【数学B】空間ベクトル

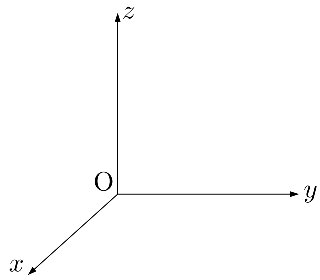
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　空間の点の座標

1.1　空間の点の座標



右の図のように空間に点 O をとり、O で互いに直交する 3 本の数直線を定めます。このとき、

- 点 O ：原点
- 3 本の数直線：x 軸、y 軸、z 軸

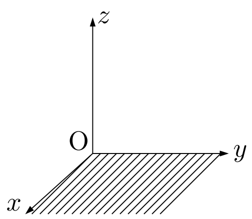
といいます。

さらに、2 本の直線が決まると平面が 1 つに決まるので、2 本の数直線（軸）で定まる平面は、

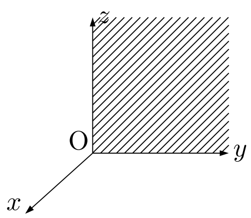
(ｉ) x 軸と y 軸で定まる平面：xy 平面
(ii) y 軸と z 軸で定まる平面：yz 平面
(iii) z 軸と x 軸で定まる平面：zx 平面

といい、これらを合わせて**座標平面**といいます。

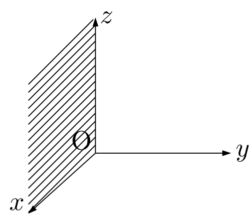
(i) xy 平面



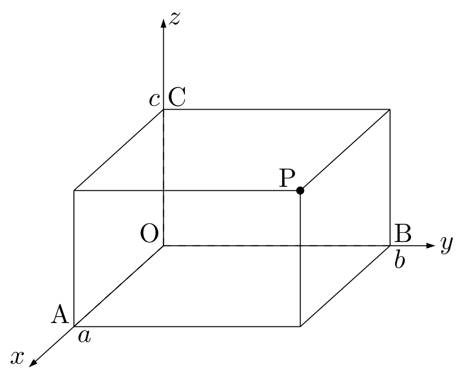
(ii) yz 平面



(iii) zx 平面



空間に点 P が与えられたとき、点 P を通り各座標平面に平行な平面（各座標軸に垂直な平面）が x 軸、y 軸、z 軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とします。点 A, B, C の各座標軸上での座標がそれぞれ a, b, c のとき、この 3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の**座標**といい、P$(a,\ b,\ c)$ と表します。また、このようにして座標の定められた空間を、**座標空間**といいます。



【例題１－１】

点 P(4, 5, 3) において、次の各問いに答えなさい。

(1) 点 P を通り、各座標平面に平行な平面（各座標軸に垂直な平面）が x 軸、y 軸、z 軸と交わる点を A, B, C とするとき、3 点 A, B, C の座標を求めなさい。

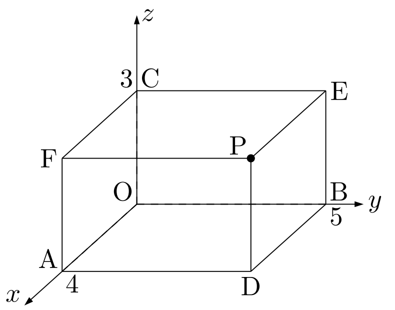
(2) 点 P から xy 平面、yz 平面、zx 平面にそれぞれ垂線 PD, PE, PF を下ろすとき、3 点 D, E, F の座標を求めなさい。

＜解説＞

問題文の条件を図に表すと右図のようになるので、このことから、

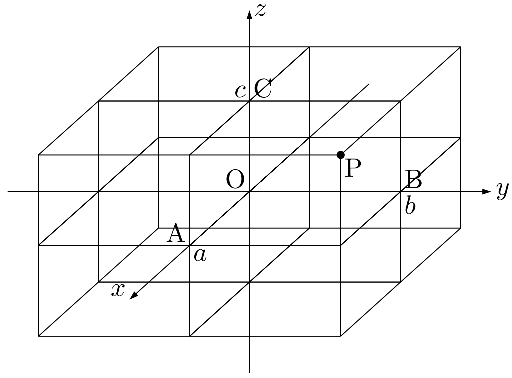
(1) A(4, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 3)

(2) D(4, 5, 0), E(0, 5, 3), F(4, 0, 3)



1.2 対称な点の座標

右の図のように、座標空間に点 P(a, b, c) があるとき、点 P と座標平面や軸に関して対称な点は次のような関係になります。このとき、対称となる点の座標は、もとの座標と符号が異なるだけですが、基準となる座標平面や軸に関する座標の符号は変わらず、それ以外の符号が逆になるという特徴があります。



① 点 P と xy 平面に関して対称な点：(a, b, $-c$)
② 点 P と yz 平面に関して対称な点：($-a$, b, c)
③ 点 P と zx 平面に関して対称な点：(a, $-b$, c)
④ 点 P と x 軸に関して対称な点：(a, $-b$, $-c$)
⑤ 点 P と y 軸に関して対称な点：($-a$, b, $-c$)
⑥ 点 P と z 軸に関して対称な点：($-a$, $-b$, c)

【例題 1 − 2】

点 P(4, 5, 3) において、次の各問いに答えなさい。

(1) 点 P と x 軸、y 軸、z 軸に関して対称な点をそれぞれ A, B, C とするとき、3 点 A, B, C の座標を求めなさい。

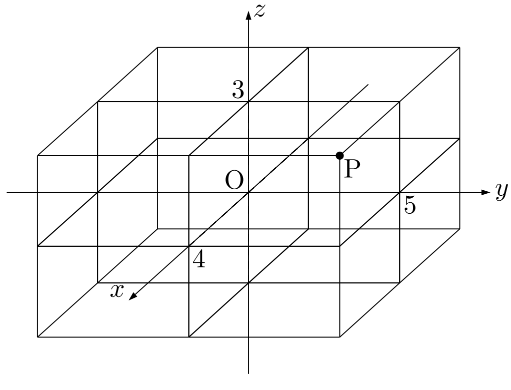
(2) 点 P と xy 平面、yz 平面、zx 平面に関して対称な点をそれぞれ D, E, F とするとき、3 点 D, E, F の座標を求めなさい。

＜解説＞

点 P は右図のようにして表すことができます。このことから、

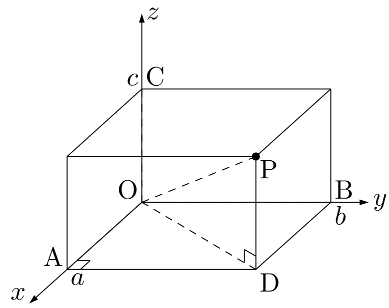
(1)
- A(4, −5, −3)
- B(−4, 5, −3)
- C(−4, −5, 3)

(2)
- D(4, 5, −3)
- E(−4, 5, 3)
- F(4, −5, 3)



1.3 原点 O との距離

ここでは、右図のような座標空間上にある点 P$(a,\ b,\ c)$ と原点との距離について考えます。



このとき、△OAD は直角三角形であるので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{OD}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AD}^2\\ &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

さらに、△POD も直角三角形であるので、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OD}^2 + \mathrm{DP}^2\\ &= \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OC}^2\\ &= (a^2 + b^2) + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

となります。

座標平面上における原点 O との距離を求める公式では、x 座標と y 座標の平方の和に根号をつけた形で表されましたが、座標空間においては、そこに z 座標に関する要素が加わった形になっています。

【例題 1 − 3】

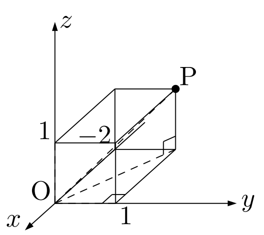
原点Oと点 P の距離を求めなさい。

(1) P$(-2,\ 1,\ 1)$　　(2) P$(1,\ 4,\ 2)$

<解説>

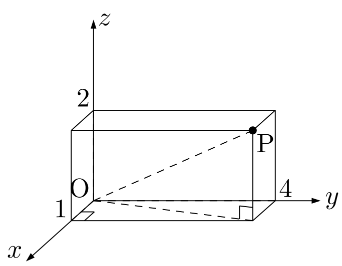
公式に当てはめれば答えを求めることができますが、図のイメージをしっかりとらえて公式を使うようにしてください。

(1)



$$\mathrm{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

(2)



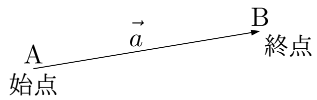
$$\mathrm{OP} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

2　空間ベクトル

2.1　空間ベクトル

空間においても、平面上のベクトルと同様に、空間の 2 点 A，B に対して、点 A から点 B に向かうベクトルを有向線分を用いて考えることができ、そのベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、大きさを $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ と書き表すことができます。また、平面の時に成り立った定義や性質は、空間においてもまったく同様に定義され成り立ちます。

- ベクトルの相等
- 零ベクトル
- 逆ベクトル
- 単位ベクトル
- ベクトルの実数倍
- ベクトルの加法・減法
- ベクトルの計算法則

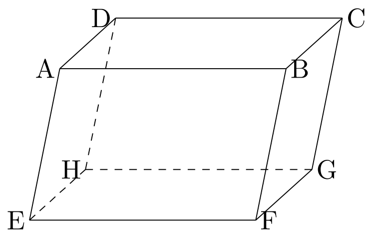


【例題 2 － 1】

向かい合う 3 組の面がそれぞれ平行である平行六面体 ABCD-EFGH において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を使って表しなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$



＜解説＞

平行六面体というのは、「6 つの面すべてが平行四辺形」になっている立体です。6 つの面すべてが長方形であれば直方体（平行六面体の特別なもの）になるので、直方体に力を加えてゆがめたような立体をイメージしてください。

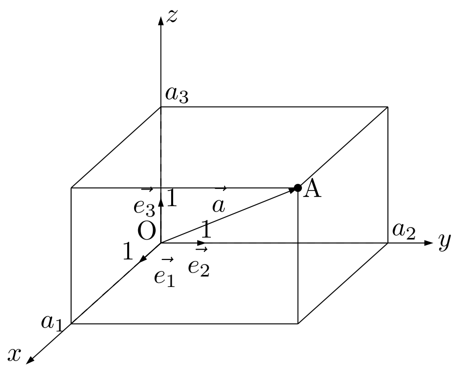
このとき、次のような関係が成り立ちます。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\vec{a},\qquad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\vec{b},\qquad \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\vec{c}$$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

2.2　空間ベクトルの成分



座標空間において、x 軸、y 軸、z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル（大きさが 1 のベクトル）を**基本ベクトル**といい、それぞれ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ で表します。

この空間ベクトル $\vec{a}$ に対し、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとって、その座標を $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とすると、$\vec{a}$ は、

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

と表され、a_1, a_2, a_3 をそれぞれ $\vec{a}$ の x **成分**、y **成分**、z **成分**といい、まとめて $\vec{a}$ の**成分**といいます。また、この $\vec{a}$ を

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

のようにも表し、これを $\vec{a}$ の**成分表示**といいます。このベクトルの成分表示では、基本ベクトル $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ は、

$$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0),\quad \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0),\quad \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$$

のように表され、零ベクトルは、

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

となります。

空間においても、ベクトルの大きさ、ベクトルの成分による演算やベクトルの相等は、平面の場合に z 成分を考慮することによって、同様の導出により、$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3), \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, k を任意の実数とすると、次の関係が成り立ちます。

(i) $\left|\vec{a}\right|=\mathrm{OA}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$　　(ii) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

(iii) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$　　(iv) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

(v) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

【例題 2 − 2】

$\vec{a}=(4,\ 1,\ -1), \vec{b}=(-3,\ 0,\ 2), \vec{c}=(-1,\ -2,\ -3)$ のとき、次のベクトルを成分で表しなさい。

(1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(2) $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$　　(3) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=(4,\ 1,\ -1)+(-3,\ 0,\ 2)+(-1,\ -2,\ -3)\\&=(4+(-3)+(-1),\ 1+0+(-2),\ -1+2+(-3))\\&=(0,\ -1,\ -2)\end{aligned}$$

(2)

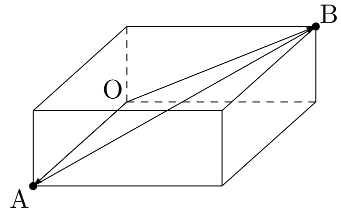
$$
\begin{aligned}
\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c} &= (4,\ 1,\ -1)+2(-3,\ 0,\ 2)-(-1,\ -2,\ -3)\\
&= (4,\ 1,\ -1)+(2\times(-3),\ 2\times 0,\ 2\times 2)-(-1,\ -2,\ -3)\\
&= (4,\ 1,\ -1)+(-6,\ 0,\ 4)-(-1,\ -2,\ -3)\\
&= (4+(-6)-(-1),\ 1+0-(-2),\ -1+4-(-3))\\
&= (-1,\ 3,\ 6)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c} &= 2(4,\ 1,\ -1)+3(-3,\ 0,\ 2)-4(-1,\ -2,\ -3)\\
&= (8,\ 2,\ -2)+(-9,\ 0,\ 6)+(4,\ 8,\ 12)\\
&= (8+(-9)+4,\ 2+0+8,\ -2+6+12)\\
&= (3,\ 10,\ 16)
\end{aligned}
$$

2.3　2 点間の距離

右図のように、座標空間に 2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$, B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ があるとき、



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$$

と表すことができます。このことから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (b_1,\ b_2,\ b_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3)\\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)\end{aligned}$$

となるので、2 点間の距離 AB は、

$$\mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

【例題 2 − 3】

2 点 A$(-5,\ 6,\ 2)$, B$(-1,\ -6,\ 5)$ について、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分とその大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ を求めなさい。

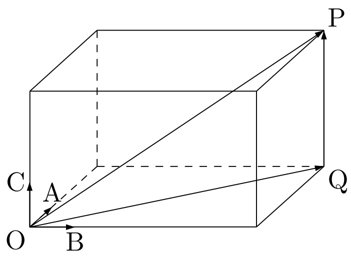
問題文の条件から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (-1,\ -6,\ 5) - (-5,\ 6,\ 2)\\ &= (-1 - (-5),\ -6 - 6,\ 5 - 2) = (4,\ -12,\ 3)\end{aligned}$$

となるので、その大きさは、

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}\\ &= \sqrt{16 + 144 + 9}\\ &= \sqrt{169} = 13\end{aligned}$$

2.4　ベクトルの分解と成分



空間内に、同じ平面上にない 4 点 O, A, B, C があり、任意の点を P とします。さらに、点 P を通り、直線 OC に平行な直線を引き、平面 OAB との交点を Q、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とすると、適当な実数 s, t, u を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots\ ①$$

と 1 通りに表すことができます。また、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=u\vec{c}\ \cdots\cdots\ ②$$

となり、これもただ 1 通りに表すことができますよって、①, ②より、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$
$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

となります。

一般に、任意のベクトル $\vec{p}$ は、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と適当な実数 s, t, u を用いて、ただ 1 通りに次の形に表すことができます。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

【例題 2 − 4】

$\vec{p}=(1,\ -3,\ 2)$, $\vec{q}=(4,\ 1,\ 1)$, $\vec{r}=(-2,\ 2,\ 3)$ のとき、次のベクトルを $a\vec{p}+b\vec{q}+c\vec{r}$ の形に表しなさい。

(1) $\vec{s}=(-8,\ -1,\ 12)$　　(2) $\vec{t}=(8,\ -8,\ -12)$

＜解説＞

問題文の条件から、

$$\begin{aligned}a\vec{p}+b\vec{q}+c\vec{r}&=a(1,\ -3,\ 2)+b(4,\ 1,\ 1)+c(-2,\ 2,\ 3)\\&=(a+4b-2c,\ -3a+b+2c,\ 2a+b+3c)\end{aligned}$$

と表すことができます。

(1)

$$\begin{aligned}\vec{s}&=a\vec{p}+b\vec{q}+c\vec{r}\\(-8,\ -1,\ 12)&=(a+4b-2c,\ -3a+b+2c,\ 2a+b+3c)\end{aligned}$$

ベクトルの相等から、

$$\begin{cases}a+4b-2c=-8\\-3a+b+2c=-1\\2a+b+3c=12\end{cases}$$

となるので、この連立方程式を解いて、

$$a=2,\ b=-1,\ c=3$$

このことから、

$$\vec{s} = 2\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$$

(2)

$$\vec{t} = a\vec{p} + b\vec{q} + c\vec{r}$$
$$(8,\ -8,\ -12) = (a + 4b - 2c,\ -3a + b + 2c,\ 2a + b + 3c)$$

ベクトルの相等から、

$$\begin{cases} a + 4b - 2c = 8 \\ -3a + b + 2c = -8 \\ 2a + b + 3c = -12 \end{cases}$$

となるので、この連立方程式を解いて、

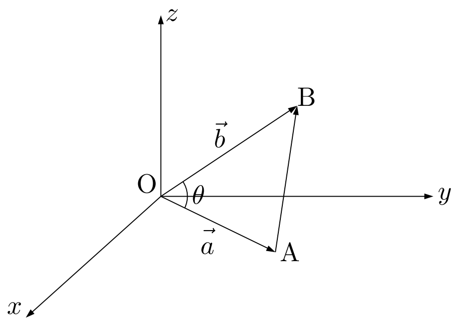
$$a = b = 0,\ c = -4$$

このことから、

$$\vec{t} = -4\vec{r}$$

3　空間ベクトルの内積

3.1　空間ベクトルの内積



$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ とそのなす角を θ とすると、空間においてもベクトルの内積は、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と定義されます。

右図のように、座標空間に、$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ があり、$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると、

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\
&=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}\\
&=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}\\
&=\frac{1}{2}\{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-(b_3-a_3)^2\}\\
&=\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\\
&\qquad\quad -b_1{}^2+2a_1b_1-a_1{}^2-b_2{}^2+2a_2b_2-a_2{}^2-b_3{}^2+2a_3b_3-a_3{}^2)\\
&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3
\end{aligned}$$

と成分で表示されます。

このことからもわかるように、内積の性質も平面のときと同様に、任意のベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ と実数 k との間に、

(i) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(iii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(iv) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(v) $(k\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}$

という関係が成り立ちます。

【例題 3 − 1】

次の 2 つのベクトルの内積を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2,\ 3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 2,\ -2)$　　(2) $\vec{a}=(5,\ -2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 2,\ 1)$

(3) $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$, $\vec{b}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

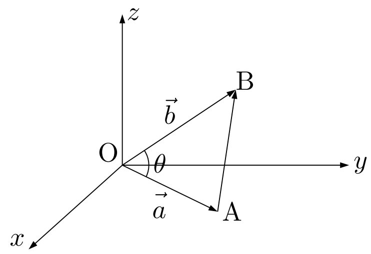
＜解説＞

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times2+4\times(-2)=-4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\times 1 + (-2)\times 2 + (-1)\times 1 = 0$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times 1 + 1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

3.2 ベクトルとそのなす角



右図のように、$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると、内積の定義から、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}\cos\theta|$$

と表すことができます。

平面ベクトルのときと同じように、空間においても、角の大きさに関する式は、このベクトルの内積の定義式しかないので、角に関する条件についてベクトルで考えるときは、内積の定義式を用います。そこで、角に関する条件を求めるときは、内積の定義式を次のように変形したものを用います。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$$

【例題 3 − 2】

次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(4,\ -5,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -1,\ 2)$　　(2) $\vec{a}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 2,\ 2)$

＜解説＞

(1) ベクトルの内積、大きさを求めると、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times1+(-5)\times(-1)+3\times2=15$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}=5\sqrt{2},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$$

となるので、このことから、

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{15}{5\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より、

$$\theta=30^\circ$$

(2) ベクトルの内積、大きさを求めると、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$$

となるので、このことから、

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$\theta=45^\circ$$

3.3 垂直なベクトル

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ があるとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直ならば、$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ は 90° になるので、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$$

また、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるとき、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta&=0\\ \cos\theta&=0\end{aligned}$$

$$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ \text{より} \quad \theta=90^\circ$$

となるので、平面のときと同じように、空間においても次のことが成り立ちます。

$$\begin{aligned}\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{が垂直} &\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ &\iff a_1b_1+a_2b_2a_3b_3=0\end{aligned}$$

【例題 3 − 3】

次のベクトルが垂直になるように x の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(2,\ 3,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 2,\ x)$ (2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -2)$, $\vec{b}=(5-x,\ x+4,\ x-4)$

＜解説＞

(1) 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直になるためには、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times2+(-1)\times x&=0\\ 4-x&=0\\ x&=4\end{aligned}$$

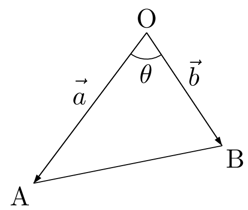
(2) 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直になるためには、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(5-x)+(-2)\times(x+4)+(-2)\times(x-4)&=0\\ 5-x-2x-8-2x+8&=0\\ -5x&=-5\\ x&=1\end{aligned}$$

3.4 面積

ベクトルを用いて三角形の面積を求めてみたいと思います。

そこで、右図のような $\triangle$OAB の面積を S、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とすると、



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{\sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \end{aligned}$$

となり、

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

であるので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \end{aligned}$$

のように、空間においても平面のときと全く同じようにして、三角形の面積を求めることができます。

【例題 3 − 4】

3 点 A$(1,\ 3,\ -3)$, B$(0,\ 5,\ -1)$, C$(2,\ 3,\ -4)$ を頂点とする $\triangle$ABC について、次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を求めなさい。　(2) $\triangle$ABC の面積を求めなさい。

＜解説＞

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (0,\ 5,\ -1) - (1,\ 3,\ -3) = (-1,\ 2,\ 2) \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (2,\ 3,\ -4) - (1,\ 3,\ -3) = (1,\ 0,\ -1) \\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-1)\times 1 + 2\times 0 + 2\times(-1) = -3 \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3 \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| &= \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

より、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{-3}{3\times\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < \theta < 135^\circ$ であるので、

$$\theta = 135^\circ$$

(2) △ABC の面積を S とすると、

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$$

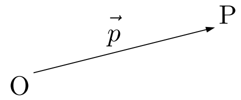
または、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times(\sqrt{2})^2-(-3)^2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

と求めることもできます。

4　位置ベクトル

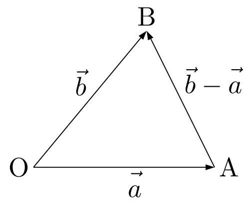
4.1　分点の位置ベクトル



平面のときと同様に、空間においても基準となる点 O を定めると、任意の点 P は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$$

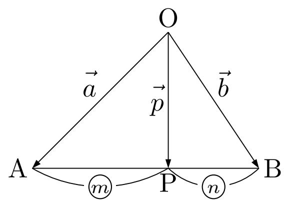
というベクトル $\vec{p}$ によって表すことができ、この $\vec{p}$ を点 O に関する点 P の**位置ベクトル**といい、P($\vec{p}$) と表します。



このことから、空間においても平面のときと同様に、2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$$

が成り立ちます。



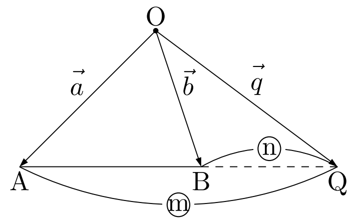
さらに、平面の時と同じように空間においても、2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) は、

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

と表され、特に、線分 AB の中点の位置ベクトルは、

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

となります。



そして、2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に外分する点を Q($\vec{q}$) についても平面と同じように、$m:(-n)$ に内分、もしくは、$(-m):n$ に内分する点だと考えて、

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n} \quad \left(= \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n} \right)$$

と表されます。

【例題 4 − 1】

2 点 A(1, 4, −3), B(−3, 0, 5) のとき、次の点の座標を求めなさい。

(1) 線分 AB を 3 : 1 の比に内分する点　　(2) 線分 AB を 1 : 3 の比に外分する点

＜解説＞

A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) として考えます。

(1) 線分 AB を 3 : 1 の比に内分する点を P($\vec{p}$) とすると、

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1} = \frac{(1,\ 4,\ -3)+3(-3,\ 0,\ 5)}{4} = \frac{(1,\ 4,\ -3)+(-9,\ 0,\ 15)}{4}$$

$$= \frac{(-8,\ 4,\ 12)}{4} = (-2,\ 1,\ 3)$$

(2) 線分 AB を $1:3$ の比に外分する点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とすると、

$$\vec{q}=\frac{3\vec{a}-\vec{b}}{(-1)+3}=\frac{3(1,\ 4,\ -3)-(-3,\ 0,\ 5)}{2}=\frac{(3,\ 12,\ -9)-(-3,\ 0,\ 5)}{2}$$

$$=\frac{(6,\ 12,\ -14)}{2}=(3,\ 6,\ -7)$$

4.2 共点条件

右図のように、始点（点 O）が同じ等しい 2 つのベクトルがあるとき、その終点は一致します。また、一致する 2 点があるとき、ある点を基準にして位置ベクトルを考えるとき、その位置ベクトルは等しくなります。

このことから、2 つの点が一致するための条件（**共点条件**）は、

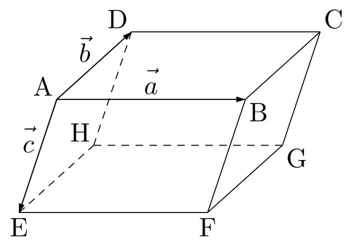
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \Longleftrightarrow 2 \text{ 点 P, Q は一致する}$$

【例題 4 − 2】

平行六面体 ABCD-EFGH において、対角線 AG, BH, CE, DF の中点は一致することを証明しなさい。

＜解説＞

対角線 AG, BH, CE, DF の中点を K, L, M, N とし、点 A に関する点 B, D, E の位置ベクトルを、それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とします。このとき、



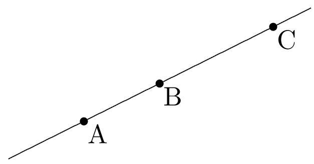
$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}})}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + \overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}})}{2} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AL}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

よって、対角線 AG, BH, CE, DF の中点は一致する。

4.3 共線条件



空間においても平面のときと同じように、右の図のように、3 点 A, B, C が一直線上にあるとき、点 C（1 点）直線 AB（残りの 2 点を結ぶ直線上にあることになります。このことから、3 点が一直線上にあるための条件（**共線条件**）は、

3 点 A, B, C が一直線上にある

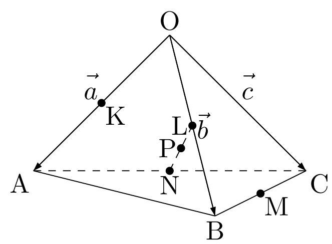
$\Longleftrightarrow$点 C（1 点）が直線 AB（残りの 2 点を結ぶ直線）上にある

$\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となる実数 k が存在する

【例題 4 − 3】

四面体 OABC において、辺 OA, OB, BC, CA の中点を、それぞれ K, L, M, N とし、線分 LN の中点を P とします。このとき、3 点 K, P, M は一直線上にあることを証明しなさい。

<解説>



点 O に関する点 A, B, C の位置ベクトルを、それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とします。このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{2}\vec{a} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\\
\overrightarrow{\mathrm{KP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}\\
&=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\\
\overrightarrow{\mathrm{KM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}\\
&=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}
\end{aligned}$$

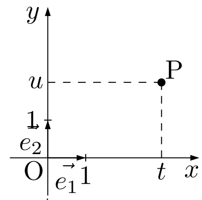
となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{KM}}=2\left(\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\right)=2\overrightarrow{\mathrm{KP}}$$

よって、3 点 K, P, M は一直線上にある。

4.4 共面条件

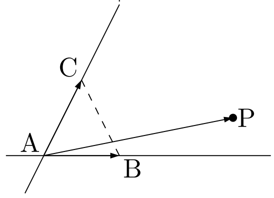
右図のように、座標平面上に任意の点 $\mathrm{P}(u,\ t)$ があるとき、基本ベクトル $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ を用いて、



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{e_1} + u\vec{e_2}$$

のようにただ 1 通りに表すことができます。

このようにして、一般に、1 次独立であるような基準となる 2 つのベクトルを用いて、空間にある任意の点 P について、



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (t,\ u \text{ は実数})$$

のように、ただ 1 通りに表すことができます。

このとき、3 点 A, B, C が決まると、平面がただ 1 つに決まるので、点 P は平面 ABC 上に存在することになります。このことから、任意の点 P が平面 ABC 上にあるための条件（**共面条件**）は、

任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が、一直線上にない 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c})$ の定める平面 ABC 上にある

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (t,\ u \text{ は実数})$$

【例題 4 − 4】

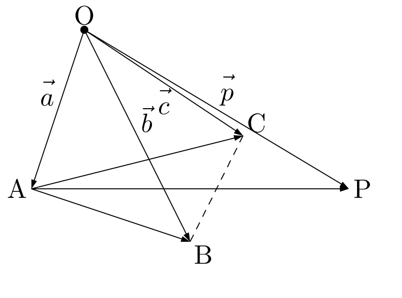
一直線上にない 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ と同一平面上にある任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は、$s+t+u=1$ を満たす適当な実数 s, t, u を用いて、

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

という形に表されることを証明しなさい。

＜解説＞

点 P は平面 ABC 上にあるので、



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (t,\ u \text{ は実数})$$

のように表すことができます。これを位置ベクトルを用いて表すと、

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a}) + u(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b} - t\vec{a} + u\vec{c} - u\vec{a}$$

$$= (1-t-u)\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$$

ここで、

$$1 - t - u = s$$

つまり、

$$s + t + u = 1$$

とすれば、

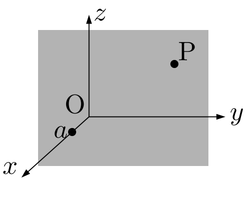
$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \quad (s+t+u=1)$$

5 空間図形への応用

5.1 座標平面と平行な平面の方程式

座標空間に点 P$(a,\ b,\ c)$ があるとき、その点 P を通り、各座標平面に平行な平面は次のようになります。

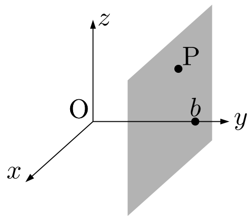
(ｉ) yz 平面に平行な平面



x 軸に垂直な平面で、その平面の方程式は、

$$x = a$$

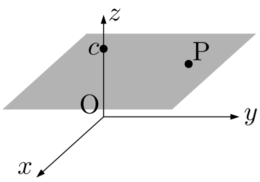
(ii) zx 平面に平行な平面



y 軸に垂直な平面で、その平面の方程式は、

$$y = b$$

(iii) xy 平面に平行な平面



z 軸に垂直な平面で、その平面の方程式は、

$$z = c$$

【例題 5 − 1】

(1) 点 $(2,\ -3,\ 1)$ を通り、次の座標平面に平行な平面の方程式を求めなさい。

① xy 平面　② yz 平面　③ zx 平面

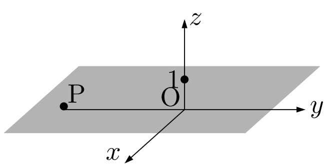
(2) 点 $(1,\ 2,\ -2)$ を通り、次の座標軸に垂直な平面の方程式を求めなさい。

① x 軸　② y 軸　③ z 軸

＜解説＞

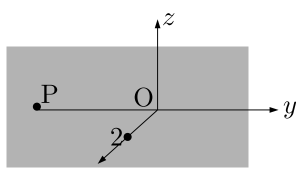
(1) 点 $(2,\ -3,\ 1)$ を通り、各座標平面に平行な平面は次のようになるので、

① xy 平面



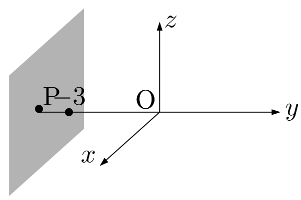
平面の方程式：$z = 1$

② yz 平面



平面の方程式：$x = 2$

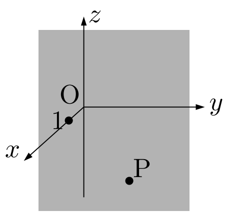
③ zx 平面



平面の方程式：$y = -3$

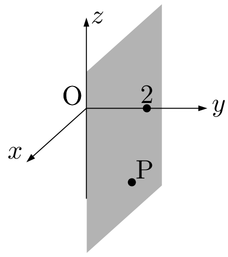
(2) 点 $(1,\ 2,\ -2)$ を通り、各座標軸に垂直な平面は次のようになるので、

① x 軸



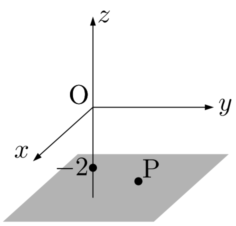
平面の方程式：$x = 1$

② y 軸



平面の方程式：$y = 2$

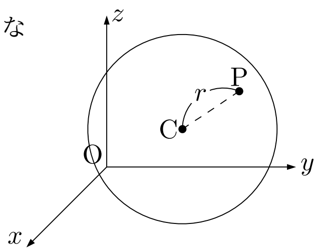
③ z 軸



平面の方程式：$z = -2$

5.2 球面の方程式

右の図のような、空間の定点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とする半径 r の球を考えます。球面上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると、定点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ から点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ までの距離は r で一定となるので、



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$$

という関係が成り立ちます。この式から

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$

と表すことができ、これを**球面（球）のベクトル方程式**といいます。

さらに、$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$, $\vec{c} = (a,\ b,\ c)$ とすると、

$$\vec{p} - \vec{c} = (x - a,\ y - b,\ z - c)$$

となるので、

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$
$$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

と変形でき、この式が中心 $(a,\ b,\ c)$、半径 r の球の方程式になります。

【例題 5 − 2】

次の球面の方程式を求めなさい。

(1) 中心 C(2, 2, 3)、半径 5 の球面

(2) 2 点 A(4, −1, 2)、 B(0, 1, 4) を直径の両端とする球面

(3) 中心 C(5, −2, 3) で xy 平面に接する球面

＜解説＞

中心 $(a,\ b,\ c)$、半径 r の球面の方程式：$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$

(1) 中心 C(2, 2, 3)、半径 5 の球面の方程式は、

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

(2) 2 点 A, B を直径の両端とするとき、その中点が球の中心となるので、

$$\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{-1+1}{2},\ \frac{2+4}{2}\right) = (2,\ 0,\ 3)$$

また、球の半径 r は、線分 BM（もしくは、線分 AM）の長さであるので、

$$r^2 = \mathrm{BM}^2$$
$$= (2-0)^2 + (0-1)^2 + (3-4)^2 = 6$$

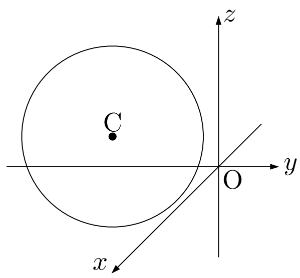
よって、求める球の方程式は、

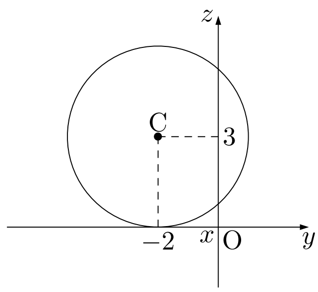
$$(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=6$$

(3) 右図のように、球が xy 平面に接するとき、その球面の半径は 3 となるので、

$$(x-5)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-3)^2=3^2$$

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$$

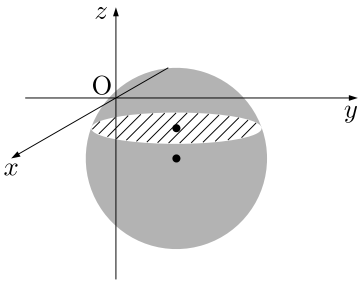




5.3 球面と平面の交わり

中心 C$(a,\ b,\ c)$、半径 r の球面の方程式は、

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



と表されます。この球面と、各座標平面に平行な平面と交わるとき、その交わりの部分は右図のように円になります。交わりの部分は、球面と平面の共通部分になるので、交点を求めるときと同じように、それぞれの方程式を連立させることで、その円の方程式を求めることができます。

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\\ x=k \qquad (y=l,\ z=m)\end{cases}$$

【例題 5 − 3】

中心 C$(1,\ 2,\ -3)$、半径 4 の球面と次の平面が交わる部分は円になります。その中心の座標と半径を求めなさい。

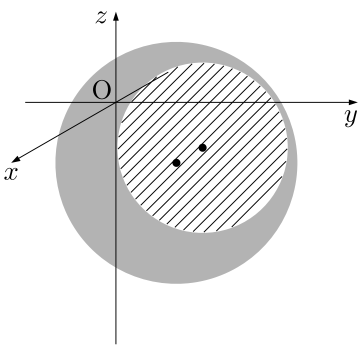
(1) yz 平面　　(2) zx 平面　　(3) 平面 $z=-3$

＜解説＞

中心 $(1,\ 2,\ -3)$、半径 4 の球面の方程式は次のようになります。

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$

(1) yz 平面の方程式は、$x=0$ であるので、



$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16\\ x=0\end{cases}$$

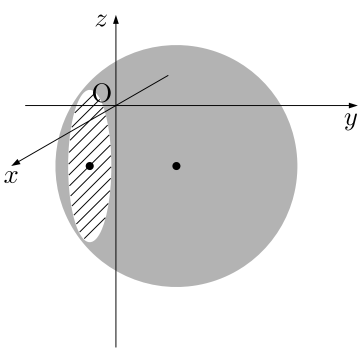
と連立させれば、

$$(0-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$
$$(y-2)^2+(z+3)^2=15$$

となるので、

円の中心：$(0,\ 2,\ -3)$,　　円の半径：$\sqrt{15}$

(2) zx 平面の方程式は、$y=0$ であるので、



$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16\\ y=0\end{cases}$$

と連立させれば、

$$(x-1)^2+(0-2)^2+(z+3)^2=16$$
$$(x-1)^2+(z+3)^2=12$$

となるので、

円の中心：$(1,\ 0,\ -3)$,　　円の半径：$2\sqrt{3}$

(3) 円の方程式と平面の方程式を連立させると、

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16\\ z=-3\end{cases}$$

となるので、

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(-3+3)^2=16$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=16$$

このことから、

円の中心：$(1,\ 2,\ -3)$,　　円の半径：4