【数学B】平面ベクトル

まなびの学園

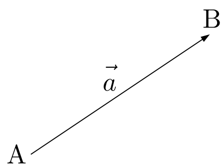
http://www.manabino-academy.com

目次

1　ベクトルとその演算

1.1　ベクトルの基本性質

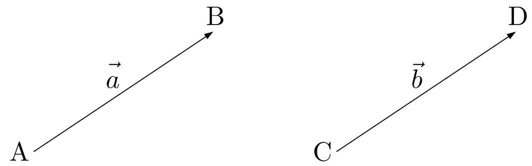
向きと大きさをもつ量のことを**ベクトル**といいます。例えば、「x 軸方向に 2 だけ平行移動」という場合、「x 軸方向」という向きと「2」という大きさを表しているので、ベクトルであるということができます。このベクトルは、平面内の 2 点を結ぶ線分と向きをつけた**有向線分**によって表すことができ、有向線分の向きがベクトルの向き、有向線分の長さがベクトルの大きさを表します。



右図のような点 A から点 B に向かう有向線分 AB では、A を**始点**、B を**終点**といい、この有向線分 AB を用いて表されるベクトルを、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書き表します。また、小文字を使って、$\vec{a}$ のように表すこともあります。そして、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\vec{a}$ の大きさは、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|, \qquad |\vec{a}|$$

のようにして表します。

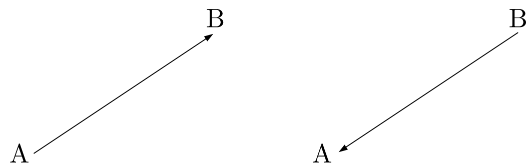


有向線分は、「始点」と「終点」という 2 点を決めることによって定まります。これを言い換えると、有向線分は、「始点」・「向き」・「大きさ」という 3 つの要素で定まることになります。ベクトルはこのうち、「向き」と「大きさ」という 2 つの要素に着目しているので、始点にはよりません。つまり、始点によらず向きと大きさが等しい 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ は等しいことになり、

$$\vec{a} = \vec{b}$$

と表します。

図のように 2 つの等しいベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があるとき、有向線分 AB(CD) は平行移動することにより、有向線分 CD(AB) に重ね合わせることができます。



大きさが等しく、向きが逆である 2 つのベクトルは、互いに**逆ベクトル**であるといい、$\vec{a}$ の逆ベクトルは、

$$-\vec{a}$$

と表します。右図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の 2 つのベクトルは逆ベクトルの関係であるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

という関係が成り立ちます。

始点と終点が一致した有向線分 AA の定めるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は、大きさが 0 のベクトルになり、これを**零ベクトル**といい、$\vec{0}$ と表します。つまり、

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$$

となります。

また、大きさが 1 となるベクトルを**単位ベクトル**といいます。

1.2　ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対し、$\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ は、

(i) $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき

① $k > 0$ ならば、$k\vec{a}$ は、$\vec{a}$ と同じ向きで、大きさが k 倍

② $k = 0$ ならば、$k\vec{a}$ は、$k\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$

③ $k < 0$ ならば、$k\vec{a}$ は、$\vec{a}$ と反対向きで、大きさが $|k|$ 倍

(ii) $\vec{a} = \vec{0}$ のとき

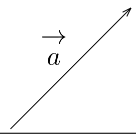
$k\vec{a}$ はどのような実数 k に対しても

$$k\vec{a} = k\vec{0} = \vec{0}$$

のように定めます。

【例題 1 − 2】

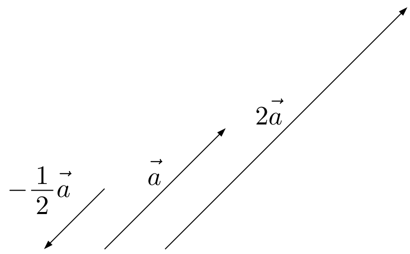
図のような $\vec{a}$ について、次のベクトルを図示しなさい。



(1) $2\vec{a}$　　　　(2) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

(1) $2\vec{a}$ は、ベクトル $\vec{a}$ と向きが同じで、大きさが 2 倍、つまり、有向線分の長さが 2 倍となったものになります。

(2) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$ は、ベクトル $\vec{a}$ と向きが反対で、大きさが $\dfrac{1}{2}$ 倍、つまり、有向線分の長さが半分となったものになります。



1.3 ベクトルの加法

任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ は、

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \qquad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

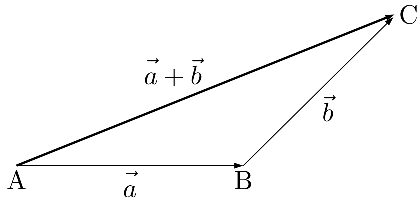
となるような 3 点 A, B, C をとることにより、

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

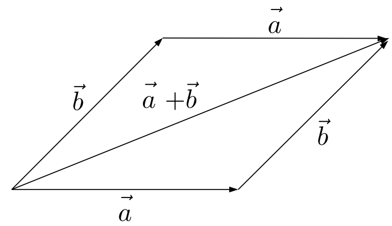
となります。また、このことから、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と書き表すこともできます。



右の図のように、任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の始点をそろえて描いたとき、その 2 辺を持つような平行四辺形を作ると、その対角線がベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}$ になることがわかります。また、図から明らかなように、任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して、



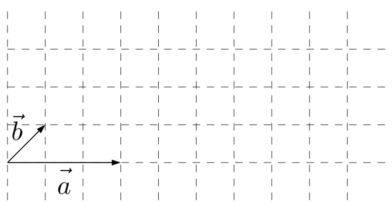
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

となり、ベクトルにおいても加法の交換法則が成り立つことがわかります。

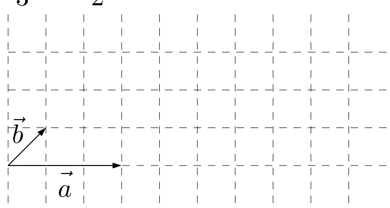
【例題 1 − 3】

図のようなベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、次のベクトルを図示しなさい。

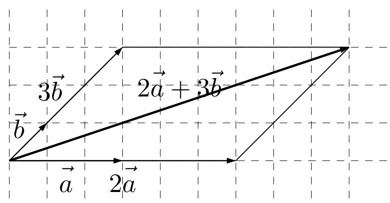
(1) $2\vec{a}+3\vec{b}$



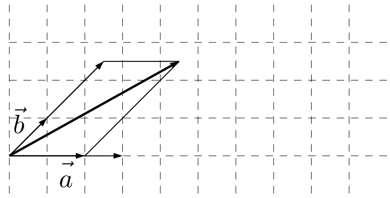
(2) $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{2}\vec{b}$



(1) $2\vec{a}$ は、$\vec{a}$ の 2 倍の大きさのベクトルであるので、有向線分の長さが 2 倍になり、同じように、$3\vec{b}$ は、$\vec{b}$ の 3 倍の大きさのベクトルになるので、有向線分の長さが 3 倍になるように図示します。そのことから、2 つのベクトル $2\vec{a}$ と $3\vec{b}$ の和のベクトル $2\vec{a}+3\vec{b}$ は、右図のようになります。



(2) $\dfrac{2}{3}\vec{a}$ は、$\vec{a}$ の $\dfrac{2}{3}$ 倍の大きさのベクトルであるので、有向線分の長さが $\dfrac{2}{3}$ 倍になり、同じように、$\dfrac{5}{2}\vec{b}$ は、$\vec{b}$ の $\dfrac{5}{2}$ 倍の大きさのベクトルになるので、有向線分の長さが $\dfrac{5}{2}$ 倍になるように図示します。そのことから、2 つのベクトル $\dfrac{2}{3}\vec{a}$ と $\dfrac{5}{2}\vec{b}$ の和のベクトル $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{2}\vec{b}$ は、右図のようになります。

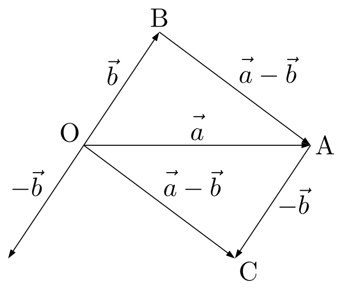


1.4 ベクトルの減法

右図から、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

とベクトルの和を考えることができます。このことから、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を左辺に移項すると、



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

となるので、2 つのベクトルを始点をそろえるようにしたとき、引くベクトルの終点から引かれるベクトルの終点に向けて有向線分を引くことで、ベクトルの差を書き表すことができます。

また、任意のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差 $\vec{a}-\vec{b}$ は、

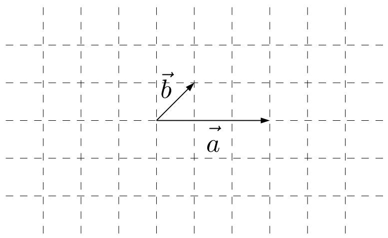
$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

と考えることができるので、$\vec{a}$ に $\vec{b}$ の逆ベクトル $-\vec{b}$ を加えることによっても得ることができます。

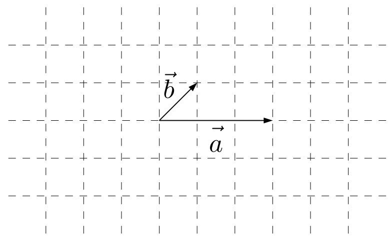
【例題 1 − 4】

図のようなベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、次のベクトルを図示しなさい。

(1) $\vec{a}-2\vec{b}$

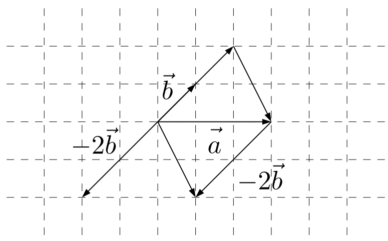


(2) $2\vec{b}-\vec{a}$



＜解説＞

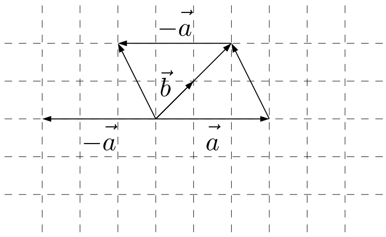
(1) $2\vec{b}$ を $\vec{a}$ の始点をそろえるように描いたとき、$2\vec{b}$ の終点から $\vec{a}$ の終点に向かうように有向線分を描くことで、$\vec{a}-2\vec{b}$ を図示することができます。



また、

$$\vec{a}-2\vec{b} = \vec{a} + (-2\vec{b})$$

のように、$2\vec{b}$ の逆ベクトル $-2\vec{b}$ を考えることで、ベクトルの加法を利用して図示することもできます。



(2) $2\vec{b}$ を $\vec{a}$ の始点をそろえるように描いたとき、$\vec{a}$ の終点から $2\vec{b}$ の終点に向かうように有向線分を描くことで、$2\vec{b}-\vec{a}$ を図示することができます。

また、

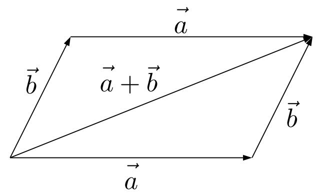
$$2\vec{b}-2\vec{a}=2\vec{b}+(-\vec{a})$$

のように、$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ を考えることで、ベクトルの加法を利用して図示することもできます。

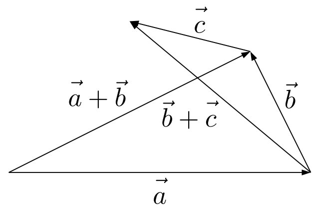
1.5 ベクトルの計算法則

任意のベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$、任意の実数を α, β とすると、ベクトルには次のような計算法則が成り立ちます。

(i) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



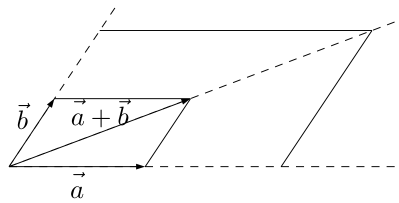
(ii) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



(iii) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

(iv) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

(v) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$



(vi) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

(vii) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

これらのことから分かるように、ベクトルの計算は文字式の計算と同様にして計算することができます。

【例題 1 − 5】

次の計算をしなさい。

(1) $3(2\vec{a}-5\vec{b})-2(3\vec{a}-4\vec{b})$

(2) $\dfrac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{1}{3}(3\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c})$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}3(2\vec{a}-5\vec{b})-2(3\vec{a}-4\vec{b})&=6\vec{a}-15\vec{b}-6\vec{a}+8\vec{b}\\&=-7\vec{b}\end{aligned}$$

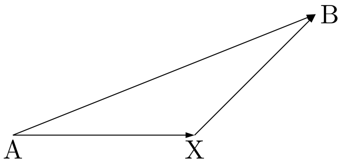
(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})+\frac{1}{3}(3\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c})&=\frac{9\vec{a}-3\vec{b}+6\vec{c}}{6}+\frac{6\vec{b}-2\vec{a}+4\vec{c}}{6}\\&=\frac{7\vec{a}+3\vec{b}+10\vec{c}}{6}\quad\left(=\frac{7}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{5}{3}\vec{c}\right)\end{aligned}$$

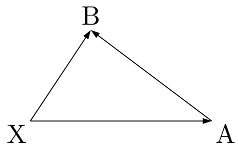
1.6　ベクトルの変形

すでに学習している内容ですが、ベクトルを変形するために、次のような関係を利用します。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AX}}+\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

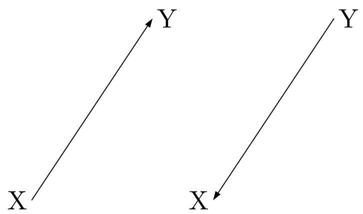


(ii) $\overrightarrow{\mathrm{XB}}-\overrightarrow{\mathrm{XA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$



ベクトルの差を利用して、あるベクトルを、新たな始点をもつベクトルにすることができます。

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{XY}}=-\overrightarrow{\mathrm{YX}}$



逆ベクトルを使用して、ベクトルの始点と終点を入れ替えることができます。

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{XX}}=\vec{0}$

【例題１－６】

次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{QS}}$

＜解説＞

等式を証明する基本的な方法として、

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=0$$

という形をつくることで行うことができるので、ベクトルを含む等式においても、

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=\vec{0}$$

という形に変形することで証明することができます。このとき、「$=\vec{0}$」となることに注意をしてください。

また、ベクトルを変形するときにかかわらずベクトルを扱うときには、「始点をそろえる」ように変形するとうまくいきます。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{QS}}$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=(\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}})-(\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{QS}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}-\overrightarrow{\mathrm{PR}}-\overrightarrow{\mathrm{QS}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{PS}}+(\overrightarrow{\mathrm{PR}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}})-\overrightarrow{\mathrm{PR}}-(\overrightarrow{\mathrm{PS}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PR}}-\overrightarrow{\mathrm{PS}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{0}\end{aligned}$$

1.7 ベクトルの平行

2 つのベクトルの向きが同じか反対であるとき、その 2 つのベクトルは**平行**であるといい、図形のときと同じようにして、

$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行：$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$

と表します。

ベクトルを実数倍するとき、次のような関係がありました。

① $k > 0$: $k\vec{a}$ は、$\vec{a}$ と同じ向きで、大きさが k 倍
② $k = 0$: $k\vec{a}$ は、$k\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$
③ $k < 0$: $k\vec{a}$ は、$\vec{a}$ と反対向きで、大きさが $|k|$ 倍

ベクトルは向きと大きさをあわせもつ量であるので、大きさを考えないとき、①, ③のとき、ベクトルの向きが同じか反対になります。このことから、次のことが成り立ちます。

$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$となる実数 k が存在する

【例題 1 − 7】

$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$, $\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$ のとき、$3\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{x} - \vec{y} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ は平行であることを示しなさい。

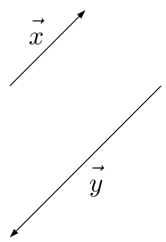
<解説>

ベクトルは文字式と同じように計算することができるので、次のように連立方程式を作り、$\vec{x}, \vec{y}$ がどのような形で表されるのかを求めます。

$$\begin{cases} 3\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b} & \cdots\cdots\cdots ① \\ \vec{x} - \vec{y} = 3\vec{a} - 6\vec{b} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① + ② より、

$$\begin{aligned} 4\vec{x} &= 4\vec{a} - 8\vec{b} \\ \vec{x} &= \vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{y} &= \vec{x} - 3\vec{a} + 6\vec{b} \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} \\ &= -2\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= -2(\vec{a} - 2\vec{b}) = -2\vec{x} \end{aligned}$$

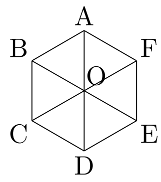


このことから、$\vec{y} = -2\vec{x}$ のように表され、図からもわかるように、2 つのベクトルは平行であることがわかります。

1.8 正六角形とベクトル

【例題 1 − 8】

正六角形 ABCDEF において、その中心を O，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{b}$ とするとき、次のベクトルを $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表しなさい。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

＜解説＞

正六角形の性質から、次のようなベクトルが等しくなります。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{b}$$

また、ベクトルの加法を用いると、あるベクトルの終点と別のベクトルの始点をそろえるように図にすれば、最初のベクトルの始点と最後のベクトルを結ぶ有向線分でベクトルの和を表すことができるので、正六角形の辺や対角線を表すベクトルを求めることができます。

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \vec{a} + \vec{b}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} \\ &= -\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{b} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

(4)

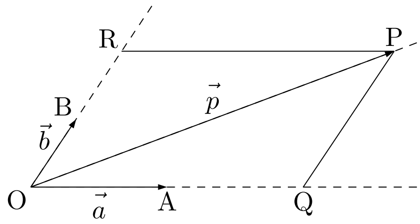
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EO}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{ED}} - \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{FO}} \\ &= -\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} \\ &= -2\vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

1.9 ベクトルの分解

右図のように、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$$

とします。また、OP が平行四辺形の対角線となるように、OA, OB の延長上に点 Q, R をとると、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の実数倍であるので、実数 s, t を用いて、



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\vec{b}$$

と表すことができます。このことから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

となり、2 つのベクトルを別の 1 つのベクトル（平行四辺形の対角線）で表すことができましたが、それとは逆に、ある 1 つのベクトルを、別の 2 つのベクトル（平行四辺形の 2 辺）に分解することができます。

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ (これを、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **1 次独立**であるといいます。) であるような 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、次のような関係が成り立ちます。

(i) $s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow s=t=0$

$s\neq 0$ であると仮定すると、

$$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$$

$$\vec{a}=-\frac{t}{s}\vec{b}$$

① $t=0$ のとき : $\vec{a}=\vec{0}$　　② $t\neq 0$ のとき : $\vec{a}\parallel\vec{b}$

となり、$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であることに矛盾する。よって、$s=0$

$$s=0\text{ のとき}\quad t\vec{b}=\vec{0}$$

$$t=0$$

このことから、$s=t=0$

(ii) $s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\Longleftrightarrow s=s',\ t=t'$

(i) より、

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}\Longleftrightarrow(s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow s-s'=t-t'=0$$

このことから、あるベクトルを分解するとき、その分解の仕方は 1 通りしかありません。これを、**ベクトルの分解の一意性**といいます。

【例題 1 − 9】

平面上の $\vec{0}$ でなく平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、等式 を満たす実数 x, y の値を求めなさい。

＜解説＞

　与えられた式を変形すると、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
x(\vec{a}+\vec{b})+y(2\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}-5\vec{b} \\
x\vec{a}+x\vec{b}+2y\vec{a}-y\vec{b} &= \vec{a}-5\vec{b} \\
(x+2y)\vec{a}+(x-y)\vec{b} &= \vec{a}-5\vec{b}
\end{aligned}
$$

このことから、両辺が等しくなるためには、係数が等しくならなければいけないので、

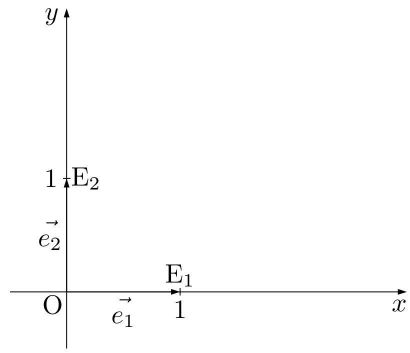
$$
\begin{cases}
x+2y=1 & \cdots\cdots \text{③} \\
x-y=-5 & \cdots\cdots \text{④}
\end{cases}
$$

これを解いて、① − ② より、

$$
\begin{aligned}
3y &= 6 \\
y &= 2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x &= y-5 \\
&= 2-5=-3
\end{aligned}
$$

2 ベクトルの成分

2.1 ベクトルの成分表示



原点を O とする座標平面上に、

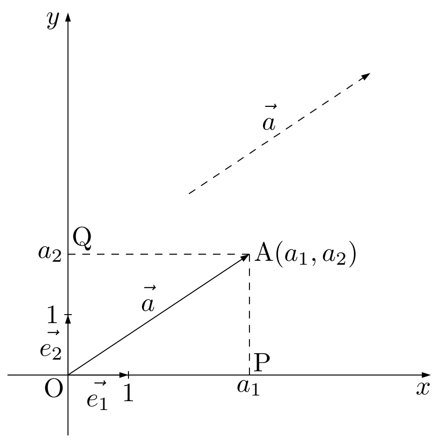
$\vec{e_1}$: x 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$\vec{e_2}$: y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

を考え、この $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ をそれぞれ x 軸方向、y 軸方向の**基本ベクトル**といいます。つまり、点 $\mathrm{E}_1\ (1,\ 0)$、点 $\mathrm{E}_2\ (0,\ 1)$ とすると、

$$\vec{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_1},\quad \vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_2}$$

と考えることができます。



ここで、この平面上の任意のベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき、$\vec{a}$ の有向線分の始点を O に移し、

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となるように点 A をとり、点 A の座標を $(a_1,\ a_2)$ とします。

A から x 軸、y 軸に下ろした垂線の足を P, Q とすると、

$$\mathrm{P}(a_1,\ 0),\qquad \mathrm{Q}(0,\ a_2)$$

となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\vec{e_1},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a_2\vec{e_2}$$

と表すことができます。よって、ベクトルの和を考えることにより、

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

と表すことができます。これを $\vec{a}$ の**基本ベクトル表示**といいます。

また、この $\vec{a}$ を、

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$$

のようにも表し、これを $\vec{a}$ の**成分表示**といいます。このとき a_1, a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の x **成分**、y **成分**といい、これらをまとめて $\vec{a}$ の**成分**といいます。このベクトルの成分表示で、基本ベクトル $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ と零ベクトルは、

$$\vec{e_1} = (1,\ 0),\qquad \vec{e_2} = (0,\ 1),\qquad \vec{0} = (0,\ 0)$$

と表されます。また、$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ の大きさ $\left|\vec{a}\right|$ は図からわかるように、三平方の定理を利用して、

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

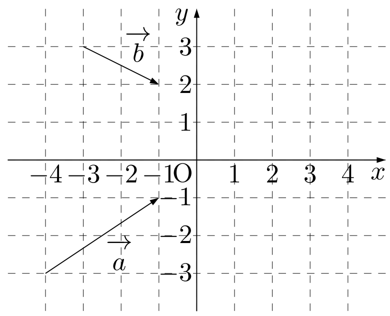
となります。

【例題 2 − 1】

右の図のベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ について、次の各問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ をそれぞれ成分表示しなさい。

(2) $\left|\overrightarrow{a}\right|$、$\left|\overrightarrow{b}\right|$をそれぞれ求めなさい。



＜解説＞

ベクトルは始点によらないものでしたが、ベクトルの成分表示を考えるときには、始点は原点で考えなければいけません。

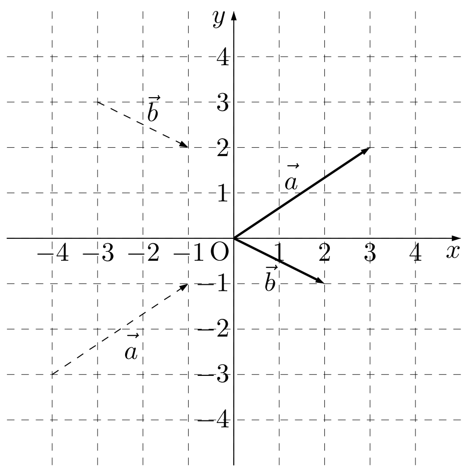
(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ の始点をそれぞれ原点に移して終点の座標を読み取れば、

$$\vec{a} = (3,\ 2), \qquad \vec{b} = (2,\ -1)$$

(2) 三平方の定理（2 点間の距離の公式）より、

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



2.2 ベクトルの成分による演算

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ を基本ベクトルとし、k を任意の実数とするとき、$\vec{a}=(a_1,\ a_2), \vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のように成分表示されたベクトルの和、差、実数倍には次のような関係が成り立ちます。

(i) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\vec{a}, \vec{b}$ を基本ベクトル表示すると、

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}, \qquad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

よって、成分表示すると、

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

(ii) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$\vec{a}, \vec{b}$ を基本ベクトル表示すると、

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}, \qquad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

よって、成分表示すると、

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$

(iii) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

$\vec{a}$ を基本ベクトル表示すると、

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

となるので、

$$\begin{aligned}k\vec{a}&=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})\\&=k(a_1\vec{e_1})+k(a_2\vec{e_2})\\&=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

よって、成分表示すると、

$$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$$

【例題 2 − 2】

$\vec{a}=(2,\ 1), \vec{b}=(3,\ -4), \vec{c}=(-2,\ 4)$ のとき、次のベクトルを成分で表し、その大きさを求めなさい。

(1) $3\vec{a}+2\vec{b}$　(2) $2\vec{a}-\vec{c}$　(3) $5\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$

＜解説＞

成分表示されたベクトルの計算は、同じ成分どうしの和や差、実数倍を考えます。

(i) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$　(ii) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$　(iii) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

(1)

$$\begin{aligned}3\vec{a}+2\vec{b}&=3(2,\ 1)+2(3,\ -4)\\&=(3\times 2,\ 3\times 1)+(2\times 3,\ 2\times(-4))\\&=(6,\ 3)+(6,\ -8)\\&=(6+6,\ 3+(-8))\\&=(12,\ -5)\end{aligned}$$

$$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$$

(2)

$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{c}&=2(2,\ 1)-(-2,\ 4)\\&=(4,\ 2)-(-2,\ 4)\\&=(4-(-2),\ 2-4)\\&=(6,\ -2)\end{aligned}$$

$$\left|2\vec{a}-\vec{c}\right|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$$

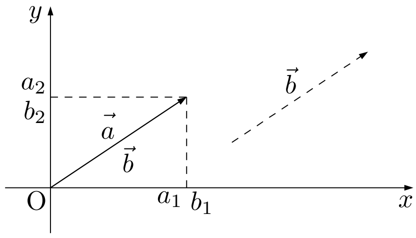
(3)

$$\begin{aligned}&5\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}\\&=5(2,\ 1)-2(3,\ -4)-2(-2,\ 4)\\&=(10,\ 5)+(-6,\ 8)+(4,\ -8)\\&=(10-6+4,\ 5+8-8)\\&=(8,\ 5)\end{aligned}$$

$$\left|5\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}\right|=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$$

2.3 ベクトルの相等

ベクトルは始点によらないのですが、ベクトルの成分表示を考える場合、原点 O を始点とする有向線分で考えなければいけません。そのため、2 つのベクトルが等しいとき、始点（原点）も終点も一致することになります。このことから、2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が等しくなるための条件は、



$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow (a_1,\ b_1)=(a_2,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

【例題 2 − 3】

$\vec{a}=(1,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ とします。このとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表しなさい。

(1) $\vec{p}=(8,\ 2)$　　(2) $\vec{q}=(-4,\ 2)$　　(3) $\vec{r}=(2,\ -1)$

＜解説＞

あるベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表すとき、$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ （$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立) であるので、 実数 s, t を用いて、$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$ という形で 1 通りに表すことができます。そこで、$s\vec{a}+t\vec{b}$ を成分表示すると、次のようになります。

$$\begin{aligned} s\vec{a}+t\vec{b} &= s(1,\ 4)+t(-1,\ 2) \\ &= (s,\ 4s)+(-t,\ 2t) \\ &= (s-t,\ 4s+2t) \end{aligned}$$

(1) $\vec{p}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いれば、

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$(8,\ 2) = (s - t,\ 4s + 2t)$$

このことから、

$$\begin{cases} s - t = 8 & \cdots\cdots ① \\ 4s + 2t = 2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

これを解いて（① + ② ÷ 2)、

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & s & - & t & = & 8 \\ +) & & 2s & + & t & = & 1 \\ \hline & & 3s & & & = & 9 \end{array}$$

$$s = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$
$$t = s - 8 = 3 - 8 = -5$$

よって、

$$\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$$

(2) $\vec{q}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いれば、

$$\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$(-4,\ 2) = (s - t,\ 4s + 2t)$$

このことから、

$$\begin{cases} s - t = -4 & \cdots\cdots ③ \\ 4s + 2t = 2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

これを解いて（③ + ④ ÷ 2）

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & s & - & t & = & -4 \\ +) & & 2s & + & t & = & 1 \\ \hline & & 3s & & & = & -3 \end{array}$$

$$s = -3 \times \frac{1}{3} = -1$$
$$t = s + 4 = -1 + 4 = 3$$

よって、

$$\vec{q} = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

(3) $\vec{r}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いれば、

$$\vec{r} = s\vec{a} + t\vec{b}$$
$$(2,\ -1) = (s - t,\ 4s + 2t)$$

このことから、

$$\begin{cases} s - t = 2 & \cdots\cdots ⑤ \\ 4s + 2t = -1 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

これを解いて（⑤ × 2 + ⑥)、

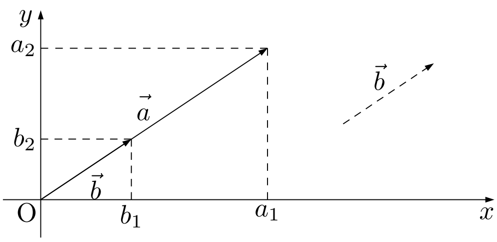
$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2s & - & 2t & = & 4 \\ +) & & 4s & + & 2t & = & -1 \\ \hline & & 6s & & & = & 3 \end{array}$$

$$s = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$t = s - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

よって、

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$$

2.4 ベクトルの平行



2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行になるための条件は、

$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \quad (\vec{b} = k\vec{a})$ となる実数 k が存在する

でした。このとき、$\vec{a} = (a_1,\ a_2), \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると、

$$(a_1,\ a_2) = k(b_1,\ b_2)$$

$$(a_1,\ a_2) = (kb_1,\ kb_2)$$

このことから、

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 & \cdots\cdots\ ① \\ a_2 = kb_2 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

となります。②の左辺と右辺を入れ替えると、

$$kb_2 = a_2$$

となるので、この式と①の左辺どうし、右辺どうしを掛けると、

$$a_1 \cdot kb_2 = a_2 \cdot kb_1$$

$$a_1b_2 = a_2b_1 \ \cdots\cdots\ ③$$

という関係が成り立つことがわかります。このことから、ベクトルを成分表示したときの平行条件は、

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff a_1b_2 = a_2b_1$$

となります。

また、③の式をさらに変形すると、

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

と表すことができます。2 つのベクトルが平行であれば、それぞれのベクトルの傾きを考えたとき、その傾きは等しいはずです。そのため、座標平面上で 2 つのベクトルの始点を原点 O にそろえたとき、それぞれのベクトルの傾きが等しければ、2 つのベクトルが平行であることを表している式だと考えることができます。

【例題 2 − 4】

次の 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ が平行になるように、x の値を定めなさい。

(1) $\vec{a} = (2,\ 1),\ \ \vec{b} = (x,\ 5)$

(2) $\vec{a} = (x,\ 1),\ \ \vec{b} = (x,\ -3)$

＜解説＞

(1)

$$1 \times x = 2 \times 5$$

$$x = 10$$

(2)

$$(1 - x^2) \times (-3) = 9 \times 1$$

$$x^2 - 1 = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

$$x^2 = 3 + 1 = 4$$

$$x = \pm 2$$

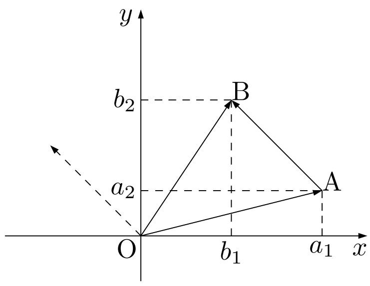
2.5　点の座標とベクトル

座標平面上に 2 点 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$ があるとき、$\overrightarrow{AB}$ は、原点 O を基準にして、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

のように分解することができるので、これを成分を用いれば、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2) \\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)\end{aligned}$$



と表すことができます。さらに、ベクトルの大きさ $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ は、各成分の平方の和で求められるので、

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

となります。

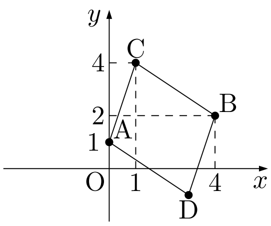
【例題 2 − 5】

平行四辺形の 4 つの頂点のうち 3 点が A(0, 1), B(4, 2), C(1, 4) であるとき、残りの 1 点 D の座標をベクトルを用いて求めなさい。

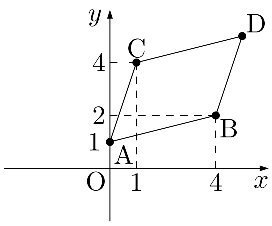
＜解説＞

問題文の条件から、次の 3 つの場合の平行四辺形が考えられます。

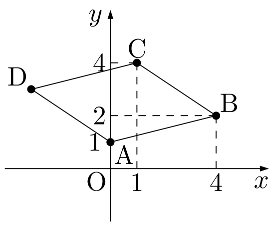
(ｉ) 平行四辺形 ADBC



(ii) 平行四辺形 ABDC



(iii) 平行四辺形 ABCD

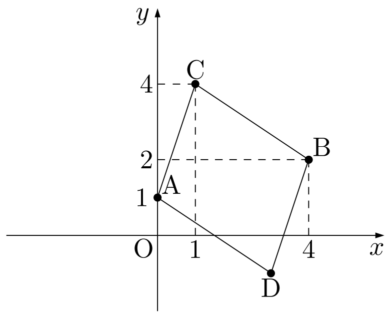


また、平行四辺形になるための条件は、次の 5 つの場合がありますが、2 つのベクトルが等しい場合、向きと大きさ、つまり、平行で長さが等しいことを示すことができます。そのため、⑤の条件を用います。

① 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行であるとき（定義）
② 2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しいとき
③ 2 組の向かい合う角がそれぞれ等しいとき
④ 対角線がそれぞれの中点で交わるとき
⑤ 1 組の向かい合う辺が等しくて平行であるとき

D$(x,\ y)$ とします。

(ⅰ) 平行四辺形 ADBC



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$(x-0,\ y-1) = (4-1,\ 2-4)$$

$$(x,\ y-1) = (3,\ -2)$$

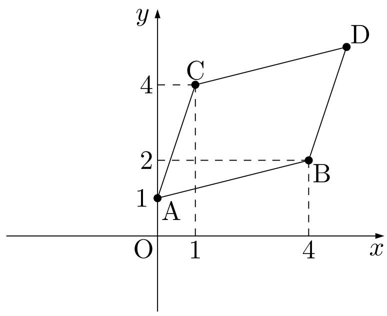
$$x = 3$$

$$y-1 = -2$$

$$y = -2+1 = -1$$

よって、D$(3,\ -1)$

(ⅱ) 平行四辺形 ABDC



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

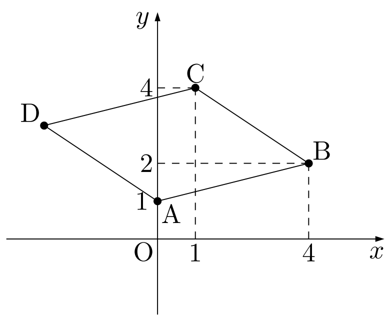
$$(4,\ 1) = (x-1,\ y-4)$$

$$x-1 = 4 \qquad y-4 = 1$$

$$x = 5 \qquad y = 5$$

よって、D$(5,\ 5)$

(ⅲ) 平行四辺形 ABCD



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

$$(4,\ 1) = (1-x,\ 4-y)$$

$$1-x = 4 \qquad 4-y = 1$$

$$x = -3 \qquad y = 3$$

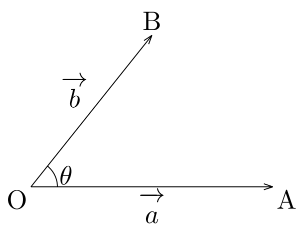
よって、D$(-3,\ 3)$

3　ベクトルの内積

3.1　内積の定義

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



となるように点 O, A, B をとったとき、∠AOB の大きさ θ を、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**といいます。ただし、θ の範囲は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とします。

このとき、

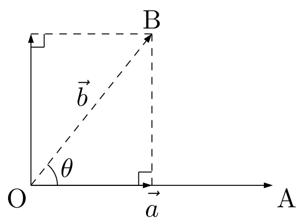
$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表します。つまり、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

となります。

ベクトルは向きと大きさをもつ量ですが、ベクトルの内積は、向きをそろえて大きさのみに着目して積をとったものだと考えることができます。
右図のように、2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積を考える場合、$\vec{a}, \vec{b}$ のどちらかに向きをそろえます。ここでは $\vec{a}$ にそろえることを考えると、$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と同じ向きとその垂直方向に（$\vec{b}$ が長方形の対角線となるように）分解して、向きをそろえることができた 2 つのベクトルの大きさの積



$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

が $\vec{a}, \vec{b}$ の内積であると考えることができます。そのため、ベクトルの内積はベクトルではなく実数となります。

また、$\vec{a}$、$\vec{b}$ のいずれかが $\vec{0}$ であるときには、$\vec{a}$、$\vec{b}$ の内積は、

$$\vec{0}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0$$

のように定めます。

【例題 3 − 1】

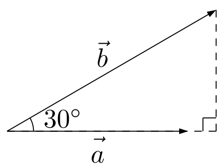
次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めなさい。ただし、θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角とします。

(1) $|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \theta = 30^\circ$　　(2) $|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \theta = 60^\circ$

＜解説＞

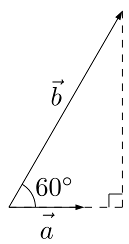
(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ$$
$$=3\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$



(2)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$$
$$=1\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$



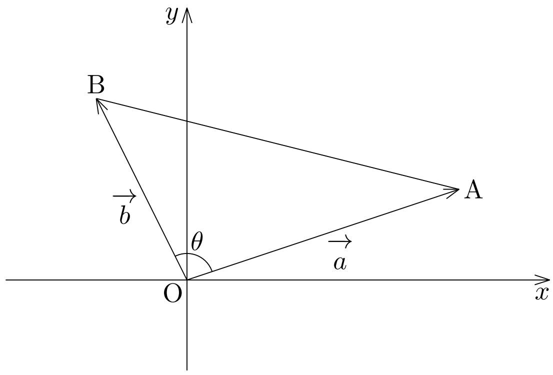
3.2 内積の成分表示

$\vec{a}$、$\vec{b}$ の成分表示が、

$$\vec{a}=(a_1,a_2),\quad \vec{b}=(b_1,b_2)$$

となるベクトルの内積を成分で表示することを考えます。

そこで右図のように、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \angle\mathrm{AOB}=\theta$ となる $\triangle\mathrm{OAB}$ を考えます。



$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を使うと、

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$

となり、また、

$$\mathrm{OA}=|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

$$\mathrm{OB}=|\vec{b}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

であるので、内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}\\&=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}\\&=\frac{1}{2}\{({a_1}^2+{a_2}^2)+({b_1}^2+{b_2}^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2\}\\&=\frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2+{b_1}^2+{b_2}^2-{b_1}^2+2a_1b_1-{a_1}^2-{b_2}^2+2a_2b_2-{a_2}^2)\\&=a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

と表すことができます。

【例題 3 − 2】

次のベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ の内積を求めなさい。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3),\ \vec{b}=(4,\ 2)$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1),\ \vec{b}=(\sqrt{3},\ -1)$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=-2\times4+3\times2\\&=-8+6=-2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times(-1)\\&=3-1=2\end{aligned}$$

3.3 ベクトルのなす角

ベクトルで角に関する関係式は、すでに学習した内積の式しか存在しません。そのため、ベクトルのなす角に関する問題が出てきた場合には、内積の式を利用します。

【例題 3 − 3】

次のベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

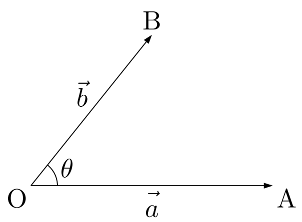
(1) $\vec{a} = (3,\ 4),\ \vec{b} = (7,\ 1)$　　(2) $\vec{a} = (-2,\ 1),\ \vec{b} = (6,\ -3)$

＜解説＞

右の図のような $\vec{a}, \vec{b}$ について、$\vec{a} = (a_1,\ a_2), \vec{b} = (b_1,\ b_2), \vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、内積の式から、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$



と導出することができるので、この式を公式として利用します。
また、ベクトルのなす角は $0° \leqq \theta \leqq 180°$ という条件があるので、その点に注意します。

(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\times 7 + 4\times 1 = 25$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{25}{5\times 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より

$$\theta = 45°$$

(2)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times 0 + 2\sqrt{3}\times(-5) = -10\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-10\sqrt{3}}{4\times 5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より

$$\theta = 150°$$

3.4　ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角が 90° であるとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい、

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

と表します。このとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を考えると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

となります。また逆に、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 0$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないので、

$$|\vec{a}| \fallingdotseq 0, \quad |\vec{b}| \fallingdotseq 0$$

すると、

$$|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 0$$

より、

$$\cos \theta = 0$$

となります。$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるので、

$$\theta = 90^\circ$$

よって、$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}, \quad \vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$ のとき、

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

となります。また、これを成分表示で表すと、$\vec{a} = (a_1,\ a_2), \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ として、

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

となります。

【例題 3 − 4】

次の 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直になるように、x の値を定めなさい。

(1) $\vec{a} = (2,\ 1), \vec{b} = (x,\ 5)$　　(2) $\vec{a} = (x,\ 1), \vec{b} = (x,\ -3)$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ 2 \times x + 1 \times 5 &= 0 \\ 2x + 5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ x \times x + 1 \times (-3) &= 0 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

3.5 内積の性質

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ となる任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と、任意の実数 k を用いると、ベクトルの内積には次のような性質が成り立ちます。

(i) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は $0°$ であるので、

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°=\left|\vec{a}\right|^2$$

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\\&=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

(iii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ となるので、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\&=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2\\&=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

(iv) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$ となるので、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

(v) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\quad(=k\vec{a}\cdot\vec{b})$

$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ となるので、

$$\begin{aligned}(k\vec{a})\cdot\vec{b}&=ka_1b_1+ka_2b_2\\&=k(a_1b_1+a_2b_2)\\&=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

$k\vec{b}=(kb_1,\ kb_2)$ となるので、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(k\vec{b})&=ka_1b_1+ka_2b_2\\&=k(a_1b_1+a_2b_2)\\&=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

【例題 3 − 5】

$\left|\vec{a}\right|=3,\quad\left|\vec{b}\right|=2,\quad \vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $120°$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$　　(3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ \\ &= 3\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\end{aligned}$$

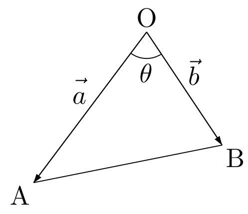
(2)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 3^2+(-3) = 6\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \\ &= 3^2+2\times(-3)+2^2 = 7\end{aligned}$$

3.6　内積と三角形の面積



ここでは、右の図のような三角形の面積をベクトルを用いて求めることを考えます。そこで、△OAB の面積を S, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ (ただし、$0^\circ<\theta<180^\circ$) とすると、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\end{aligned}$$

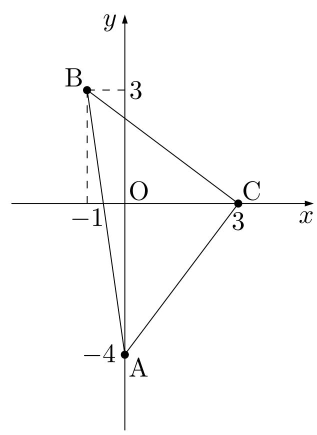
さらに、$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ としてベクトルの成分を用いると、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2-{a_1}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2-{a_2}^2{b_2}^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2)^2-2(a_1b_2)(a_2b_1)+(a_2b_1)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|\,a_1b_2-a_2b_1\,|\end{aligned}$$

【例題 3 − 6】

3 点 A(0, −4), B(−1, 3), C(3, 0) があるとき、△ABC の面積 S を求めなさい。

＜解説＞



点 B を始点としてベクトルを考えると、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(0-(-1),\ -4-3)=(1,\ -7)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(3-(-1),\ 0-3)=(4,\ -3)$$

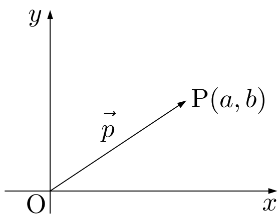
このことから、求める三角形の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}|\,1\times(-3)-(-7)\times4\,|=\frac{25}{2}$$

4　位置ベクトル

4.1　位置ベクトル

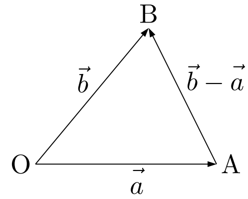
平面上に基準となる点 O を定めると、平面上の任意の点 P は、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ というベクトル $\vec{p}$ によって表すことができます。この $\vec{p}$ を点 O に関する点 P の**位置ベクトル**といいます。点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを $\mathrm{P}(\vec{p})$ のように書き表します。また、位置ベクトルを座標平面上で考えるとき、位置ベクトルの基準を原点 O とすれば、点 P の座標と点 P の位置ベクトルの成分表示とは一致することになります。



そして、2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$ について、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$$

という関係が成り立ちます。

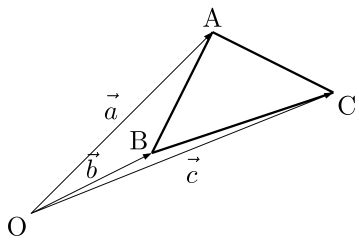


【例題 4 − 1】

三角形 ABC の頂点 A,B,C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とします。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しなさい。　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を求めなさい。

<解説>



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a} - \vec{c}$

(2) (1) より、

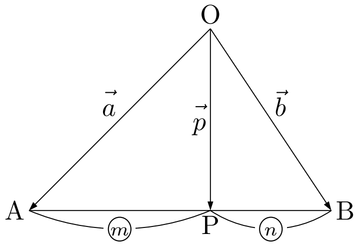
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{0}$$

また、位置ベクトルを用いずに、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0} \end{aligned}$$

として計算することもできます。

4.2　内分点の位置ベクトル



2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$) を結ぶ線分の内分点の位置ベクトルを考えます。
そこで、線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) とすると、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AB}=m:(m+n)$$

となるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \vec{p}-\vec{a}&=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\\ \vec{p}&=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a}\\ &=\frac{m\vec{b}-m\vec{a}+(m+n)\vec{a}}{m+n}\\ &=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\end{aligned}$$

となり、座標平面上で内分点の座標を表したときと同じ形になっています。
　特に、線分 AB の中点の位置ベクトルは、線分 AB を 1 : 1 に内分すると考えて、

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

となります。

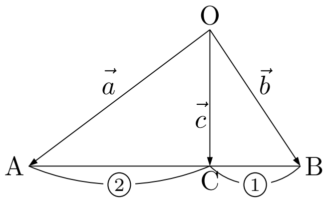
【例題 4 − 2】

2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$) を両端とする線分 AB について、次の点の位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ で表しなさい。

(1) 2 : 1 の比に内分する点 C ($\vec{c}$)　　(2) 1 : 3 の比に内分する点 D ($\vec{d}$)

＜解説＞

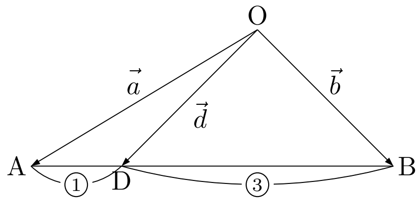
(1) 図に表すと下のようになります。



$$\vec{c}=\frac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

$$\left(=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

(2) 図に表すと下のようになります。



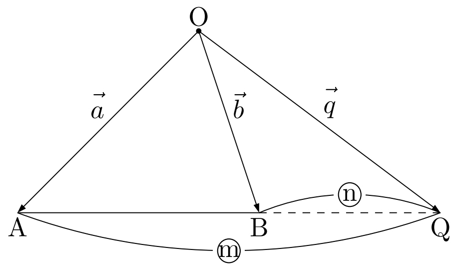
$$\vec{d}=\frac{3\vec{a}+1\vec{b}}{1+3}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$$

$$\left(=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)$$

4.3 外分点の位置ベクトル

2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$) を結ぶ線分の外分点の位置ベクトルを考えます。そこで、線分 AB を $m:n$ $(m>n)$ に外分する点を Q($\vec{q}$) とすると、

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{AB}=m:(m-n)$$



となるので、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\
\vec{q}-\vec{a} &= \frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})\\
\vec{q} &= \frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a}\\
&= \frac{m\vec{b}-m\vec{a}+(m-n)\vec{a}}{m-n}\\
&= \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n} \quad \left(=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}\right)
\end{aligned}$$

このようにして位置ベクトルを用いると、内分点だけでなく外分点も、座標のときに導出した公式と同様にして表すことができることになります。

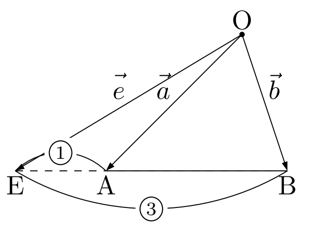
【例題 4 − 3】

2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$) を両端とする線分 AB について、次の点の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ で表しなさい。

(1) $1:3$ の比に外分する点 E($\vec{e}$)　　(2) $4:3$ の比に外分する点 F($\vec{f}$)

＜解説＞

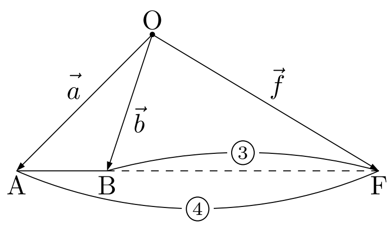
(1) 図に表すと下のようになります。



$$\vec{e}=\frac{3\vec{a}-1\vec{b}}{-1+3}=\frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}$$

$$\left(=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

(2) 図に表すと下のようになります。



$$\vec{f}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{b}$$

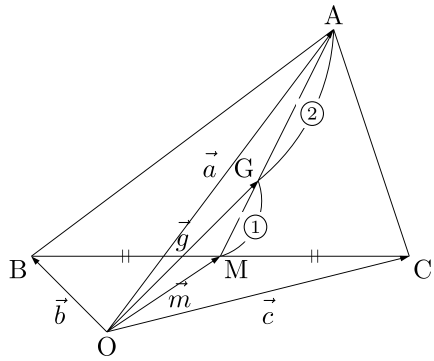
4.4 三角形の重心の位置ベクトル

3 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC の辺 BC の中点を M($\vec{m}$)、△ABC の重心を G($\vec{g}$) とします。このとき、位置ベクトルを用いると、辺 BC の中点は、

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

と表すことができます。さらに、重心は、中線を 2 : 1 の比に内分する点になるので、

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GM} = 2 : 1$$



このことから、重心を位置ベクトルを用いると、

$$\vec{g} = \frac{1\vec{a}+2\vec{m}}{2+1} = \frac{\vec{a}+2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

のように表すことができます。

【例題 4 − 4】

3 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC で、辺 AB, BC, CA の中点をそれぞれ L, M, N とします。次の問いに答えなさい。

(1) 3 点 L, M, N の位置ベクトル $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しなさい。

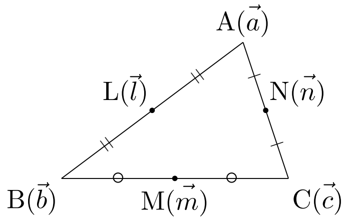
(2) 点 M について、点 A と対称な点 D の位置ベクトル $\vec{d}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しなさい。

(3) △ABC の重心 G と △LMN の重心 G′ が一致することを証明しなさい。

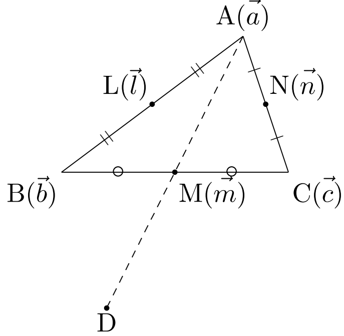
<解説>

(1) 3 点 L, M, N は、辺 AB, BC, CA の中点なので、

$$\vec{l} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$



(2) 点 M について点 A と対称な点 D は、右図のような点になります。図からもわかるように、点 M は AD の中点であると考えることができるので、

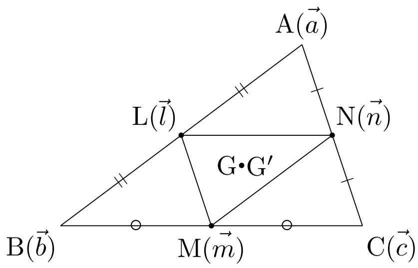


$$\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$$

このことから、点 D の位置ベクトル $\vec{d}$ は、

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} \\
2\vec{m} &= \vec{a}+\vec{d} \\
\vec{d} &= 2\vec{m}-\vec{a} \\
&= 2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)-\vec{a} \\
&= -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}
\end{aligned}$$

(3) 重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると、



$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

また、重心 G′ の位置ベクトルを $\vec{g'}$ とすると、(1) より、

$$\begin{aligned}
\vec{g'} &= \frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{2}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}
\end{aligned}$$

よって、

$$\vec{g} = \vec{g'}$$

となるので、△ABC の重心 G と △LMN の重心 G′ は一致する。

5　ベクトル方程式

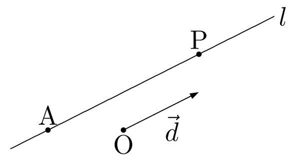
5.1　直線のベクトル方程式

直線は

(i) 通る 1 点と傾き　　(ii) 通る 2 点

のいずれかが与えられると定まります。そこで、それぞれの場合において直線を位置ベクトルを用いて表すことを考えます。

まずは、定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 l について考えます。直線 l 上に任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{d}$ は平行であるので、



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$$

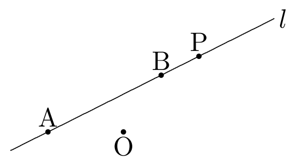
となる実数 t が存在します。このことから、

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$
$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

という関係が成り立ち、これを直線 l の**ベクトル方程式**といいます。また、このとき実数 t を**媒介変数**、$\vec{d}$ を直線 l の**方向ベクトル**といいます。

次に、異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線 l について考えます。

直線 l 上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の実数倍、つまり、t を実数として、



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

という関係が成り立ちます。この式から、

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

となります。通る 1 点と傾きのところで導出したベクトル方程式と比べると、

$$\vec{d} \quad \longrightarrow \quad \vec{b} - \vec{a}$$

となっています。このことから、異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線の方程式は、

点$\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、方向ベクトルを$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

とする式を考えればよいことになります。

さらに、

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$
$$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

となり、$1 - t = s$ とすると、

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad （ただし、s + t = 1）$$

となります。つまり、

- $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ （t は実数）
- $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （ただし、$s,\ t$ は $s+t=1$ となる実数）

が、異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式になります。

【例題 5 − 1】

次の直線の方程式を、ベクトルを用いて求めなさい。

(1) 点 $(3,\ 5)$ を通り、ベクトル $\vec{d}=(1,\ 2)$ に平行な直線

(2) 2 点 $(-1,\ 4),\ (5,\ 2)$ を通る直線

＜解説＞

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とします。

(1) 通る 1 点 $(3,\ 5)$ と方向ベクトル $\vec{d}=(1,\ 2)$ が与えられているので、直線のベクトル方程式から、

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(3,\ 5)+t(1,\ 2)\\&=(3+t,\ 5+2t)\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases}x=3+t & \cdots\cdots ①\\ y=5+2t & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

① × 2 − ② より、

$$2x-y-1=0$$

(2) 2 点 $(-1,\ 4),\ (5,\ 2)$ を通るので、直線のベクトル方程式から、

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(1-t)(-1,\ 4)+t(5,\ 2)\\&=(-1+t,\ 4-4t)+(5t,\ 2t)\\&=(-1+6t,\ 4-2t)\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases}x=-1+6t & \cdots\cdots ③\\ y=4-2t & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

③ + ④ × 3 より、

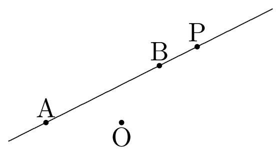
$$x+3y-11=0$$

5.2 終点の存在範囲

ここでは、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t は実数) を満たすベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の終点 P がどの範囲に存在しているのかを考えます。

(i) $s + t = 1$ のとき

$s = 1 - t$ であるので、



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

となり、点 P は直線 AB 上にあることがわかります。

(ii) $s + t = 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$ のとき

$s + t = 1$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表されるので、点 P は直線 AB 上にありますが、そこからさらに、$s \geqq 0,\ t \geqq 0$ という条件が加わると、

$$\begin{cases}1 - t \geqq 0\\ t \geqq 0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}t \leqq 1\\ t \geqq 0\end{cases} \longrightarrow 0 \leqq t \leqq 1$$

のように、$0 \leqq t \leqq 1$ という条件が加わっていることになります。このことから、点 P は線分 AB 上にあることがわかります。

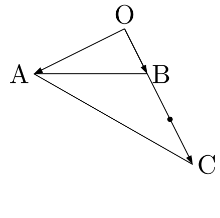
【例題 5 − 2】

△OAB と点 P において、点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとする。実数 s, t が次の式を満たすとき、点 P の存在する範囲を図示しなさい。

(1) $3s + t = 3$ (2) $3s + t = 3,\ \ s \geqq 0,\ \ t \geqq 0$ (3) $2s + 3t = 6,\ \ s \geqq 0,\ \ t \geqq 0$

＜解説＞

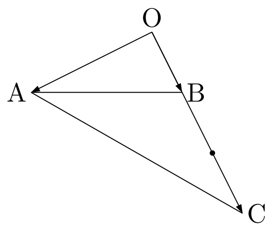
(1) $3s+t = 3$ という条件の右辺を 1 にするために、両辺を 3 で割ると、$s+\dfrac{1}{3}t = 1$ となります。そこで、$\dfrac{1}{3}t = t'$ とすると、$s + t' = 1$ と表すことができます。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}t(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \qquad (\text{ここで、}3\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\text{とすると})\\ &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

よって、点 P は右図の直線 AC 上に存在します。

(2) (1) より、$\dfrac{1}{3}t = t'$, $3\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると、

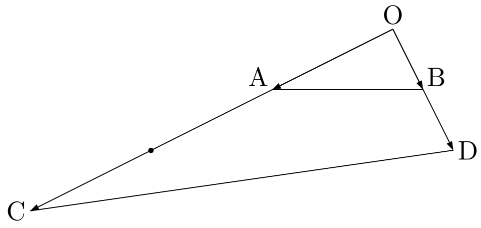


$$s + t' = 1, \quad s \geqq 0, \quad t' \geqq 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となります。このことから、点 P は右図の線分 AC 上に存在します。

(3) $2s + 3t = 6$ より、両辺を 6 で割ると、



$$\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t = 1$$

となるので、$\dfrac{1}{3}s = s'$, $\dfrac{1}{2}t = t'$ とすると、

$$s' + t' = 1$$

また、$\dfrac{1}{3}s \geqq 0$, $\dfrac{1}{2}t \geqq 0$ であるので、

$$s' \geqq 0, \quad t' \geqq 0$$

そして、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{1}{3}s(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{1}{2}t(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\
&= s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \qquad (\text{ここで、}3\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}\text{とすると}) \\
&= s'\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OD}}
\end{aligned}$$

となるので、点 P は右図の線分 CD 上に存在します。

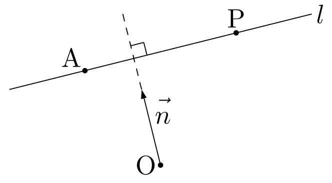
5.3　法線ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線

定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り、$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 l について考えます。

直線 l 上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ は垂直であるので、

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{または} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$



という関係が成り立ち、これが点 A を通り、$\vec{n}$ に垂直な直線 l のベクトル方程式になります。このとき、$\vec{n}$ を直線 l の**法線ベクトル**といいます。

また、$\vec{p} = (x,\ y),\ \ \vec{n} = (a,\ b),\ \ \vec{a} = (x_1,\ y_1)$ とすると、

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1,\ y - y_1)$$

となるので、

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0 \longrightarrow ax + by + c = 0$$

となり、$-ax_1 - by_1$ は定数になるので、定数 c を用いて $-ax_1 - by_1 = c$ とすれば、

$$ax + by + c = 0$$

となります。

【例題 5 − 3】

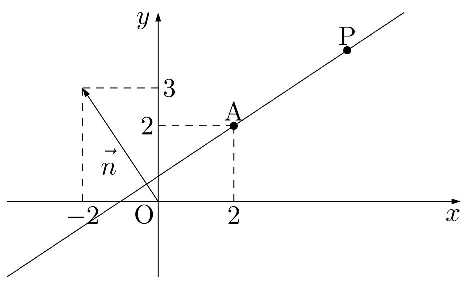
点 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (-2,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を、ベクトルを用いて求めなさい。

＜解説＞

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - 2,\ y - 2)$$

となり、直線上の任意の点 P は、$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ という関係が成り立つので、



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

$$-2(x - 2) + 3(y - 2) = 0$$

$$-2x + 4 + 3y - 6 = 0$$

$$-2x + 3y - 2 = 0$$

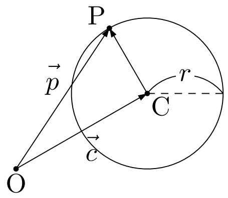
$$2x - 3y + 2 = 0$$

5.4 円のベクトル方程式

円周上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とします。

(ｉ) 中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$、半径 r の円のベクトル方程式：$\left|\vec{p}-\vec{c}\right| = r$

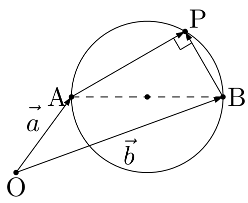
円は、ある 1 点（円の中心）から等距離にある点の集まりであるので、円の中心 C から円周上の任意の点 P までの距離は、半径 r で一定になります。このことから、



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$$
$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right| = r$$

(ii) 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})$ を直径とする円のベクトル方程式：$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$

点 P が点 A, B 以外にあるとき $\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$、つまり、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ となります。また、点 P が点 A のときは、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ となり、点 P が点 B のときは、$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}} = \vec{0}$ となるので、このことから、



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$
$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b}) = 0$$

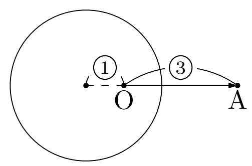
【例題 5 − 4】

定点 O, A, B と動点 P があります。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とするとき、次の式で表される点 P はある円の周上にあります。その円の中心と半径を求めなさい。
ただし、$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0},\ \vec{b} \fallingdotseq \vec{0},\ \vec{a} \nparallel \vec{b}$ とします。

(1) $\left|3\vec{p}+\vec{a}\right| = 6$　　(2) $\left|2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}\right| = 8$　　(3) $\vec{p}\cdot\vec{p} = \vec{p}\cdot\vec{b}$

＜解説＞

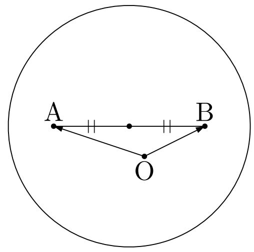
(1) 与えられた式は、



$$\left|3\vec{p}+\vec{a}\right| = 6$$
$$\left|3\left(\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)\right| = 6$$
$$3\left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right| = 6$$
$$\left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\right| = 2$$
$$\left|\vec{p}-\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\right| = 2$$

と変形できます。このことから、円の中心の位置ベクトルが $-\dfrac{1}{3}\vec{a}$ となるので、右図のように、線分 OA を 1 : 4 に外分する点が円の中心で、半径は 2 となります。

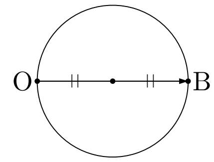
(2) 与えられた式は、



$$\left|2\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}\right|=8$$
$$\left|2\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\right|=8$$
$$2\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=8$$
$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=4$$

と変形できます。このことから、円の中心の位置ベクトルが $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となるので、右図のように、線分 AB の中点が円の中心で、半径は 4 となります。

(3) 与えられた式は、



$$\vec{p}\cdot\vec{p}=\vec{p}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{b}=0$$
$$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$
$$(\vec{p}-\vec{0})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

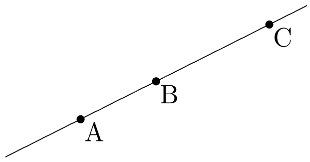
と変形できます。このことから、線分 OB が円の直径になるので、円の中心は線分 OB の中点となり、半径は線分 OB の長さの半分ということになります。

6　平面図形への応用

6.1　共線条件

ここでは、3 点が一直線上にあるための条件である**共線条件**について考えます。

右の図のように、3 点 A, B, C が一直線上にあるとき、点 C（1 点）直線 AB（残りの 2 点を結ぶ直線上にあることになります。このことをベクトルを用いて表すと、



$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となる実数 k が存在する

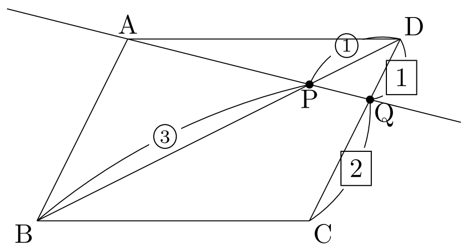
ということができ、これが 3 点が一直線上にあるための必要十分条件になります。

【例題 6 − 1】

平行四辺形 ABCD の対角線 BD を 3 : 1 の比に内分する点を P、辺 CD を 2 : 1 に内分する点を Q とするとき、3 点 A, P, Q は一直線上にあることを証明しなさい。

<解説>

問題文の様子を図にあらわすと右のようになります。



ここで、基準となる 2 つのベクトルとして、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$$

とします。このとき、点 P は線分 BD を 3 : 1 に内分するので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+1} = \frac{\vec{b}+3\vec{d}}{4}$$

また、点 Q は辺 CD を 2 : 1 に内分するので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2+1}$$

$$= \frac{(\vec{b}+\vec{d})+2\vec{d}}{3} = \frac{\vec{b}+3\vec{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}}$$

$$= \vec{d} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

このことから、

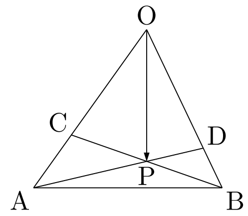
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\vec{b}+3\vec{d}}{4} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

となるので、3 点 A, P, Q は一直線上にある。

6.2　線分の交点の位置ベクトル①

2 つの線分の交点の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を、「2 通りの方法で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表して係数比較する方法」を用いた求め方について学習します。

右の図のような線分 AD と BC との交点 P の位置ベクトルは、次のような手順で求めることができます。



(i) 2 線分の交点 P を 2 線分上の分点と考えて、
適当な文字を利用してその比を表す。

（例）$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=s:(1-s)$,　　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$

(ii) (i) の比を利用して、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を 2 通りの方法で表す。

- 線分 AD : $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$
- 線分 BC : $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(iii) 係数比較して $s,\ t$ の連立方程式を作り、$s,\ t$ の値を求める。

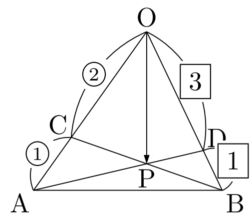
(iv) (iii) の $s,\ t$ の値から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求める。

【例題 6 − 2】

△OAB において、辺 OA、辺 OB をそれぞれ 2 : 1, 3 : 1 の比に内分する点を C, D とし、線分 AD, BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

＜解説＞

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=s:(1-s)$, $\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$ とすると、



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{4}s\vec{b}\ \cdots\cdots\ ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\ \cdots\cdots\ ②$$

のように表すことができます。$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$, $\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるので、①, ②より、

$$\begin{cases} 1-s=\dfrac{2}{3}t \\ \dfrac{3}{4}s=1-t \end{cases}$$

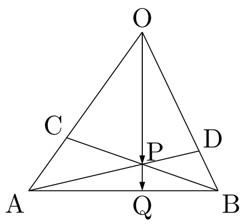
この連立方程式を解くと、

$$\begin{cases} s=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

6.3 線分の交点の位置ベクトル②



2 つの線分の交点の位置ベクトルを求める方法の 1 つに、「2 通りの方法で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表して係数比較する方法」がありました。このとき、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=s:(1-s), \qquad \mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$$

のようにして線分の比を適当な文字で表して求めましたが、その線分の比がいくつになるのかを求めることができれば、わざわざ適当な文字で表す必要はありません。そこで、その線分の比を求めるために、「チェバの定理」や「メネラウスの定理」を利用することができます。

(i) チェバの定理

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}=1$$

(ii) メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}=1, \qquad \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1$$

【例題 6 − 3】

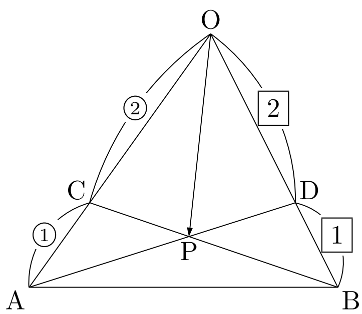
△OAB において、辺 OA, OB を 2 : 1 の比に内分する点をそれぞれ C, D とし、線分 AD と BC の交点を P、直線 OP と辺 BC との交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき、次の問いに答えなさい。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表しなさい。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表しなさい。

＜解説＞

(1) △OAD と直線 BC についてメネラウスの定理を用いると、



$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1$$
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{1}{3}=1$$
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{3}{2}$$

このことから、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=3:2$$

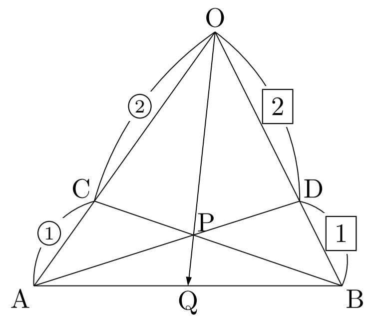
であることがわかり、また、

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

となるので、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3+2}$$
$$=\frac{2\vec{a}+2\vec{b}}{5} \quad \left(=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$$

(2) △OAB についてチェバの定理を用いると、



$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}=1$$
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}=1$$

このことから、

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=1:1$$

であることがわかるので、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\quad\left(=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

と求めることができます。

また、点 Q は直線 OP 上の点であるので、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

と表すことができます。つまり、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{2}{5}k\vec{b}$$

となり、さらに、点 Q は直線 AB 上の点でもあるので、

$$\frac{2}{5}k+\frac{2}{5}k=1$$

とならなければいけません。このことから、

$$k=\frac{5}{4}$$

となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

のようにして求めることもできます。

6.4 等式の証明

等式を証明するには、

(ⅰ) 左辺を変形して、右辺を導く　(ⅱ) 右辺を変形して、左辺を導く

(ⅲ) 両辺それぞれを変形して、同じ式を導く　(ⅳ) (左辺) − (右辺) = 0 を導く

という 4 つの方法がありました。どの方法を用いてもかまいませんが、(iv) の方法があらゆる問題に対応できるものになるのでお勧めしています。そのため、ベクトルを用いた等式の証明においても、(iv) を利用して証明しますが、「ベクトル」である場合には、

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \vec{0}$$

となることに注意してください。

【例題 6 − 4】

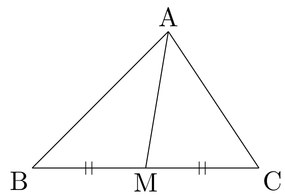
△ABC において、辺 BC の中点を M とする。このとき、次の等式が成り立つことをベクトルを用いて証明しなさい。

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

＜解説＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とすると、点 M は辺 BC の中点であるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$



このことから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\end{aligned}$$

と表すことができます。よって、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2) - 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)\\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2(\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right|^2)\\ &= \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 - 2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\\ &= \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 - \left(\frac{\left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \left|\vec{c}\right|^2}{2} + \frac{\left|\vec{c}\right|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \left|\vec{b}\right|^2}{2}\right)\\ &= \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 - (\left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2) = 0\end{aligned}$$

となるので、

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$