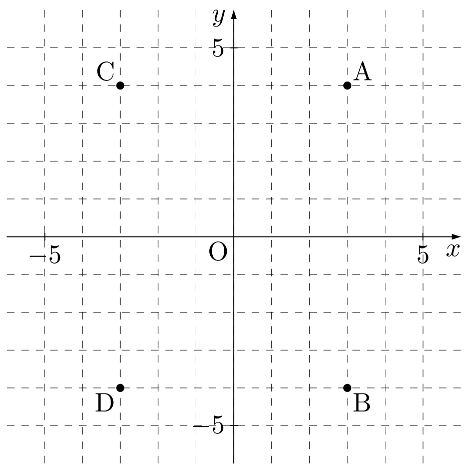
と表すことができ、点 B と x 座標の符号（点 C と y 座標の符号）を変えた座標で、点 A とは、x 座標、y 座標ともに符号を変えた座標になります。

【例題 1 − 5】

点 A(3, 4) について、次の点の座標を求めなさい。

(1) x 軸に関して対称な点 B　　(2) y 軸に関して対称な点 C　　(3) 原点に関して対称な点 D

＜解説＞



点 A, B, C, D を表す点を図にかき入れると、右図のようになります。

(1) 点 A について x 軸に関して対称な点 B の座標は、点 A と x 座標は変わらず、y 座標の符号が変わるので、

B (3, -4)

(2) 点 A について y 軸に関して対称な点 C の座標は、点 A と y 座標は変わらず、x 座標の符号が変わるので、

C (-3, 4)

(3) 点 A について原点に関して対称な点 D の座標は、点 A と x 座標、y 座標の符号が変わるので、

D (-3, -4)

【演習 1 − 5】

点 A(3, -1) について、次の点の座標を求めなさい。

(1) y 軸に関して対称な点 B　(2) x 軸に関して対称な点 C　(3) 原点に関して対称な点 D

2　比例とグラフ

2.1　比例と比例定数

ともなって変わる変数 x, y があって、その間の関係が、

$y = ax$　(a は 0 でない定数)

で表されるとき、y は x に**比例（正比例）する**といい、定数 a を**比例定数**といいます。一般的に、「□は○に比例する」という関係は、

□ ＝（定数）× ○

という形で表されます。

ここで具体的に、x と y の間の関係が $y = 2x$ のように表される場合で考えてみると、

(i) $x = 1$ のとき：$y = 2 \times 1 = 2$　　(ii) $x = 2$ のとき：$y = 2 \times 2 = 4$

のようにして、x の値を決めると y の値がただ 1 つに決まるので、y は x の関数になります。

さらに、

(i) $y = 2$ のとき：$x = 1$　　(ii) $y = 4$ のとき：$x = 2$

のようにして、y の値を決めても x の値がただ 1 つに決まるので、x は y の関数にもなります。

【例題 2 － 1】

y が x に比例し、$x = 3$ のとき、$y = -2$ になります。このとき以下の問いに答えなさい。

(1) x, y の関係を式に表しなさい。

(2) $x = -6$ のとき、y の値を求めなさい。

＜解説＞

(1) y が x に比例するので、x, y の関係を定数 a を用いて、$y = ax$ と表せます。問題文の条件から、「$x = 3$ のとき、$y = -2$」になるので、$x = 3, y = -2$ を代入すると、

$$-2 = 3a$$

となります。この式から a を求めると

$$3a = -2$$
$$a = -2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

となるので、このことから

比例定数：$-\dfrac{2}{3}$

となることがわかります。よって、$x,\ y$ の間には、

$$y = -\frac{2}{3}x$$

という関係があることになります。

また、比例定数 a を求めるには、「$y = ax$」の式から

$$
\begin{aligned}
ax &= y \\
a &= y \times \frac{1}{x} \quad \left(= \frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
$$

という関係式も作ることができるので、この式を公式として覚えてしまい、条件「$x = 3$ のとき、$y = -2$」を代入することでも求めることができます。

(2) x と y の間に「$y = ax$」のように表されるような関係がある場合、y は x の関数になるので、「x の値を決めれば y の値はただ 1 つに決まる」ことになります。そこで、(1) で求めた式に $x = -6$ を代入すれば、次のように y の値を求めることができます。

$$
y = -\frac{2}{\cancel{3}^{1}} \times (-\cancel{6}^{2}) = 4
$$

【演習２－１】

下の (1), (2) に適するものを、次の (ア)〜(カ) から選び記号で答えなさい。

(ア) $y = \frac{5}{2}x$	(イ) $x - y = -3.5$	(ウ) $x + y = 1$
(エ) $xy = -6$	(オ) $\frac{y}{x} = -7$	(カ) $y = \frac{3}{x}$

(1) y が x に比例するものを選びなさい。

(2) y が x に比例し、比例定数が負のものを選びなさい。

2.2 比例の例

x と y の間に、「$y=$ (定数) $\times x$」のように表される関係がある場合、「y は x に比例する」ことになります。

【例題 2 − 2】

次の (1)〜(3) について、y が x に比例するかどうかを調べなさい。また、比例するものについては、比例定数を求めなさい。
(1) x km の道のりを分速 80 m で歩いたときにかかる時間 y 分
(2) 1 本 50 円の鉛筆を x 本買って 500 円を出したときのおつり y 円
(3) 5 %の食塩水 x kg に含まれる食塩の重さ y g

＜解説＞

文章問題を考えるときには、まず、問題文に与えられている条件（数値）の単位をそろえることが大切です。

(1) 「x km」、「分速 80 m」、「y 分」という数量が与えられていて、時間に関する単位は「分」とそろっていますが、道のりに関する単位は「km」と「m」のように異なっているので、それをそろえる必要があります。どちらの単位にそろえてもいいのですが、大きな単位を小さな単位にそろえたほうが、小数や分数にならずにすみます。そこで、「km」を「m」にすることを考えますが、

$$1\ (\mathrm{km}) = 1000\ (\mathrm{m})$$

のように、「km」を「m」にするには、数を 1000 倍すればいいので、

$$x\ (\mathrm{km}) = 1000x\ (\mathrm{m})$$

これで単位をそろえることができたので、あとは「y を x の式」、つまり、「$y=$ (x の式)」という形で表します。y は時間なので、それを、道のり x を用いて式を作ります。時間の道のりには、

$$(\text{時間}) = (\text{道のり}) \div (\text{速さ})$$

という関係があるので、

$$\begin{aligned}(\text{時間}) &= (\text{道のり}) \div (\text{速さ})\\ y &= 1000x \div 80\\ &= \cancel{1000}^{25}x \times \frac{1}{\cancel{80}_{2}} = \frac{25}{2}x\end{aligned}$$

のようにして、y を x の式で表すことができ、この式は「$y=$ (定数) $\times x$」という形になっているので、「y は x に比例する」ということができ、比例定数は、

$$\text{比例定数}:\frac{25}{2}$$

(2) 50 円の鉛筆を x 本買ったときの代金は、

$$50 \times x = 50x\ (\text{円})$$

になるので、500 円出したときのおつりは、

$$y = 500 - 50x\ (\text{円})$$

と表すことができます。この式は「$y = (定数) \times x$」という形にはなっていないので、y は x に比例しません。

(3) 「x kg」、「y g」と重さの単位がそろっていないので、「kg」を「g」にします。

$$1\ (\mathrm{kg}) = 1000\ (\mathrm{g})$$

であることから、1000 倍すれば「kg」を「g」にすることができるので、

$$x\ (\mathrm{kg}) = 1000x\ (\mathrm{g})$$

また、「5 %の食塩水」は、「食塩水の重さに対して $\dfrac{5}{100}$ 倍が食塩の重さ」であることを表すので、

$$y = 1000x \times \frac{5}{100} = 50x$$

この式は「$y = (定数) \times x$」という形になっているので、「y は x に比例する」ということができ、比例定数は、

比例定数：50

2.3　比例の数表

数値を何らかの表で表したものを**数表**といいます。

x と y の関係が $y = 2x$ で表されるとき、x の値に対応する y の値を表にすると次のようになります。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	$\cdots$
$\dfrac{y}{x}$	$\cdots$	2	2	2	2		2	2	2	2	$\cdots$

このとき、y は x に比例し、x の値が 2 倍、3 倍、4 倍、$\cdots$ になると、それに対応する y の値も 2 倍、3 倍、4 倍、$\cdots$ になります。また、$x \fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{y}{x}$ の値は一定で、比例定数に等しくなります。

【例題 2 − 3】

下の表で、y が x に比例するとき、空白（ア）、（イ）にあてはまる数をいれなさい。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$	（イ）	$\cdots$
y	$\cdots$	（ア）	$\cdots$	6	$\cdots$	9	$\cdots$

＜解説＞

y が x に比例するので、x, y の間の関係は、定数 a を用いて $y = ax$ と表せます。

y が x に比例するとき、「y は x の関数」であり、「x は y の関数」でもあるので、x や y の値を決めれば、それに応じて y や x の値がただ 1 つに決まることになります。そのため、まずは、まだ明らかになっていない比例定数 a の値を求める必要があります。

比例定数 a の値を求める公式

$$\text{比例定数}：a = \frac{y}{x}$$

に $x = 4,\ y = 6$ を代入すると、

$$a = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}^{2}} = \frac{3}{2}$$

のようにして求めることができ、比例定数が $\dfrac{3}{2}$ であることがわかります。このことから x, y の間には、

$$y = \frac{3}{2}x \ \cdots\cdots\ ①$$

という関係があるので、この式を利用して（ア）、（イ）にあてはまる数を考えます。

（ア）①の式に $x = -2$ を代入して

$$y = \frac{3}{\cancel{2}_{1}} \times (-\cancel{2}^{1}) = -3$$

（イ）①の式に $y = 9$ を代入して

$$\frac{3}{2}x = 9$$

$$x = \cancel{9}^{3} \times \frac{2}{\cancel{3}_{1}} = 6$$

また、比例の性質を利用して、x の値が $4 \longrightarrow (-2)$ と $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 倍になると y の値も $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 倍になるので、

$$（ア）：6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

さらに、y の値が $(-3) \longrightarrow 9$ と (-3) 倍になると x の値も (-3) 倍になるので、

（イ）: $(-2) \times (-3) = 6$

と求めることもできます。

【演習 2 − 3】

次の表では、それぞれ y は x に比例しています。表の空白 (ア)〜(オ) をうめなさい。また、y を x の式で表しなさい。

(1)

x	（ア）	1	（イ）	4
y	0	-3	-9	（ウ）

(2)

x	-5	-4	（オ）	0
y	（エ）	6	3	0

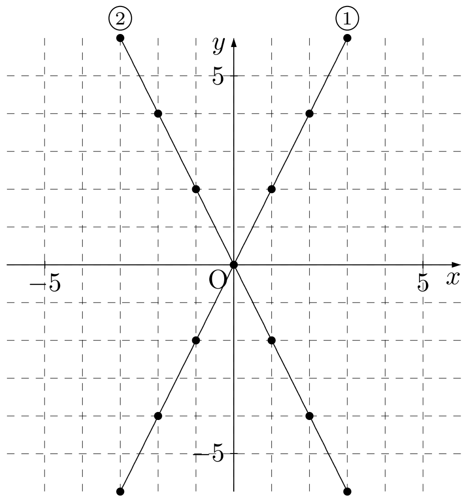
2.4 比例のグラフ

x, y の関係を表すグラフをかくとき、

(i) x と y の対応表を完成させる。
(ii) (i) の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

という手順によりかくことができます。

例として、$y = 2x$ と $y = -2x$ のグラフについて考えると次のようになります。



(i) x と y の対応表を完成させる。

① $y = 2x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

② $y = -2x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	-2	-4	-6

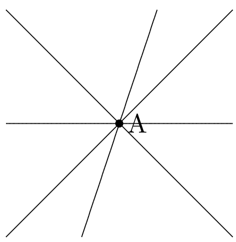
(ii) (i) の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

一般に、比例 $y = ax$ のグラフは、$x = 0$ のとき必ず $y = 0$ になるので、**原点を通る直線**になります。

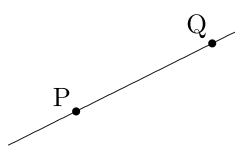
そして、表やグラフからもわかるように、「**x が 1 増えると、比例定数 a だけ y は増える**」ので、$a > 0$ の場合には、x が 1 増えるごとに増加していくので右上がりのグラフ、$a < 0$ の場合には、x が 1 増えるごとに減少していくことになるので右下がりのグラフになります。

また、次の図のように、ある 1 点を通る直線はいくつも存在しますが、ある 2 つの点を通る直線はただ 1 つに決まります。

(i) ある 1 点 A を通る直線



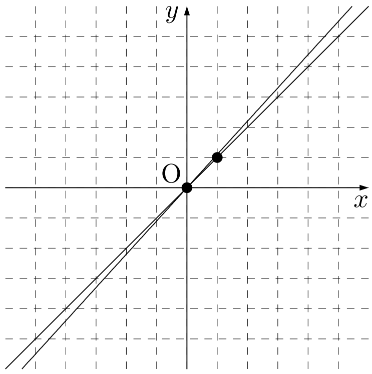
(ii) ある 2 点 P, Q を通る直線



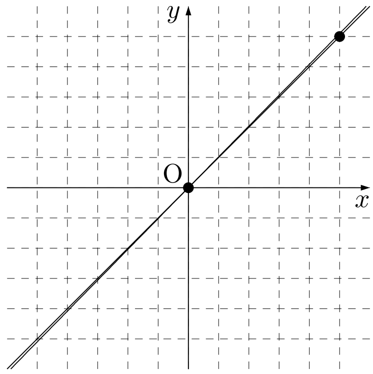
このことから、比例 $y = ax$ のグラフは「原点を通る直線」であるので、「原点」と「別のある 1 つの点」の 2 つがわかれば、その直線をかくことができます。このとき、原点以外のもう 1 つの点を選ぶときのポイントは、x 座標や y 座標が分数や小数だと点をかき入れにくいので、**x 座標と y 座標が整数になるような点**であることです。そしてさらに、**原点からなるべく離れている点**を選ぶことです。それは、次の図のように原点から近い点を選んだ場合、そこで少しずれてしまうと、そのずれが積み重なって、最終的には実際の直線と大きくずれてしまうことになりますが、原点から離れた点であれば、少しずれてしまっても、実際の直線とのずれも

小さくすむからです。

(ⅰ) 原点の近くで少しずれた場合



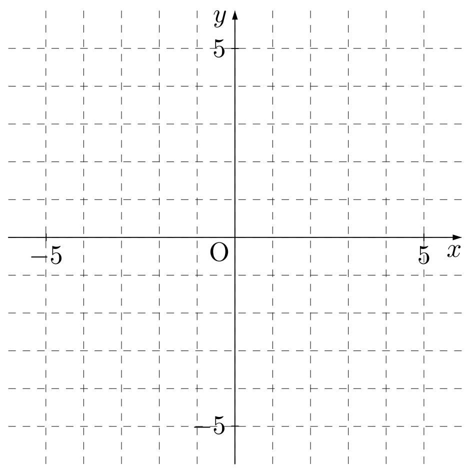
(ⅱ) 原点から遠くで少しずれた場合



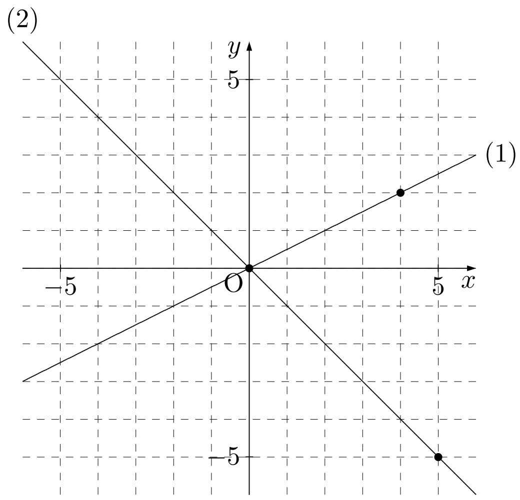
【例題 2 − 4】

次の x, y の関係を表すグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{1}{2}x$　　　(2) $y = -x$



＜解説＞



比例のグラフ（直線）をかくので、原点と、x 座標と y 座標が整数になるもう 1 つの点を結ぶ直線をひきます。

(1) 原点以外の x 座標と y 座標が整数になるような点には、

$$(-4,\ -2),\ (-2,\ -1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 2)$$

があり、これらの点から原点からなるべく離れている $(4,\ 2)$ や $(-4,\ -2)$ と原点とを結ぶ直線をひきます。

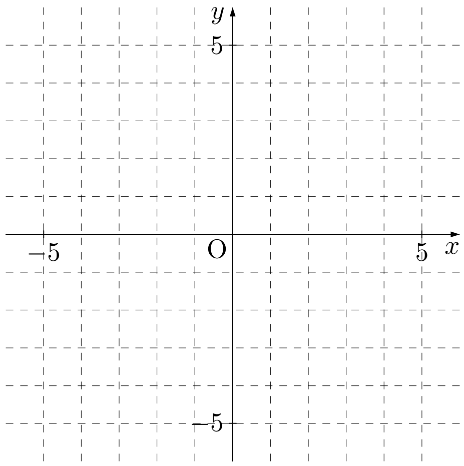
(2) 原点からなるべく離れている x 座標と y 座標が整数になる点には、$(5,\ -5)$ や $(-5,\ 5)$ があるので、これらの点と原点とを結ぶ直線をひきます。

【演習 2 − 4】

次の x, y の関係を表すグラフをかきなさい。

(1) $y = 3x$　　(2) $y = -4x$

(3) $y = \dfrac{5}{2}x$　　(4) $y = -\dfrac{2}{3}x$



2.5　比例のグラフから式を求める

比例のグラフは原点を通る直線になりますが、逆に、原点を通る直線がかかれているとき、そのグラフは比例のグラフになります。

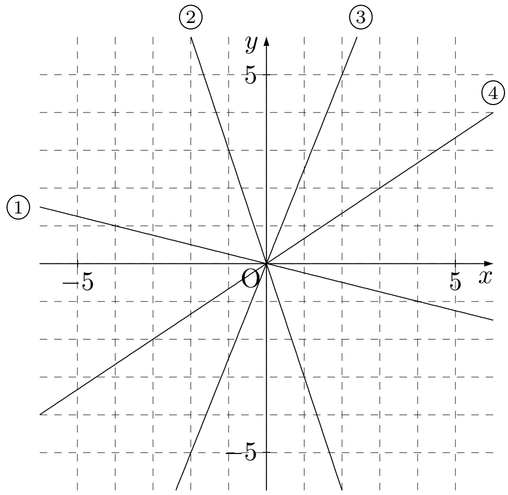
y が x に比例するとき、$y = ax$ のようにして x と y の間の関係を式で表すことができます。そして、この式からさらに、

$$a = \frac{y}{x}$$

のように変形することができるので、この式にグラフの読み取りやすい座標を代入することで、比例定数 a の値を求めることができます。

【例題 2 − 5】

右の①〜④グラフを表す式を、それぞれ求めなさい。



<解説>

①〜④のグラフは、すべて原点を通る直線になっているので、比例のグラフであると判断できます。そのため、グラフを表す式は $y = ax$ となるので、比例定数 a の値を求めることで、グラフを表す式が決定します。

① 比例定数は、読みとりやすい $(-4,\ 1)$、もしくは、$(4,\ -1)$ という座標から、

$$a = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}, \qquad a = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

となるので、グラフを表す式は、

$$y = -\frac{1}{4}x$$

② 読みとりやすい $(1,\ -3)$、もしくは、$(-1,\ 3)$ という座標から、

$$a = \frac{-3}{1} = -3, \qquad a = \frac{3}{-1} = -3$$

となるので、グラフを表す式は、

$$y = -3x$$

③ 読みとりやすい (2, 5)、もしくは、(−2, −5) という座標から、

$$a = \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \qquad a = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

となるので、グラフを表す式は、

$$y = \frac{5}{2}x$$

④ 読みとりやすい (3, 2)、もしくは、(−3, −2) という座標から、

$$a = \frac{2}{3}, \qquad a = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

となるので、グラフを表す式は、

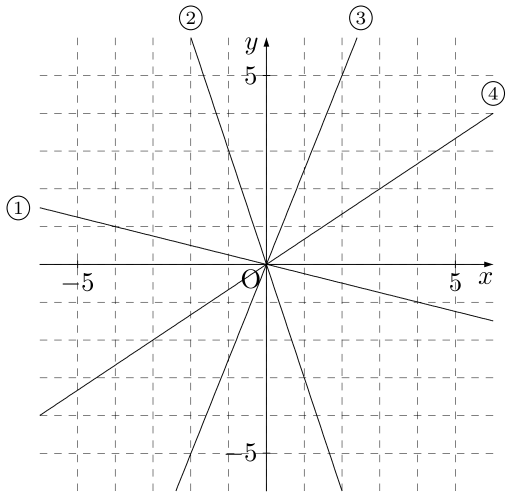
$$y = \frac{2}{3}x$$

【演習 2 − 5】

次の (1)〜(4) のグラフは、それぞれ、右の直線①〜④のどれになりますか。

(1) $y = \frac{2}{3}x$ (2) $y = -\frac{1}{4}x$

(3) $y = \frac{5}{2}x$ (4) $y = -3x$



2.6 比例のグラフと変域

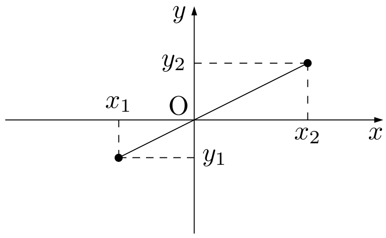
ある関数について、x の変域から y の変域を求めたり、その逆に、y の変域から x の変域を求めたりするような問題では、関数のグラフをかいたりイメージすることが大切です。このとき、関数のグラフはその変域の部分だけを表し、残りの部分はかかないか点線で表すようにします。

比例 $y = ax$ において、x の変域が $x_1 \leqq x \leqq x_2$ となっているとき、次のように、関数を表す式の横に x の変域をかっこの中に入れて表されることがあります。

$$y = ax \quad (x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

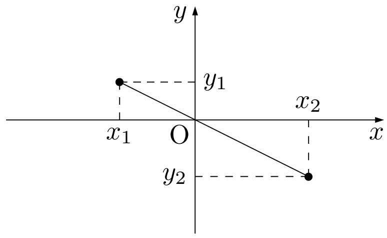
また、このときの y の変域は、比例のグラフが原点を通る直線（線分）になることから、次のようになります。

(i) $a > 0$ のとき（右上がりのグラフ）



y の変域：$y_1 \leqq y \leqq y_2$

(ii) $a < 0$ のとき（右下がりのグラフ）



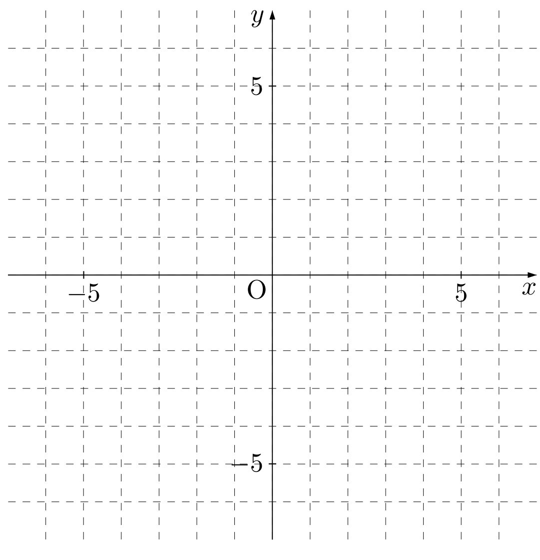
y の変域：$y_2 \leqq y \leqq y_1$

【例題 2 − 6】

次の関数のグラフをかきなさい。

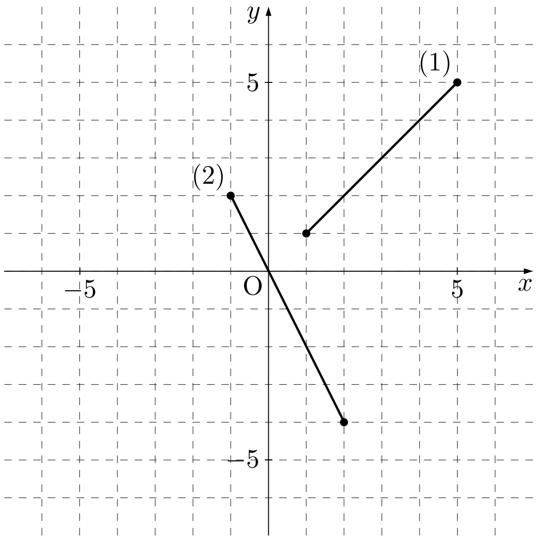
(1) $y = x \quad (1 \leqq x \leqq 5)$

(2) $y = -2x \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$



＜解説＞

比例 $y = ax$ のグラフは原点を通る直線になりますが、x の変域が与えられているとき、そのグラフは線分になり、線分（直線）は 2 点を結ぶことでかくことができます。そこで、x の変域がある比例のグラフをかくときには、x の変域の両端における x, y の値をそれぞれ求め、その 2 点を結びます。



(1) x の変域 $1 \leqq x \leqq 5$ の両端の x における y の値は、

① $x = 1$ のとき：$y = 1$

② $x = 5$ のとき：$y = 5$

となるので、その 2 点を結ぶ線分をかきます。

(2) x の変域 $-1 \leqq x \leqq 2$ の両端の x における y の値は、

① $x = -1$ のとき：$y = -2 \times (-1) = 2$

② $x = 2$ のとき：$y = -2 \times 2 = -4$

となるので、その 2 点を結ぶ線分をかきます。

【演習 2 − 6】

次の関数について、y の変域を求めなさい。

(1) $y = 2x \quad \left(\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}\right)$

(2) $y = -\dfrac{3}{4}x \quad (-2 \leqq x \leqq 4)$

3　反比例とグラフ

3.1　反比例

ともなって変わる変数 x, y があって、その間の関係が、

$$y = \frac{a}{x}\ （a は 0 でない定数）$$

で表されるとき、y は x に**反比例する**といい、定数 a を**比例定数**といいます。このとき、

$$y = \frac{a}{x} = a \times \frac{1}{x}$$

と表すことができ、この式から、「y は $\dfrac{1}{x}$ に比例する」と考えることができます。そのため、反比例の関係であっても、a を「反比例定数」ではなく「比例定数」というので注意してください。

x と y の関係が比例であるときもそうでしたが、反比例のときも、x の値を決めれば y の値がただ 1 つに決まるので、y は x の関数になり、さらに、y の値を決めても x の値はただ 1 つに決まるので、x は y の関数になります。

【例題 3 − 1】

y が x に反比例し、$x = 4$ のとき、$y = -3$ になります。このとき、以下の問いに答えなさい。
(1) 比例定数 a の値を求めなさい。
(2) $y = 6$ のときの x の値を求めなさい。

＜解説＞

y が x に反比例するとき、x と y の間の関係は比例定数 a を用いて、

$$y = \frac{a}{x}$$

と表せます。また、この式から、

$$a = xy$$

と変形できるので、y が x に反比例するとき、その比例定数は x と y の積で求めることができます。

(1) y が x に比例することから、その比例定数は x と y の積で求まります。「$x = 4$ のとき、$y = -3$」になるので、

$$a = 4 \times (-3) = -12$$

(2) （1）より、x と y の間の関係は、

$$y = -\frac{12}{x}$$

と表せます。このとき、x は y の関数（y の値を決めると x の値がただ 1 つに決まる）になるので、 この

式に $y=6$ と y の値を決めれば x の値がただ1つに決まります。そこで、$y=6$ を代入して、

$$\begin{aligned}6 &= -\frac{12}{x}\\ 6x &= -12\\ x &= -\cancel{12}^{2} \times \frac{1}{\cancel{6}^{1}} = -2\end{aligned}$$

【演習3－1】

次の問いに答えなさい。

(1) y は x に反比例し、$x=4$ のとき、$y=-5$ になります。比例定数 a の値を求めなさい。

(2) y が x に反比例し、$x=3$ のとき、$y=4$ になります。y を x の式で表しなさい。

3.2　反比例の例

y を x の式で表したとき、

$$y = (\text{定数}) \times \frac{1}{x} \quad \left(= \frac{\text{定数}}{x} \right)$$

という形になると、「y は $\dfrac{1}{x}$ に比例する」、つまり、「y は x に反比例する」ことになります。

【例題 3 − 2】

和子さんは、家族と親せきの家へ車で行きました。行きは時速 40 km で走って 2 時間かかり、帰りは同じ道を時速 x km で y 時間かかりました。y を x の式で表しなさい。

<解説>

文章問題では、次のようなことに気を付けて問題に取り組む必要があります。

- 単位がそろっているかを確認すること
- 問題文の内容を把握するために図などを使って整理すること

問題文に与えられている単位は、

時速 40 km,　　2 時間,　　時速 x km,　　y 時間

のように、時間に関する単位は「時間」、道のりに関する単位は「km」とそろっているので問題ありません。

次に、問題文の内容を把握するために、図などを使って整理することを行います。問題文に書かれている数値は、すべて図の中にかき入れておきましょう。

そして、この問題では y を x の式で表すので、「$y =$（x の式）」のように、「y（時間）」を「x（速さ）」を使った式で表します。時間と速さに関する式には、

$$(\text{時間}) = (\text{道のり}) \div (\text{速さ})$$

があるので、この式にあてはめれば、

$$y = (\text{道のり}) \div x$$

のように表すことができますが、「道のり」が問題文に直接与えられていません。しかし、「行きは時速 40 km で走って 2 時間かかり」ということから、

$$\begin{aligned} (\text{道のり}) &= (\text{速さ}) \times (\text{時間}) \\ &= 40 \times 2 = 80 \ (\text{km}) \end{aligned}$$

帰りも「同じ道」を通るので、もちろん「80 km」であるので、

$$\begin{aligned} y &= (\text{道のり}) \div x \\ &= 80 \div x = \frac{80}{x} \end{aligned}$$

のようにして、y を x の式で表すことができます。このとき、$y = \dfrac{\text{定数}}{80}$ という形の式になっているので、y は x に反比例することがわかります。

3.3 反比例の数表

x と y の関係が $y=\dfrac{8}{x}$ で表されるとき、x の値に対応する y の値を表にすると次のようになります。

x	$\cdots$	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8	$\cdots$
y	$\cdots$	-1	-2	-4	-8	$\times$	8	4	2	1	$\cdots$
xy	$\cdots$	8	8	8	8	$\times$	8	8	8	8	$\cdots$

このとき、y は x に反比例し、x の値が 2 倍、3 倍、4 倍、$\cdots$ になると、それに対応する y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍、$\cdots$ になります。ただし、$x=0$ のとき、

$$y=\frac{8}{0}$$

は計算することができません。また、$x \fallingdotseq 0$ のとき xy の値は一定で、比例定数に等しくなります。

【例題 3 − 3】

下の表で、y が x に反比例するとき、空白（ア）、（イ）にあてはまる数をいれなさい。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	（イ）	$\cdots$
y	$\cdots$	-10	$\cdots$	$\times$	$\cdots$	（ア）	$\cdots$	5	$\cdots$

＜解説＞

y が x に反比例するので、x, y の間の関係を定数 a を用いて、$y=\dfrac{a}{x}$ と表せます。また、この式は、

$$y=\frac{a}{x} \longrightarrow xy=a \longrightarrow x=\frac{a}{y}$$

のように変形することができるので、この式のいずれかを必要に応じて使い分けるができます。

まずは、比例定数 a の値が具体的にどのような値になるのかを求めます。表から、$x=-2$ のとき、$y=-10$ であることがわかるので、$x=-2, y=-10$ を $a=xy$ に代入すると、

$$a=(-2)\times(-10)=20$$

となり、比例定数が 20 であることがわかります。つまり、x, y の間には、

$$y=\frac{20}{x}$$

という関係があるので、この式、もしくは、この式を変形した

$$y=\frac{20}{x} \longrightarrow xy=20 \longrightarrow x=\frac{20}{y}$$

を利用して（ア）、（イ）にあてはまる数を考えます。

(ア) y は x の関数であるので、x の値を決めると、y の値はただ 1 つに決まります。よって、$x=2$ のときの y の値を求めたいので、$y=\dfrac{20}{x}$ に $x=2$ を代入して、

$$y=\frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}^{1}}=10$$

(イ) x は y の関数でもあるので、y の値を決めると、x の値はただ 1 つに決まります。よって、$y=5$ のときの x の値を求めたいので、$x=\dfrac{20}{y}$ に $y=5$ を代入して、

$$x=\frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{5}^{\,1}}=4$$

【演習 3 − 3】

下の表は、y が x に反比例していることを示しています。表を完成させなさい。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$		$\dfrac{9}{2}$					$\cdots$

3.4 反比例のグラフ

x, y の関係を表すグラフをかくとき、

(i) x と y の対応表を完成させる。
(ii) (i) の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

という手順によりかくことができます。
例として、$y = \dfrac{4}{x}$ と $y = -\dfrac{4}{x}$ のグラフについて考えると次のようになります。

(i) x と y の対応表を完成させる。

① $y = \dfrac{4}{x}$

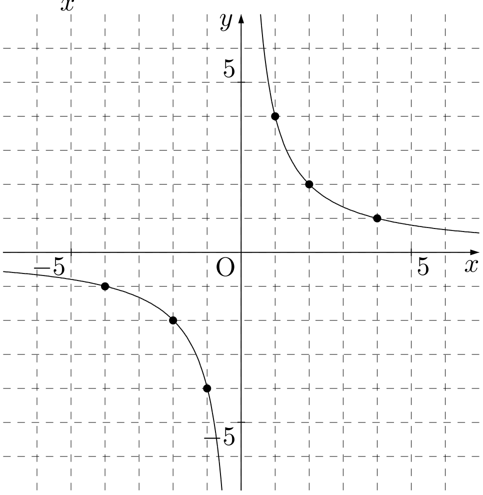
x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-1	-2	-4	╳	4	2	1

② $y = -\dfrac{4}{x}$

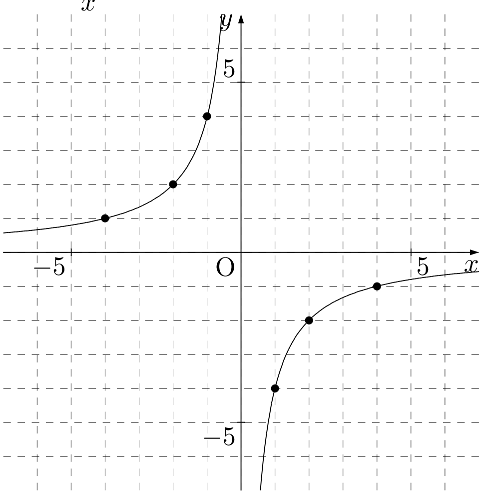
x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	1	2	4	╳	-4	-2	-1

(ii) (i) の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶ。

① $y = \dfrac{4}{x}$



② $y = -\dfrac{4}{x}$

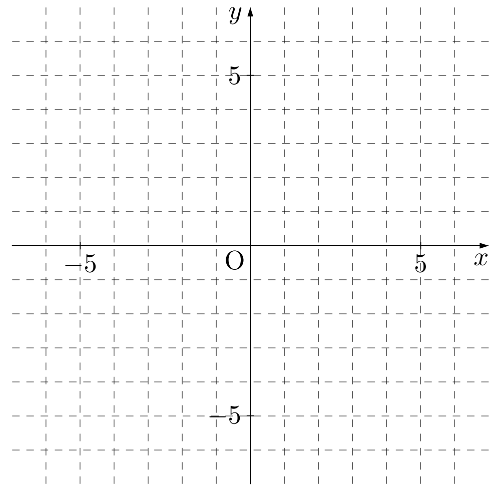


このことから、反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは、なめらかな 2 つの曲線になります。この 2 つの曲線は必ず対になって存在するので、**双曲線**といいます。この反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフ、つまり、双曲線は、x 軸や y 軸にものすごく近づきますが、絶対に交わりません。双曲線をかくときには、x 軸や y 軸と交わらないように注意をしましょう。また、$a > 0$ のときは、この双曲線が原点を基準に右上と左下、$a < 0$ のときは、原点を基準に左上と右下にあります。

【例題 3 − 4】

次の x, y の関係を表すグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{6}{x}$　　(2) $y = -\dfrac{6}{x}$



＜解説＞

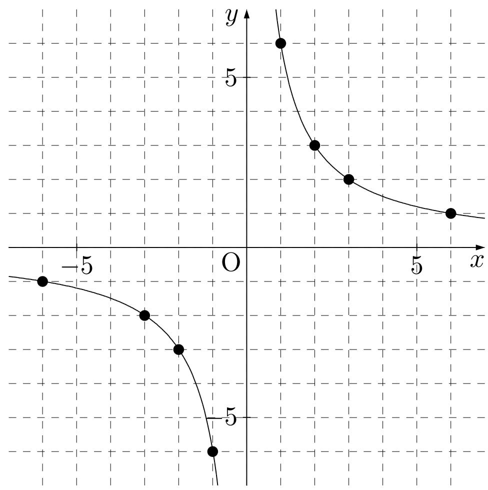
反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは曲線（双曲線）になります。直線は 2 点を結ぶことにより簡単にかくことができますが、曲線の場合はそのようにうまくかくことができないので、なるべく多くの点をとってなめらかに結びます。このとき、x と y がそれぞれ整数となるような点 $(x,\ y)$ を選ぶようにしますが、反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは、原点をはさんで対になって存在するので、点 $(p,\ q)$ があれば、原点をはさんで対になる点 $(-p,\ -q)$ も存在することになります。そのようにして点を見つけることで、双曲線の一方の曲線を作ることができれば、もう 1 つの曲線も完成することになります。

(1)

(i) $y = \dfrac{6}{x}$ に $x = -6, -3, \cdots$ を代入すると、x と y の対応表は次のようになります。

x	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6		6	3	2	1

(ii) （i）の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶと、右図のようなグラフをかくことができます。

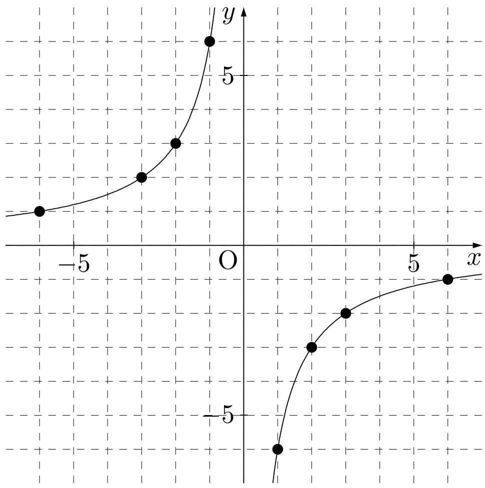


(2)

(i) $y = -\dfrac{6}{x}$ に $x = -6,\ -3,\ \cdots$ を代入すると、x と y の対応表は次のようになります。

x	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y	1	2	3	6		-6	-3	-2	-1

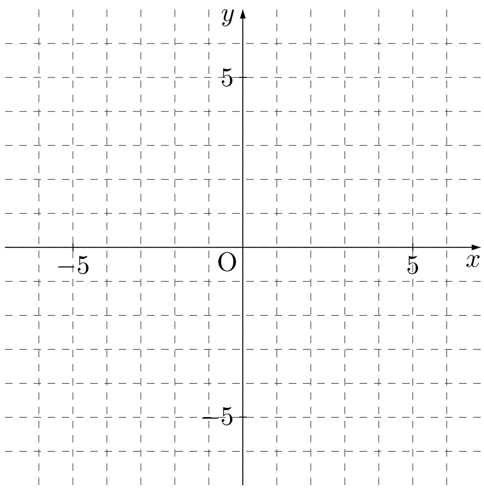
(ii) （i）の表から、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を図にかき入れ、その点をなめらかに結ぶと、右図のようなグラフをかくことができます。



【演習 3 − 4】

次の x, y の関係を表すグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{12}{x}$　　(2) $y = -\dfrac{8}{x}$



3.5　反比例のグラフから式を求める

反比例のグラフは双曲線になりますが、逆に、双曲線がかかれているとき、そのグラフは反比例のグラフになります。

y が x に反比例するとき、$y=\dfrac{a}{x}$ のようにして x と y の間の関係を式で表すことができます。そして、この式からさらに、

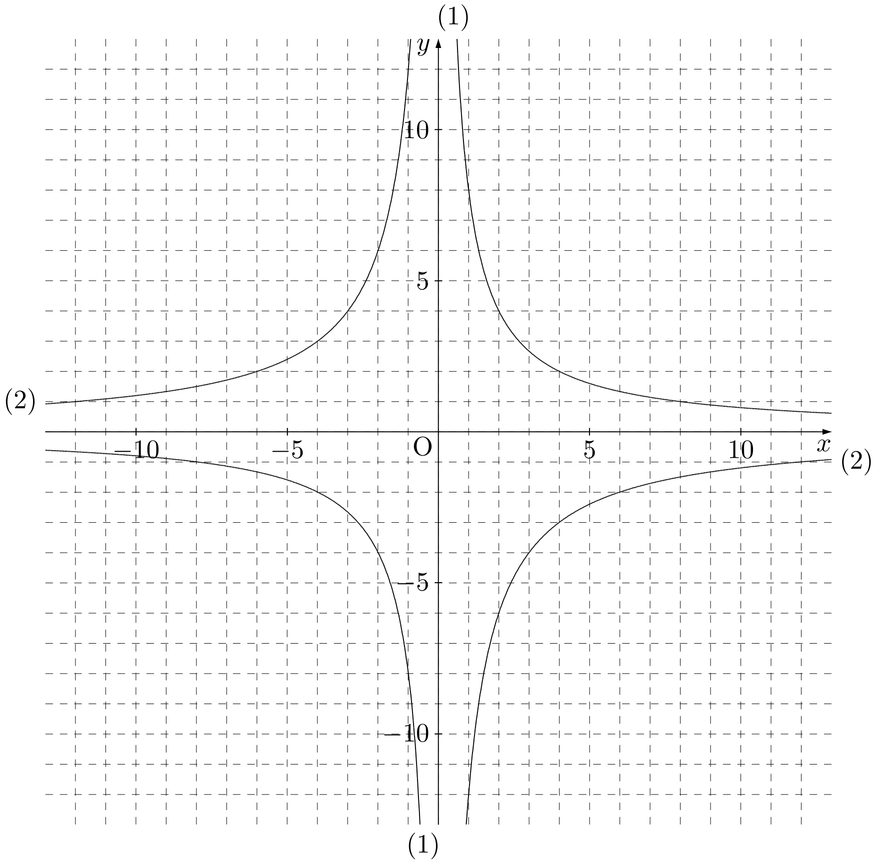
$$a = xy$$

のように変形することができるので、この式にグラフの読み取りやすい座標を代入することで、比例定数 a の値を求めることができます。

【例題 3 − 5】

グラフが下の図の (1), (2) になるものを、それぞれ、次の 4 つの中から選びなさい。

① $y=\dfrac{4}{x}$　② $y=\dfrac{8}{x}$　③ $y=-\dfrac{12}{x}$　④ $y=-\dfrac{8}{x}$



＜解説＞

（1）のグラフは右上と左下に、（2）のグラフは左上と右下に対になって 2 つずつ曲線が存在しているので双曲線です。つまり、反比例のグラフになります。

(1) グラフから目盛りよ読み取りやすそうな点（座標）を探すと、

$(1,\ 8),\quad (2,\ 4),\quad (4,\ 2),\quad (8,\ 1),\quad (-1,\ -8),\quad (-2,\ -4),\quad (-4,\ -2),\quad (-8,\ -1)$

のような点が見つかります。このいずれかの点において、x と y の積を求めると

x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1
$a\ (=xy)$	8	8	8	8	8	8	8	8

比例定数 $a = 8$

となることがわかります。（反比例のグラフが右上と左下にあることから、比例定数 a の値が $a > 0$ となることも確認しておきましょう。）

このことから、（1）のグラフは

② $y = \dfrac{8}{x}$

(2) グラフから目盛りよ読み取りやすそうな点（座標）を探すと、

$(2,\ -6),\quad (3,\ -4),\quad (4,\ -3),\quad (6,\ -2),\quad (-2,\ 6),\quad (-3,\ 4),\quad (-4,\ 3),\quad (-6,\ 2)$

のような点が見つかります。このいずれかの点において、x と y の積を求めると

x	-6	-4	-3	-2	2	3	4	6
y	2	3	4	6	-6	-4	-3	-2
$a\ (=xy)$	-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12	-12

比例定数 $a = -12$

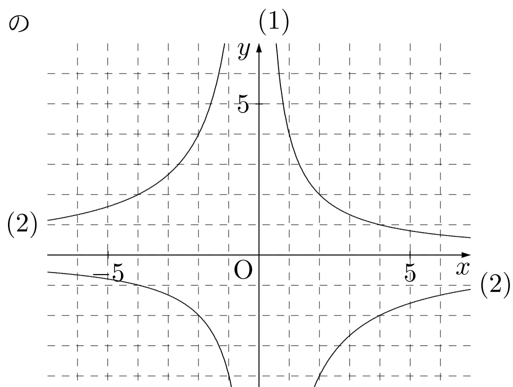
となることがわかります。（反比例のグラフが左上と右下にあることから、比例定数 a の値が $a < 0$ となることも確認しておきましょう。）

このことから、（2）のグラフは

③ $y = -\dfrac{12}{x}$

【演習 3 − 5】

グラフが右の図 (1), (2) のような双曲線になるとき、y を x の式で表しなさい。



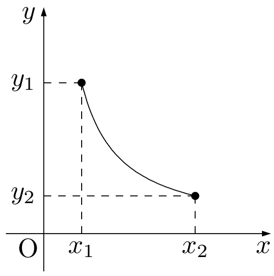
3.6　反比例のグラフと変域

反比例 $y=\dfrac{a}{x}$ において、x の変域が $x_1 \leqq x \leqq x_2$ となっているとき、次のように、関数を表す式の横に x の変域をかっこの中に入れて表されることがあります。

$$y=\frac{a}{x} \quad (x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

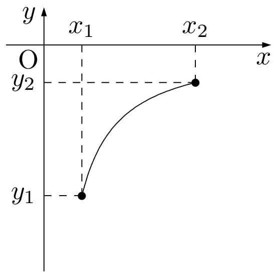
また、このときの y の変域は次のようになります。

(i) $a>0$ のとき（右下がりのグラフ）



y の変域：$y_2 \leqq y \leqq y_1$

(ii) $a<0$ のとき（右上がりのグラフ）



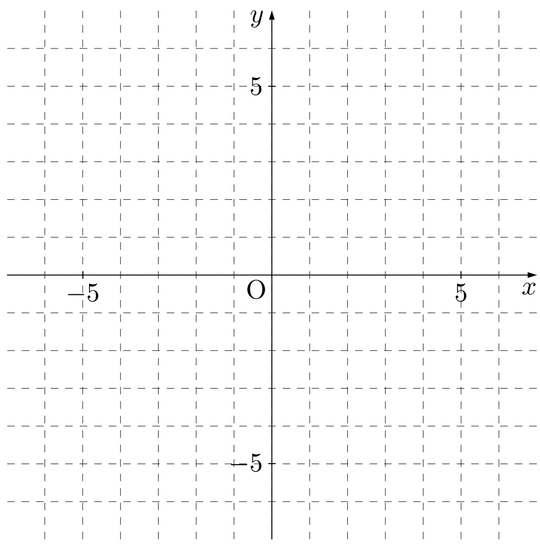
y の変域：$y_1 \leqq y \leqq y_2$

【例題 3 − 6】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\dfrac{8}{x} \quad (2 \leqq x \leqq 4)$

(2) $y=-\dfrac{6}{x} \quad (-3 \leqq x \leqq -1)$



<解説>

反比例 $y=\dfrac{a}{x}$ のグラフは双曲線になりますが、x の変域が与えられているとき、そのグラフは曲線の一部になります。そこで、x の変域がある反比例のグラフをかくときには、x の変域が与えられていないときと同じ手順でグラフを点線にしてかき、x の変域における部分の曲線を実線でかくようにします。また、x の変域の両端における $x,\,y$ の値は重要なので、それぞれ求めておきます。

(1) x の変域 $2 \leqq x \leqq 4$ の両端の x における y の値は、

① $x=2$ のとき：$y=\dfrac{8}{2}=4$

② $x=4$ のとき：$y=\dfrac{8}{4}=2$

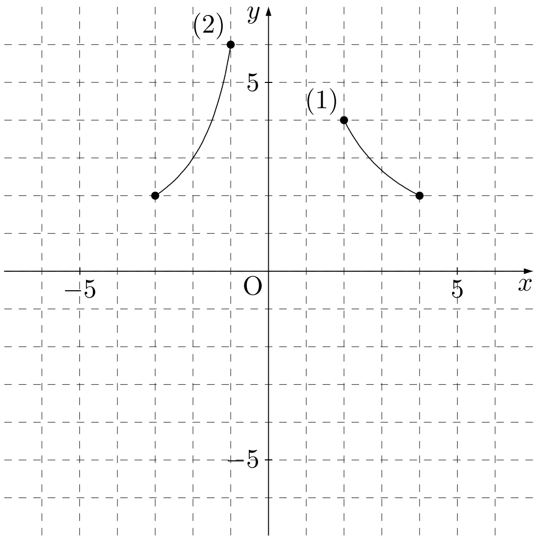
となるので、その 2 点を通る曲線をかきます。

(2) x の変域 $-3 \leqq x \leqq -1$ の両端の x における y の値は、

① $x=-3$ のとき：$y=-\dfrac{6}{-3}=2$

② $x=-1$ のとき：$y=-\dfrac{6}{-1}=6$

となるので、その 2 点を通る曲線をかきます。



【演習 3 − 6】

次の関数について、y の変域を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{12}{x}$ $(1 \leqq x \leqq 6)$

(2) $y=-\dfrac{10}{x}$ $(2 \leqq x \leqq 10)$