【数学 B】数列

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　等差数列

1.1　等差数列

数を順に一列に並べたものを**数列**といいます。自然数を小さい順に左から順に並べた数列は次のようになります。

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$

数列は一般に、

$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$

のように表され、これを数列 $\{a_n\}$ のように表します。このとき、a_1 の「1」のように、a の右下に書かれた番号を**添字**といいい、数列における各数を**項**といいます。数列 $\{a_n\}$ において、

a_1: 第 1 項　または　**初項**

a_2: 第 2 項

a_3: 第 3 項

$\vdots$

a_n: 第 n 項　または　**一般項**

$\vdots$

といいます。

項の個数が限りなく多く無限である数列を**無限数列**といい、項の個数が有限である数列を**有限数列**といいます。有限数列では、一番最後の項を**末項**といいます。

次のように、初項に一定の数 (d) を次々と加えて得られる数列を**等差数列**といいます。

$$\overset{+d}{\curvearrowright}\ \overset{+d}{\curvearrowright}\ \overset{+d}{\curvearrowright}\ \overset{+d}{\curvearrowright}$$
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots$$

このとき、隣り合う 2 項の差は一定になり、その差 (d) を**公差**といいます。

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = d$

【例題 1 − 1】

1. 次の数列は等差数列です。$\boxed{}$ にあてはまる数を入れなさい。
   (1) $1,\ 3,\ \boxed{},\ 7,\ 9,\ \cdots$　　(2) $-9,\ \boxed{},\ -1,\ 3,\ 7,\ \cdots$
   (3) $-2,\ \boxed{},\ 8,\ 13,\ \boxed{},\ \cdots$　　(4) $\boxed{},\ \boxed{},\ 19,\ \boxed{},\ 31,\ \cdots$
2. 次の数列の初項から、第 5 項までを書きなさい。
   (1) 初項 : 2　公差 : 3　　(2) 初項 : 10　公差 : -3

＜解説＞

1. 等差数列になるので、隣り合う2項の差（公差）は一定になります。

(1) 隣り合う2項の差を求めると、

$$3-1=9-7=2$$

となるので、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1, \arrow[r, bend left, "+2"] & 3, \arrow[r, bend left, "+2"] & \boxed{5}, \arrow[r, bend left, "+2"] & 7, \arrow[r, bend left, "+2"] & 9, \arrow[r, bend left, "+2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

(2) 隣り合う2項の差を求めると、

$$3-(-1)=7-3=4$$

となるので、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] -9, \arrow[r, bend left, "+4"] & \boxed{-5}, \arrow[r, bend left, "+4"] & -1, \arrow[r, bend left, "+4"] & 3, \arrow[r, bend left, "+4"] & 7, \arrow[r, bend left, "+4"] & \cdots \end{tikzcd}$$

(3) 隣り合う2項の差を求めると、

$$13-8=5$$

となるので、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] -2, \arrow[r, bend left, "+5"] & \boxed{3}, \arrow[r, bend left, "+5"] & 8, \arrow[r, bend left, "+5"] & 13, \arrow[r, bend left, "+5"] & \boxed{18}, \arrow[r, bend left, "+5"] & \cdots \end{tikzcd}$$

(4) 公差を d とすると、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \boxed{}, \arrow[r, bend left, "+d"] & \boxed{}, \arrow[r, bend left, "+d"] & 19, \arrow[r, bend left, "+d"] & \boxed{}, \arrow[r, bend left, "+d"] & 31, \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots \end{tikzcd}$$

となるので、

$$2d=31-19=12$$
$$d=6$$

このことから、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \boxed{7}, \arrow[r, bend left, "+6"] & \boxed{13}, \arrow[r, bend left, "+6"] & 19, \arrow[r, bend left, "+6"] & \boxed{25}, \arrow[r, bend left, "+6"] & 31, \arrow[r, bend left, "+6"] & \cdots \end{tikzcd}$$

2. (1) 最初の項が2で、そこから3ずつ増やして5つの数を並べればよいので、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 2, \arrow[r, bend left, "+3"] & 5, \arrow[r, bend left, "+3"] & 8, \arrow[r, bend left, "+3"] & 11, \arrow[r, bend left, "+3"] & 14 \end{tikzcd}$$

(2) 最初の項が10で、そこから -3 ずつ増やして（3ずつ減らして）5つの数を並べればよいので、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 10, \arrow[r, bend left, "-3"] & 7, \arrow[r, bend left, "-3"] & 4, \arrow[r, bend left, "-3"] & 1, \arrow[r, bend left, "-3"] & -2 \end{tikzcd}$$

1.2　等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとき、初項 a、公差 d とすると、

$$
\begin{tikzcd}
a_1, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_2, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_3, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_4, \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots\cdots, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_n, \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + d = a + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a + (n-1)d \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となるので、等差数列の一般項は、

$$a_n = a + (n-1)d \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となります。

【例題 1 − 2】

次の数列の初項、公差を求めなさい。また、その第 20 項と一般項を求めなさい。

(1) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$

(2) $-10,\ -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ \cdots$

(3) $-3,\ -7,\ -11,\ -15,\ -19,\ \cdots$

(4) $19,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ \cdots$

＜解説＞

(1) 初項：2、公差：$5 - 2 = 3$ となるので、

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\
&= 3n - 1 \\
a_{20} &= 3\cdot 20 - 1 = 59
\end{aligned}
$$

(2) 初項：-10、公差：$2 - (-1) = 3$ となるので、

$$
\begin{aligned}
a_n &= -10 + (n-1)\cdot 3 \\
&= 3n - 13 \\
a_{20} &= 3\cdot 20 - 13 = 47
\end{aligned}
$$

(3) 初項：-3、公差：$-7 - (-3) = -4$ となるので、

$$
\begin{aligned}
a_n &= -3 + (n-1)\cdot(-4) \\
&= -4n + 1 \\
a_{20} &= -4\cdot 20 + 1 = -79
\end{aligned}
$$

(4) 初項：19、公差：$7 - 10 = -3$ となるので、

$$
\begin{aligned}
a_n &= 19 + (n-1)\cdot(-3) \\
&= -3n + 22 \\
a_{20} &= -3\cdot 20 + 22 = -38
\end{aligned}
$$

1.3　等差中項

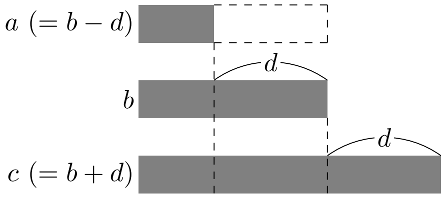
等差数列をなす 3 つの数の真ん中の項を**等差中項**といいます。a, b, c という 3 つの数が並ぶ等差数列があるとき、b が等差中項になります。

等差数列の隣り合う 2 項の差は等しいので、

$$b - a = c - b$$

という関係が成り立ちます。このことから、

$$\begin{aligned} b - a &= c - b \\ 2b &= a + c \\ b &= \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$



となり、右の図からもわかるように、a と c の平均を考えると、b と等しくなります。そのため、3 つの数が等差数列であるときは、次の関係を用いることが多くあります。

数列 $a,\ b,\ c$ が等差数列 $\Longleftrightarrow 2b = a + c$

【例題 1 − 3】

等差数列をなす 3 つの数があって、その和が 24、積が 480 であるとき、この 3 つの数を求めなさい。

＜解説＞

等差数列をなす 3 つの数を a, b, c とすると、

$$\begin{cases} a + b + c = 24 & \cdots\cdots ① \\ abc = 480 & \cdots\cdots ② \\ 2b = a + c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①, ③より、

$$b = 8$$

これを①, ②に代入すれば、

$$\begin{cases} a + c = 16 \\ ac = 60 \end{cases}$$

となるので、解と係数の関係から、a, c は、2 次方程式

$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

の 2 つの解になります。よって、

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 60 &= 0 \\ (x-6)(x-10) &= 0 \\ x &= 6,\ 10 \end{aligned}$$

$(a,\ c) = (6,\ 10)$　または、$(a,\ c) = (10,\ 6)$

このことから、求める 3 つの数は、

$6,\ 8,\ 10$

＜別解＞

公差を d、等差中項を b とすると、3 つの数は、$b-d,\ b,\ b+d$ と表すことができます。

$$\begin{cases} (b-d)+b+(b+d)=24 & \cdots\cdots\ ① \\ (b-d)b(b+d)=480 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

①より、

$$b=8$$

これを②に代入すれば、

$$\begin{aligned} 8(8-d)(8+d)&=480 \\ 64-d^2&=60 \\ d^2&=4 \\ d&=\pm 2 \end{aligned}$$

よって、3 つの数は、

6, 8, 10

1.4 等差数列の和の公式

初項 a、公差 d、項数 n の等差数列 $\{a_n\}$ の末項を l とし、初項から第 n 項までの和 S_n を考えます。S_n は、

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

のように表すことができますが、この S_n と足す順を逆にしたもの

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

との和を考えると、

$$\begin{array}{rccccc} & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n \\ S_n = & a & +(a+d) & +\cdots\cdots & +(l-d) & +l \\ +)S_n = & l & +(l-d) & +\cdots\cdots & +(a+d) & +a \\ \hline 2S_n = & (a+l) & +(a+l) & +\cdots\cdots & +(a+l) & +(a+l) \end{array}$$

となり、右辺は $a+l$ が n 個あるので、

$$2S_n = n(a+l)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

のように表すことができます。また、末項 l は、

$$l = a + (n-1)d$$

であるので、これを代入すると、

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

と表すこともでき、この 2 つの式が等差数列の和を求めるための公式になります。

【例題 1 − 4】

次の等差数列の和を求めなさい。

(1) 初項 12、末項 64 で、項数が 6

(2) 初項 6、公差 2 で、初項から第 18 項

＜解説＞

(1) 末項が与えられているので、等差数列の和の公式 $S_n = \dfrac{1}{2}n(a+l)$ を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 6(12+64) \\ &= 3 \cdot 76 = 228 \end{aligned}$$

(2) 公差が与えられているので、等差数列の和の公式 $S_n = \dfrac{1}{2}\{2a + (n-1)d\}$ を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 18\{2 \cdot 6 + (18-1) \cdot 2\} \\ &= 9 \cdot (12+34) \\ &= 9 \cdot 46 = 414 \end{aligned}$$

1.5 等差数列の和

【例題 1 − 5】

初項から第 5 項までの和が 85、初項から第 10 項までの和が 420 である等差数列があります。この数列の初項と公差を求めなさい。

＜解説＞

初項を a、公差を d、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_5 = \frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)d\} = 85$$

$$2a+4d = 34 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$S_{10} = \frac{1}{2}\cdot 10\{2a+(10-1)d\} = 420$$

$$2a+9d = 84 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

② − ① より、

$$5d = 50$$

$$d = 10$$

これを①に代入して、

$$2a+4\cdot 10 = 34$$

$$a+20 = 17$$

$$a = -3$$

以上より、求める初項と公差は、

初項：− 3,　公差：10

1.6 等差数列の和の最大

公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ は、$d > 0$ であれば、

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdot\cdot < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} < \cdots\cdots$$

のように、数は次第に大きくなっていくので、その和はどこかで最大になることはなく、項を増やせば増やすほど、その和は大きくなります。

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \cdots\cdots$$

しかし、$d < 0$ であるようなときは、

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdot\cdot > a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \cdots\cdots$$

のように、その数列の数は次第に小さくなっていくことになり、いつかは負の数になります。正の数のみの和は足せば足すほど大きくなりますが、負の数を足すとその和は小さくなってしまうので、数列の和を考えるとき、正の数のみの数列の和が最大ということになります。

【例題 1 − 6】

初項 40、公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ があります。

(1) 項が負の数になるのは第何項目からですか。

(2) 初項から第何項までの和が最大となりますか。また、そのときの和を求めなさい。

<解説>

(1) $a_n < 0$ となるのは、

$$a_n = 40 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 43 < 0$$
$$-3n < -43$$
$$n > \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$$

となるときです。ただし、n は自然数であるので、この条件を満たす最小の自然数を考えて、$n = 15$。つまり、第 15 項目から負の数になる。

(2) （1）より、第 14 項までは正の数で第 15 項から負の数になってしまうので、第 14 項までの和が最大となります。初項から第 14 項までの和を S_{14} とすると、

$$S_{14} = \frac{1}{2}\cdot 14\{2\cdot 40 + (14-1)\cdot(-3)\}$$
$$= 7(80-39) = 287$$

2　等比数列

2.1　等比数列

次のように、初項に一定の数 (r) を次々と掛けて得られる数列 $\{a_n\}$ を**等比数列**といいます。

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} \cdots$$

このとき、隣り合う 2 項の比 (r) は一定になり、その比を**公比**といいます。

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=r$$

【例題 2 − 1】

1. 次の数列は等比数列です。$\boxed{}$ にあてはまる数を入れなさい。

   (1) 4, $\boxed{}$, 16, $\boxed{}$, 64, $\cdots$　　(2) 3, 9, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 243, $\cdots$

2. 次の数列の初項から第 5 項までを書きなさい。

   (1) 初項 : 2　公比 : 3　　(2) 初項 : 10　公比 : $-\dfrac{1}{3}$

＜解説＞

1. 等比数列であるので、隣り合う 2 項の比は一定になります。

   (1) 公比を r とすると、

   $$4 \xrightarrow{\times r} \boxed{} \xrightarrow{\times r} 16 \xrightarrow{\times r} \boxed{} \xrightarrow{\times r} 64 \xrightarrow{\times r} \cdots$$

   となっていることになるので、

   $$r^2=\frac{16}{4}=4$$

   このことから、

   $$r=\pm 2$$

   (i) $r=2$ のとき

   $$4 \xrightarrow{\times 2} \boxed{8} \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} \boxed{32} \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

   (ii) $r=-2$ のとき

   $$4 \xrightarrow{\times(-2)} \boxed{-8} \xrightarrow{\times(-2)} 16 \xrightarrow{\times(-2)} \boxed{-32} \xrightarrow{\times(-2)} 64 \xrightarrow{\times(-2)} \cdots$$

   (2) 隣り合う 2 項の比（公比）を求めると、

   $$\frac{9}{3}=3$$

   であるので、

   $$3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} \boxed{27} \xrightarrow{\times 3} \boxed{81} \xrightarrow{\times 3} 243 \xrightarrow{\times 3} \cdots$$

2. 次の数列の初項から第 5 項までを書きなさい。

(1) 最初の項が 2 で、そこから 3 倍ずつして数を 5 つ並べればよいので、

$$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$$

$$2, \quad 6, \quad 18, \quad 54, \quad 162$$

(2) 最初の項が 10 で、そこから $-\dfrac{1}{3}$ 倍ずつして数を 5 つ並べればよいので、

$$\times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \times\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$10, \quad -\frac{10}{3}, \quad \frac{10}{9}, \quad -\frac{10}{27}, \quad \frac{10}{81}$$

2.2　等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が等比数列であるとき、初項 a、公比 r とすると、

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} \cdots\cdots \xrightarrow{\times r} a_n \xrightarrow{\times r} \cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 \cdot r = ar \\
a_3 &= a_2 \cdot r = ar \cdot r = ar^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot r = ar^2 \cdot r = ar^3 \\
&\vdots \\
a_n &= ar^{n-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

となるので、等比数列の一般項は、

$$a_n = ar^{n-1}$$

となります。

【例題 2 − 2】

次の等比数列の一般項 a_n を求めなさい。また、第 5 項を求めなさい。

(1) 初項 4　公比 3

(2) 初項 1　公比 -2

(3) 初項 -2　公比 $-\dfrac{1}{2}$

(4) 初項 3　公比 1

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}
a_n &= 4 \cdot 3^{n-1} \\
a_5 &= 4 \cdot 3^{5-1} = 4 \cdot 3^4 = 324
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1} \\
a_5 &= (-2)^{5-1} = (-2)^4 = 16
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
a_n &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
a_5 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
a_n &= 3 \cdot 1^{n-1} = 3 \\
a_5 &= 3
\end{aligned}$$

2.3 等比中項

等比数列をなす 3 つの項の真ん中の項を**等比中項**といいます。a, b, c がこの順に等比数列であるとき、b が等比中項になります。また、等比数列の隣り合う 2 項の比は等しいので、

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

という関係が成り立ちます。このとき、

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = ac$$

となり、3 つの数が等比数列であるとき、次の関係を用いることができます。

数列 $a,\ b,\ c$ が等比数列 $\Longleftrightarrow b^2 = ac$

【例題 2 − 3】

3, n, 2 がこの順で等比数列のとき、n の値を求めなさい。

＜解説＞

3 つの数の等比数列で、等比中項である n の値を求めるので、

$$\begin{aligned} n^2 &= 3 \cdot 2 \\ &= 6 \\ n &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

2.4 等比数列の和の公式

初項 a、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項までの和 S_n を考えます。
S_n は、

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a + ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

であるので、この S_n と S_n を r 倍した

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

との差を考えると、

$$\begin{array}{rrcccccccc}
 & & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & \\
 & S_n = & a & +ar & +ar^2 & +\cdots\cdots & +ar^{n-2} & +ar^{n-1} & \\
-) & rS_n = & & ar & +ar^2 & +\cdots\cdots & +ar^{n-2} & +ar^{n-1} & +ar^n \\
\hline
 & S_n - rS_n = & a & & & & & & -ar^n
\end{array}$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

となります。ここで、$r \fallingdotseq 1$ のとき、

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \left(= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \right)$$

と表すことができます。また、$r = 1$ のときは、

$$S_n = a + a + \cdots + a + a = na$$

となります。

$r \fallingdotseq 1$ のときは、S_n を求めるときに 2 つの形がありますが、計算するときに分母が負の値にならないよう、次のように使い分けると計算が楽になります。

(i) $r > 1$ のとき

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(ii) $r < 1$ のとき

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(iii) $r = 1$ のとき

$$S_n = na$$

【例題 2 − 4】

次の等比数列の和を求めなさい。
(1) 初項 1、公比 −2 の等比数列の初項から第 7 項
(2) 初項 8、公比 2 の等比数列の初項から第 6 項

<解説>

(1) 公比は $-2 < 1$ であるので、(ii) の公式を利用して、

$$S_7 = \frac{1\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)} = \frac{129}{3} = 43$$

(2) 公比は $2 > 1$ であるので、(i) の公式を利用して、

$$S_6 = \frac{8(2^6-1)}{2-1} = 8 \cdot 63 = 504$$

2.5　等比数列の和

【例題 2 − 5】

(1) 初項が 3、公比 2、初項から末項までの和が 93 であるような等比数列の項数を求めなさい。

(2) 初項が 3、末項が 96、初項から末項までの和が 189 である等比数列の公比と項数を求めなさい。

＜解説＞

(1) 項数を n、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} &= 93 \\ 2^n - 1 &= 31 \\ 2^n &= 32 = 2^5 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

よって、等比数列の項数は、

項数：5

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ の公比を r、項数を n、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$\begin{cases} a_n = 3r^{n-1} = 96 \\ S_n = \dfrac{3(r^n-1)}{r-1} = 189 \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{cases} r^{n-1} = 32 & \cdots\cdots ③ \\ \dfrac{r^n-1}{r-1} = 63 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①, ②より、

$$\begin{aligned} r^n - 1 &= 63(r-1) \\ r^{n-1}\cdot r - 1 &= 63r - 63 \\ 32r - 1 &= 63r - 63 \\ 31r &= 62 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &= 2^5 \\ n - 1 &= 5 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

よって、求める公比と項数は、

公比：2,　　項数：6

3　いろいろな数列の和

3.1　和の記号 Σ

数列の和を簡単に表すために、和を表す英単語 Sum の頭文字「S」のギリシャ文字 Σ（シグマ）を用いて、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

と表します。また、数列 $\{a_n\}$ の第 l 項から第 m 項までの和は、

$$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots\cdots + a_m$$

のようにして表すことができます。

【例題 3 − 1】

1. 次の和を、Σ を使わないで、各項の和の形で表しなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k$　(2) $\displaystyle\sum_{l=4}^{6} l$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k-1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k(k+1)$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3^k+2)$　(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} (n+k)$

2. 次の和を Σ を使って表しなさい。

(1) $3+6+9+\cdots\cdots+45$　(2) $4+7+10+13+\cdots\cdots+34$

＜解説＞

1. (1) k に 1 から順に 1 ずつ増やしながら 4 まで代入したものの和になるので、

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4$$

(2) l に 4 から順に 1 ずつ増やしながら 6 まで代入したものの和になるので、

$$\sum_{l=4}^{6} l = 4+5+6$$

(3) k に 1 から順に 1 ずつ増やしながら 4 まで代入したものの和になるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} (3k-1) &= (3\cdot1-1)+(3\cdot2-1)+(3\cdot3-1)+(3\cdot4-1)\\ &= 2+5+8+11\end{aligned}$$

(4) k に 1 から順に 1 ずつ増やしながら 4 まで代入したものの和になるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k(k+1) &= 1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+4(4+1)\\ &= 2+6+12+20\end{aligned}$$

(5) k に 1 から順に 1 ずつ増やしながら 4 まで代入したものの和になるので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(3^k+2) &= (3^1+2)+(3^2+2)+(3^3+2)+(3^4+2)\\ &= 5+11+29+83\end{aligned}$$

(6) k に 1 から順に 1 ずつ増やしながら 2 まで代入したものの和になるので、

$$\sum_{k=1}^{2}(n+k) = (n+1)+(n+2)$$

2. (1) 3, 6, 9, $\cdots\cdots$, 45 という数列は、初項 3、公差 3 の等差数列であると考えることができるので、その一般項は自然数 n を用いて、

$$3+(n-1)\cdot 3 = 3n$$

のように表すことができます。また、この数列が「45」となるのは、

$$3n = 45$$

より、$n = 15$、つまり、第 15 項目であることがわかるので、次のように表すことができます。

$$3+6+9+\cdots\cdots+45 = \sum_{k=1}^{15}3k$$

(2) 4, 7, 10, $\cdots\cdots$, 34 という数列は、初項 3、公差 3 の等差数列であると考えることができるので、その一般項を自然数 n を用いて、

$$4+(n-1)\cdot 3 = 3n+1$$

と表すことができます。また、この数列が「34」となるのは、

$$3n+1 = 34$$

より、$n = 11$、つまり、第 11 項目であることがわかるので、次のように表すことができます。

$$4+7+10+\cdots\cdots+34 = \sum_{k=1}^{11}(3k+1)$$

3.2　自然数の数列の和

　自然数の数列の和は、等差数列の和の公式を求めた方法と同じようにして、次の図のように、1 段目に 1 個、2 段目に 2 個、$\cdots$ のように玉を積み上げたときの玉の総和を求めることと同じです。このとき、上下さかさまにしたものを横に並べると、縦に n 個、横に $n+1$ 個の玉が長方形に並んだ形を作ることができるので、その総数は、$n(n+1)$ 個になります。ただし、同じ自然数の和を 2 つ分足していることになるので、1 つ分にするために 2 で割れば、

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \text{(初項 1、公差 1、項数 } n \text{ の等差数列の和)}$$

となることがわかります。

$$\begin{array}{rlrl}
1 & \bigcirc & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & n \\
2 & \bigcirc\,\bigcirc & \bigcirc\,\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & n-1 \\
3 & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & \bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & n-2 \\
 & \vdots & \vdots & \\
n-2 & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & 3 \\
n-1 & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\,\bigcirc & \bigcirc\,\bigcirc & 2 \\
n & \bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\,\bigcirc\,\bigcirc & \bigcirc & 1
\end{array}$$

　次に、自然数の 2 乗の数列

$$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad \cdots, \quad n^2$$

の和について考えます。このとき、次の k についての恒等式を利用します。

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

この式に、

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, n$$

まで代入したものの和を考えると、

$$\begin{array}{rrllll}
 & 2^3 - 1^3 = & 3\cdot 1^2 & +3\cdot 1 & +1 & (k=1) \\
 & 3^3 - 2^3 = & 3\cdot 2^2 & +3\cdot 2 & +1 & (k=2) \\
 & 4^3 - 3^3 = & 3\cdot 3^2 & +3\cdot 3 & +1 & (k=3) \\
 & \vdots & & & & \\
+) & (n+1)^3 - n^3 = & 3\cdot n^2 & +3\cdot n & +1 & (k=n) \\
\hline
 & (n+1)^3 - 1^3 = & 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 & +3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k & +n &
\end{array}$$

のように表すことができるので、

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3-1^3 &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n\\
3\sum_{k=1}^{n}k^2 &= (n+1)^3-3\sum_{k=1}^{n}k-n-1\\
&= (n+1)^3-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\\
&= \frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}\\
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

となります。この公式の導出はやや難しいので、まずはこの公式を覚えて使いこなせるようにしてください。

最後に、自然数の 3 乗の数列

$$1^3,\quad 2^3,\quad 3^3,\quad \cdots,\quad n^3$$

の和について考えます。このときも、次の k についての恒等式を利用します。

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

この式に、

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n$$

まで代入したものの和を考えると、

$$
\begin{array}{rrllll}
 & 2^4-1^4= & 4\cdot1^3 & +6\cdot1^2 & +4\cdot1 & +1 \quad (k=1)\\
 & 3^4-2^4= & 4\cdot2^3 & +6\cdot2^2 & +4\cdot2 & +1 \quad (k=2)\\
 & 4^4-3^4= & 4\cdot3^3 & +6\cdot3^2 & +4\cdot3 & +1 \quad (k=3)\\
 & \vdots & & & & \\
+) & (n+1)^4-n^4= & 4\cdot n^3 & +6\cdot n^2 & +4\cdot n & +1 \quad (k=n)\\
\hline
 & (n+1)^4-1^4= & 4\sum_{k=1}^{n}k^3 & +6\sum_{k=1}^{n}k^2 & +4\sum_{k=1}^{n}k & +n
\end{array}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
(n+1)^4-1^4 &= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n\\
4\sum_{k=1}^{n}k^3 &= (n+1)^4-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-n-1\\
&= (n+1)^4-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\\
&= (n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\
&= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)\\
\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2
\end{aligned}
$$

となり、これを公式として利用します。

【例題 3 − 2】

自然数の数列の和の公式を用いて、次の和を求めなさい。

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+28$　　(2) $12+13+14+\cdots\cdots+52$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+6^2$　　(4) $6^2+7^2+8^2+\cdots\cdots+15^2$

＜解説＞

(1) 自然数の数列の和を Σ を用いて表してから、公式を利用します。

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots\cdots+28 &= \sum_{k=1}^{28} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 28\cdot 29 \\ &= 406\end{aligned}$$

(2) まずは、自然数の数列の和を Σ を用いて表します。

$$12+13+14+\cdots\cdots+52 = \sum_{k=12}^{52} k$$

しかし、数列の和の公式は $k=1$ の形でないと用いることができないので、$k=1$ となるように工夫します。

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+11)+12+13+14+\cdots+52-(1+2+\cdots 11) &= \sum_{k=1}^{52} k - \sum_{k=1}^{11} k \\ &= \frac{1}{2}\cdot 52\cdot 53 - \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12 \\ &= 1378-66=1312\end{aligned}$$

(3) 自然数の数列の和を Σ を用いて表してから、公式を利用します。

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+6^2 &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 = 91\end{aligned}$$

(4) 数列の和が 1^2 から始まるように工夫してから、公式を利用します。

$$6^2+7^2+8^2+\cdots+15^2 = \sum_{k=6}^{15} k^2$$

$$\begin{aligned}(1^2+2^2+\cdots+5^2)+6^2+7^2+\cdots+15^2-(1^2+2^2+\cdots 5^2) &= \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{5} k^2 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31 - \frac{1}{6}\cdot 5\cdot 6\cdot 11 \\ &= 1240-55=1185\end{aligned}$$

3.3 Σ の性質

Σ には次のような関係が成り立ちます。

(i) c を定数とするとき、

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \cdots\cdots + c = nc$$

(ii)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots\cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

(iii) c を定数とするとき、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots\cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k\end{aligned}$$

(iv) α, β を定数とすると、(ii), (iii) の関係から、

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \sum_{k=1}^{n}\alpha a_k + \sum_{k=1}^{n}\beta b_k = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k$$

【例題３－３】

次の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+2)$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k+1) &= 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2}n\{3(n+1)+2\} \\ &= \frac{1}{2}n(3n+5)\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+2) &= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+2n \\
&= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+3(n+1)+12\} \\
&= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1+3n+3+12) \\
&= \frac{1}{6}n(2n^2+6n+16) \\
&= \frac{1}{3}n(n^2+3n+8)
\end{aligned}
$$

3.4 Σの計算

【例題3 − 4】

次の和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^{15} k(k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{8} (k+1)(k+3)$ (3) $\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$ (4) $\sum_{k=1}^{n} (3^k+1)$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{15} (k^2+k) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15} k \\ &= \frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31 + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16 \\ &= 1240 + 120 = 1360\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8} (k+1)(k+3) &= \sum_{k=1}^{8} (k^2+4k+3) \\ &= \sum_{k=1}^{8} k^2 + 4\sum_{k=1}^{8} k + \sum_{k=1}^{8} 3 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9 + 3\cdot 8 \\ &= 204 + 144 + 24 = 372\end{aligned}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) &= \sum_{k=1}^{n} (nk-k^2) \\ &= n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n-(2n+1)\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n-1)\end{aligned}$$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (3^k+1)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (3^k+1) &= \sum_{k=1}^{n} 3^k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^n)+n \\ &= \frac{3(3^n-1)}{3-1}+n \\ &= \frac{3}{2}(3^n-1)+n\end{aligned}$$

3.5 階差数列

ある数列の規則を見つけるとき、隣り合う 2 項の差や比を考えて、

- 等差数列：隣り合う 2 項の差が一定
- 等比数列：隣り合う 2 項の比が一定

のようにして等差数列や等比数列になることを確認することが多いのですが、等差数列や等比数列にならない場合もあります。このように、ある数列の規則が見つからないとき、隣り合う 2 項の差を項とする数列を考えると、その数列にある規則が見つかる場合があります。

一般に、数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を、数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**といいます。

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots\cdots,\quad a_{n-1},\quad a_n,\quad a_{n+1}$$
$$b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad b_n$$

【例題 3 − 5】

次の数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots$

(2) $2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \cdots\cdots$

(3) $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots\cdots$

(4) $1,\ -2,\ 7,\ -20,\ 61,\ \cdots\cdots$

＜解説＞

(1) $1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21,\quad \cdots\cdots$

$\quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 2、公差 2 の等差数列になるので、その一般項は、

$$b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$

(2) $2,\quad 5,\quad 10,\quad 17,\quad 26,\quad \cdots\cdots$

$\quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 3、公差 2 の等差数列になるので、その一般項は、

$$b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

(3) $1,\quad 3,\quad 7,\quad 15,\quad 31,\quad \cdots\cdots$

$\quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 2、公比 2 の等比数列になるので、その一般項は、

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

(4) $1,\quad -2,\quad 7,\quad -20,\quad 61,\quad \cdots\cdots$

$\quad -3 \quad 9 \quad -27 \quad 81$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 -3、公比 -3 の等比数列になるので、その一般項は、

$$b_n = -3 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$$

3.6 階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は、

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1, & & a_2, & & a_3, & & \cdots\cdots, & & a_{n-1}, & & a_n, & & a_{n+1} \\
& b_1 & & b_2 & & \cdots & & \cdots & & b_{n-1} & & b_n &
\end{array}
$$

$$a_{n+1}-a_n=b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$a_{n+1}=a_n+b_n$$

という関係になっています。つまり、

$$a_2=a_1+b_1$$

$$a_3=a_2+b_2=a_1+b_1+b_2$$

$$a_4=a_3+b_3=a_1+b_1+b_2+b_3$$

$$\vdots$$

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}$$

となります。階差数列はもとの数列の項が 2 つ以上ないと考えることができないので、$n \geqq 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ と階差数列 $\{b_n\}$ との間には、

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

という関係が成り立ち、階差数列からもとの数列の一般項を求めることができます。

【例題 3 − 6】

数列 $\{a_n\}$ の初項と階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が次のようなとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=2,\ \ b_n=3$

(2) $a_1=1,\ \ b_n=n$

(3) $a_1=0,\ \ b_n=2n+3$

(4) $a_1=2,\ \ b_n=2\cdot 3^{n-1}$

＜解説＞

(1) $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\
&=2+3(n-1)=3n-1
\end{aligned}
$$

$n=1$ のとき

$$a_1=3\cdot 1-1=2$$

となり成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=3n-1$$

また、$\{b_n\}$ が「3」と一定の値になっているとき、$\{a_n\}$ が等差数列で、その公差が 3 であることを表しています。

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{1}{2}(1^2 - 1 + 2) = 1$$

となり成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 3) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1) \\ &= (n-1)(n+3) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = (1-1)(1+3) = 0$$

となり成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = (n-1)(n+3)$$

(4) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 2 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= 3^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = 3^{1-1} + 1 = 2$$

となり成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = 3^{n-1} + 1$$

3.7 分数の数列の和

階差数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項との関係から、

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$$

という関係が成り立つことになります。このことを利用すると、ある数列 $\{a_n\}$ が、

$$a_n = c_{n+1} - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

というように、数列 $\{c_n\}$ の階差数列と考えられるとき、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = c_{n+1} - c_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

として求めることができることになります。

【例題 3 − 7】

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ を利用して、次の和を求めなさい。

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

＜解説＞

分数の数列の和を求めるとき、その和を求める公式がないので、基本的に、分数を部分分数分解して求めることになります。

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

3.8　数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

となります。また、$n \geqq 2$ のとき、

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

となるので、このことから、

$$S_n = S_{n-1} + a_n \quad (n \geqq 2)$$

つまり、

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

のように、数列の和と一般項の関係が導出できます。
また、

$$S_1 = a_1$$

という関係が成り立ちます。

【例題 3 − 8】

初項から第 n 項までの和 S_n が次のように表されています。この数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $S_n = n^2 + n + 1$　　(2) $S_n = 3n - 2n^2$

<解説>

(1) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + n + 1) - \{(n-1)^2 + (n-1) + 1\} \\ &= n^2 + n + 1 - (n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 1) \\ &= 2n \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

となります。$n = 1$ のときは、

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

となり、①の式に $n = 1$ を代入すると、

$$2 \times 1 = 2 \fallingdotseq 3$$

となるので、①の式は、$n = 1$ のときは成り立たないことが分かります。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2n \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (3n - 2n^2) - \{3(n-1) - 2(n-1)^2\} \\
&= 3n - 2n^2 - (3n - 3 - 2n^2 + 4n - 2) \\
&= -4n + 5 \ \cdots\cdots \ ②
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 1$$

となり、②の式に $n = 1$ を代入すると、

$$-4 \cdot 1 + 5 = 1$$

となるので、②の式は $n = 1$ のときも成り立つことが分かります。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = -4n + 5$$

3.9 （等差）×（等比）の数列の和

初項 a、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と、初項 b、公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ の各項の積によってできる (等差) × (等比) という形の数列 $\{a_nb_n\}$ の和を S とすると、

$$
\begin{array}{rrccccc}
 & & a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 & a_4b_4 & \cdots\cdots \\
 & S = & ab & +(a+d)br & +(a+2d)br^2 & +(a+3d)br^3 & +\cdots\cdots \\
-) & rS = & & abr & +(a+d)br^2 & +(a+2d)br^3 & +\cdots\cdots \\
\hline
 & S-rS = & ab & +dbr & +dbr^2 & +dbr^3 & +\cdots\cdots
\end{array}
$$

$dbr + dbr^2 + dbr^3 + \cdots\cdots$: 初項 dbr、公比 r の等比数列の和

となります。

（等差数列）×（等比数列）という形の数列の和を直接求めることはできないので、等比数列の和の公式を導出したように、$S - rS$ を計算することにより等比数列の和を導出することができ、数列の和を求めることができます。

【例題 3 − 9】

次の和を $S - 2S$ を利用して求めなさい。

$$2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \cdots + (2n-1)2^n$$

<解説>

与えられた式は、

$$S = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^4 + \cdots\cdots + (2n-1)2^n$$

と表すことができるので、初項 1、公差 2 の等差数列と、初項 2、公比 2 の等比数列の積である数列の和を求めることになります。

$$
\begin{array}{rrcccccc}
 & S = & 1 \cdot 2 & +3 \cdot 2^2 & +5 \cdot 2^3 & +\cdots\cdots & +(2n-1)2^n & \\
-) & 2S = & & 1 \cdot 2^2 & +3 \cdot 2^3 & +\cdots\cdots & +(2n-3)2^n & +(2n-1)2^{n+1} \\
\hline
 & S-2S = & 1 \cdot 2 & +2 \cdot 2^2 & +2 \cdot 2^3 & +\cdots\cdots & +2 \cdot 2^n & -(2n-1)2^{n+1}
\end{array}
$$

このことから、$2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots\cdots + 2 \cdot 2^2$ は、初項 2、公比 2 の等比数列であるので、等比数列の和の公式を用いることで、

$$
\begin{aligned}
-S &= 2 + \frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)2^{n+1} \\
&= 2 + 8 \cdot 2^{n-1} - 8 - (2n-1)2^{n+1} \\
&= 2 + 2 \cdot 2^{n+1} - 8 - (2n-1)2^{n+1} \\
&= (3-2n)2^{n+1} - 6 \\
S &= (2n-3)2^{n+1} + 6
\end{aligned}
$$

4　漸化式

4.1　漸化式

数列 $\{a_n\}$ において、初項 a_1 と隣の項との間の関係式が得られると、a_1 を基準に $a_2, a_3, a_4, \cdots$ のようにして数列 $\{a_n\}$ が定まります。このように、連続するいくつかの項の値から、それらの次の項の値を定める関係式を**漸化式**といい、隣り合う 2 項間の漸化式を**隣接 2 項間の漸化式**といいます。

この漸化式では、主に、隣接 2 項間の漸化式を扱います。例えば、$a_1 = a$、隣の項との間の関係式として、$a_{n+1} = ra_n + d$ という漸化式が与えられると、a_1 を基準に、隣の項が順々に定まります。

$$
\begin{array}{ll}
 & a_1 = a \\
n = 1 \text{ のとき} & a_2 = ra_1 + d = ra + d \\
n = 2 \text{ のとき} & a_3 = ra_2 + d = r(ra + d) + d = r^2a + (r+1)d \\
n = 3 \text{ のとき} & a_4 = ra_3 + d = r\{r^2a + (r+1)d\} + d = r^3a + (r^2 + r + 1)d \\
 & \quad \vdots
\end{array}
$$

【例題 4 − 1】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを求めなさい。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$　　(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$

(3) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + n$　　(4) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 4$

<解説>

漸化式に $n = 1$ から $n = 4$ まで順々に代入していくことで、第 5 項まで求めることができます。

(1)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1 + 1 = 1 + 1 = 2 \\
a_3 &= a_2 + 1 = 2 + 1 = 3 \\
a_4 &= a_3 + 1 = 3 + 1 = 4 \\
a_5 &= a_4 + 1 = 4 + 1 = 5
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\
a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8 \\
a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 8 = 16 \\
a_5 &= 2a_4 = 2 \cdot 16 = 32
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= a_1 + 1 = 0 + 1 = 1 \\
a_3 &= a_2 + 2 = 1 + 2 = 3 \\
a_4 &= a_3 + 3 = 3 + 3 = 6 \\
a_5 &= a_4 + 4 = 6 + 4 = 10
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 3a_1 + 4 = 3 \cdot 1 + 4 = 7 \\
a_3 &= 3a_2 + 4 = 3 \cdot 7 + 4 = 25 \\
a_4 &= 3a_3 + 4 = 3 \cdot 25 + 4 = 79 \\
a_5 &= 3a_4 + 4 = 3 \cdot 79 + 4 = 241
\end{aligned}
$$

4.2　等差数列と漸化式

公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ は、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] a_1, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_2, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_3, \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_{n-1}, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_n, \arrow[r, bend left, "+d"] & a_{n+1}, \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots \end{tikzcd}$$

となっているので、その漸化式は、

$$a_{n+1} = a_n + d$$

のように表されます。また、この式は、

$$a_{n+1} - a_n = d$$

となり、隣り合う 2 項の差が一定であることが式からも読み取れるので、この式から、公差 d の等差数列であることがわかります。

【例題 4 − 2】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - 2$　　(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 4$

＜解説＞

(1) 与えられた条件から、数列の各項は次のような関係になります。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1, \arrow[r, bend left, "-2"] & -1, \arrow[r, bend left, "-2"] & -3, \arrow[r, bend left, "-2"] & -5, \arrow[r, bend left, "-2"] & \cdots\cdots, \arrow[r, bend left, "-2"] & a_n, \arrow[r, bend left, "-2"] & a_{n+1} \end{tikzcd}$$

つまり、$\{a_n\}$ は初項 1、公差 -2 の等差数列であるので、その一般項は、

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 3$$

(2) 与えられた条件から、数列の各項は次のような関係になります。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1, \arrow[r, bend left, "+4"] & 5, \arrow[r, bend left, "+4"] & 9, \arrow[r, bend left, "+4"] & 13, \arrow[r, bend left, "+4"] & \cdots\cdots, \arrow[r, bend left, "+4"] & a_n, \arrow[r, bend left, "+4"] & a_{n+1} \end{tikzcd}$$

つまり、$\{a_n\}$ は初項 1、公差 4 の等差数列であるので、その一般項は、

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$$

4.3 等比数列と漸化式

公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は、

$$a_1,\ \xrightarrow{\times r} a_2,\ \xrightarrow{\times r} a_3,\ \xrightarrow{\times r} \cdots,\ \xrightarrow{\times r} a_{n-1},\ \xrightarrow{\times r} a_n,\ \xrightarrow{\times r} a_{n+1},\ \xrightarrow{\times r} \cdots$$

となっているので、その漸化式は、

$$a_{n+1} = ra_n$$

のように表されます。また、この式は、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r：\text{比が一定}$$

のように表すことができ、隣り合う 2 項の比が一定であり、公比 r の等比数列であることが式から読み取ることができます。

【例題 4 − 3】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -2a_n$　　(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n$

＜解説＞

(1) 与えられた条件から、数列の各項は次のような関係になります。

$$1,\ \xrightarrow{\times(-2)} -2,\ \xrightarrow{\times(-2)} 4,\ \xrightarrow{\times(-2)} -8,\ \xrightarrow{\times(-2)} \cdots\cdots,\ \xrightarrow{\times(-2)} a_n,\ \xrightarrow{\times(-2)} a_{n+1}$$

このことから、$\{a_n\}$ は初項 1、公比 -2 の等比数列であることがわかるので、この数列の一般項は、

$$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

(2) 与えられた条件から、数列の各項は次のような関係になります。

$$3,\ \xrightarrow{\times 2} 6,\ \xrightarrow{\times 2} 12,\ \xrightarrow{\times 2} 24,\ \xrightarrow{\times 2} \cdots\cdots,\ \xrightarrow{\times 2} a_n,\ \xrightarrow{\times 2} a_{n+1}$$

このことから、$\{a_n\}$ は初項 3、公比 2 の等比数列であることがわかるので、この数列の一般項は、

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

4.4　$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式が、

$a_{n+1}=a_n+f(n)$($f(n)$ は n の式という意味)

のように与えられている場合、

$a_{n+1}-a_n=f(n)$

のように変形できます。ここで、$a_{n+1}-a_n$ は階差数列を表すので、階差数列の一般項が $f(n)$ であるということを示していることになります。このことから、次の手順のように、階差数列によるもとの数列の復元を行うことにより、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができます。

(i) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ を $a_{n+1}-a_n=f(n)$ の形に変形する。
(ii) $n \geqq 2$ のとき、$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ として、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。
(iii) (ii) で求めた数列 $\{a_n\}$ の一般項が、$n=1$ のときも成り立つのかを確認する。

【例題 4 − 4】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2$

＜解説＞

(1) 漸化式から、

$$a_{n+1}-a_n=3n$$

となるので、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3k\\&=1+3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\end{aligned}$$

$n=1$ のとき、

$$a_1=\frac{3}{2}\cdot1^2-\frac{3}{2}\cdot1+1=1$$

と成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$$

(2) 漸化式から、

$$a_{n+1}-a_n=n^2$$

となるので、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\&=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\\&=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\\&=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\end{aligned}$$

$n=1$ のとき、

$$a_1=\frac{1}{6}(1+1)(2\cdot1^2-5\cdot1+6)=1$$

と成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)$$

$$\left(a_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1\right)$$

4.5 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式①

数列 $\{a_n\}$ の漸化式が、

(i) 等差数列：$a_{n+1} = a_n + q$ (ii) 等比数列：$a_{n+1} = pa_n$

という形であれば、それぞれ一般項を求めることは難しくはないのですが、

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

のように、等差数列と等比数列が混合されたような形になってしまうと、一般項を求めるのには工夫が必要になります。

そこで、

$$a_{n+1} = pa_n + q \ \cdots\cdots \ ①$$

の n を $n+1$ に置き換えた式を考えると、

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + q \ \cdots\cdots \ ②$$

となるので、② − ① を計算すると、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$$

となります。数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、式 ③ は、

$$b_{n+1} = pb_n$$

と表すことができ、このことから数列 $\{b_n\}$ が、公比 p の等比数列であることがわかります。よって、

$$b_1 = a_2 - a_1$$

を計算することにより階差数列の初項と公比が得られるので、階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることができます。そして、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

を利用することで、数列 $\{a_n\}$ の一般項が得られます。

【例題 4 − 5】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n - 3$ (2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n + 2$

＜解説＞

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 3 \ \cdots\cdots$ ①, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 3 \ \cdots\cdots$ ② とすると、② − ① より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) \ \cdots\cdots \ ③$$

ここで、数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、③の式は、

$$b_{n+1} = 3b_n$$

となり、

$$\begin{aligned}b_1 &= a_2 - a_1 = (3a_1 - 3) - a_1\\ &= 2a_1 - 3\\ &= 2\cdot 1 - 3 = -1\end{aligned}$$

であるので、数列 $\{b_n\}$ は初項 -1、公比 3 の等比数列になります。よって、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{-1(3^{n-1}-1)}{3-1}\\ &= \frac{1}{2}(-3^{n-1}+1+2)\\ &= \frac{3}{2}(1-3^{n-2})\end{aligned}$$

また、$n=1$ のとき、

$$a_1 = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3}) = 1$$

と成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{3}{2}(1-3^{n-2})$$

(2) $a_{n+1} = 4a_n + 2$ ……④, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$ ……⑤ とすると、⑤ − ④ より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots\cdots ⑥$$

ここで、数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、⑥の式は、

$$b_{n+1} = 4b_n$$

となり、

$$\begin{aligned}b_1 &= a_2 - a_1 = (4a_1 + 2) - a_1\\ &= 3a_1 + 2\\ &= 3\cdot 1 + 2 = 5\end{aligned}$$

であるので、数列 $\{b_n\}$ は初項 5、公比 4 の等比数列 になります。よって、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{5(4^{n-1}-1)}{4-1}\\ &= \frac{1}{3}(5\cdot 4^{n-1} - 5 + 3)\\ &= \frac{1}{3}(5\cdot 4^{n-1} - 2)\end{aligned}$$

また、$n=1$ のとき、

$$a_1 = \frac{1}{3}(5\cdot 4^0 - 2) = 1$$

と成り立つので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{1}{3}(5\cdot 4^{n-1} - 2)$$

4.6 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式②

$a_{n+1}=pa_n+q$ がある値 α によって、

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

のように変形できたとします。すると、数列 $\{a_n-\alpha\}$ は公比 p の等比数列であるので、その一般項は、

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$$

のように表すことができ、このことから数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$$

と求めることができます。つまり、$a_{n+1}=pa_n+q$ を、$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ となるような α を見つけ出すことができれば、$\{a_n\}$ の一般項を求めることができます。そこで、$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ を変形すると、

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=p(a_n-\alpha)\\a_{n+1}&=pa_n-\alpha p+\alpha\end{aligned}$$

となり、この式と $a_{n+1}=pa_n+q$ は一致するはずなので、

$$\begin{aligned}q&=-\alpha p+\alpha\\\alpha&=p\alpha+q\end{aligned}$$

とできます。この式は、$a_{n+1}=pa_n+q$ の a_{n+1}、a_n を α に置き換えたものと同じ形をしていて、**特性方程式**と呼ばれるものになります。この特性方程式を利用すると、

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =pa_n+q\\ -) & \alpha & =p\alpha+q\\\hline & a_{n+1}-\alpha & =p(a_n-\alpha)\end{array}$$

とすることにより、目的の式に変形ができます。

【例題 4 − 6】

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n-3$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+2$

＜解説＞

(1) 特性方程式を利用すると、

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =3a_n-3\\ -) & \alpha & =3\alpha-3\\\hline & a_{n+1}-\alpha & =3(a_n-\alpha)\ \cdots\cdots\ ①\end{array}$$

と変形できます。また、特性方程式より、α の値は、

$$\begin{aligned}\alpha&=3\alpha-3\\-2\alpha&=-3\\\alpha&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

と求められるので、①の式は、

$$a_{n+1}-\frac{3}{2}=3\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$$

と表すことができ、

$$a_1-\frac{3}{2}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

より、数列 $\left\{a_n-\frac{3}{2}\right\}$ は、初項 $-\frac{1}{2}$、公比 3 の等比数列になります。よって、

$$\begin{aligned} a_n-\frac{3}{2}&=-\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} \\ a_n&=-\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(2) 特性方程式を利用すると、

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =4a_n+2 \\ -) & \alpha & =4\alpha+2 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha & =4(a_n-\alpha)\ \cdots\cdots\ ② \end{array}$$

と変形できます。また、特性方程式より、α の値は、

$$\begin{aligned} \alpha&=4\alpha+2 \\ -3\alpha&=2 \\ \alpha&=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求められるので、②の式は、

$$a_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(a_n+\frac{2}{3}\right)$$

と表すことができ、

$$a_1+\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

より、 数列 $\left\{a_n+\frac{2}{3}\right\}$ は、初項 $\frac{5}{3}$、公比 4 の等比数列になります。よって、

$$\begin{aligned} a_n+\frac{2}{3}&=\frac{5}{3}\cdot 4^{n-1} \\ a_n&=\frac{5}{3}\cdot 4^{n-1}-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

5 数学的帰納法

数列では初項と漸化式が決まると数列のすべての項が決まりました。

(例) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$

- $n = 1$ のとき $a_2 = 3a_1 + 4 = 7$
- $n = 2$ のとき $a_3 = 3a_2 + 4 = 25$
- $n = 3$ のとき $a_4 = 3a_3 + 4 = 79$

$\vdots$

この考え方を利用して、自然数 n に関するある命題が与えられたとき、

(i) $n = 1$（条件を満たす最小の n の値）のときに成り立つ
(ii) $n = k$ のとき成り立つならば、$n = k + 1$ のときも成り立つ

という 2 つのことを示すことができれば、漸化式のときと同様にして、

- $n = 1$ のとき成り立つ $\longrightarrow$ $n = 2$ のときも成り立つ
- $n = 2$ のとき成り立つ $\longrightarrow$ $n = 3$ のときも成り立つ
- $n = 3$ のとき成り立つ $\longrightarrow$ $n = 4$ のときも成り立つ

$\vdots$

というようにすべての自然数 n について成り立つことが証明でき、このような証明法を**数学的帰納法**といいます。

5.1 等式の証明

次の等式を数学的帰納法により証明をしてみます。

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (n : \text{自然数}) \cdots (\mathrm{A})$$

(i) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1 \qquad\qquad (\text{右辺}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$$

よって、(A) は成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると、

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

これを利用して $n = k + 1$ のときにも (A) が成り立つことを示す。このとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + k + (k+1) \\ &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = (\text{右辺})\end{aligned}$$

よって、（A）は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) よりすべての自然数 n について（A）は成り立つ。

【例題 5 − 1】

n は自然数とします。次の等式を数学的帰納法を使って証明しなさい。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots(\mathrm{A})$$

＜解説＞

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^2=1 \qquad (\text{右辺})=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)=1$$

よって、(A) は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

これを利用して $n=k+1$ のときにも (A) が成り立つことを示す。このとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって、（A）は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) よりすべての自然数 n について（A）は成り立つ。

5.2　不等式の証明

自然数 n を用いて表された不等式 $2^n > n$ を数学的帰納法により証明をします。

$2^n > n \quad (n : \text{自然数}) \cdots\cdots$ (A) とすると、

(i) $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^1 = 2 \qquad\qquad (\text{右辺}) = 1$$

よって、（A）は成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき、（A）が成り立つと仮定すると、

$$2^k > k$$

これを利用して、$n = k + 1$ のときも（A）が成り立つことを示す。このとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^{k+1} - (k+1)\\ &= 2 \cdot 2^k - (k+1)\\ &> 2k - (k+1) = k - 1 \geqq 0\end{aligned}$$

よって、（A）は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

【例題 5 − 2】

n を 2 以上の自然数とするとき、不等式

$$2^n > n + 1$$

を数学的帰納法を使って証明しなさい。

<解説>

(i) $n = 2$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^2 = 4 \qquad\qquad (\text{右辺}) = 2 + 1 = 3$$

よって、（A）は成り立つ。

(ii) $n = k \ \ (k : 2$ 以上の自然数) のとき、（A）が成り立つと仮定すると、

$$2^k > k + 1$$

これを利用して、$n = k + 1$ のときも（A）が成り立つことを示す。このとき、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^{k+1} - \{(k+1) + 1\}\\ &= 2 \cdot 2^k - (k+2)\\ &> 2(k+1) - (k+2) = 2k + 2 - k - 2 = k > 0\end{aligned}$$

よって、（A）は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より、2 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

5.3 整数の性質の証明

【例題 5 − 3】

2 以上の自然数 n について、3^n-2n-1 は 4 の倍数になる。このことを、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

＜解説＞

(i) $n=2$ のとき

$$3^2-2\cdot 2-1=9-4-1=4$$

となり、3^n-2n-1 は 4 の倍数である。

(ii) $n=k$ (k : 2 以上の自然数) のとき、3^n-2n-1 が 4 の倍数であると仮定すると、整数 m を用いて、$3^k-2k-1=4m$ と表される。このことから、$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}3^{k+1}-2(k+1)-1&=3\cdot 3^k-2k-2-1\\&=3(2k+1+4m)-2k-3\\&=6k+3+12m-2k-3\\&=4k+12m=4(k+3m)\end{aligned}$$

となり、$n=k+1$ のときも、3^n-2n-1 は 4 の倍数である。

(i), (ii) より、2 以上のすべての自然数 n について、3^n-2n-1 は 4 の倍数である。

5.4　漸化式の証明

【例題 5 − 4】

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{4 - a_n}{3 - a_n}$ (n は自然数) で表される数列があります。

(1) a_2，a_3，a_4 を求めて、a_n を推定しなさい。

(2) 数学的帰納法により、推定した a_n が正しいことを証明しなさい。

＜解説＞

(1) $a_{n+1} = \dfrac{4 - a_n}{3 - a_n}$ の n に 1 から 3 まで代入すると、

$$a_1 = 1 \quad \left(= \frac{1}{1}\right)$$

$n = 1$ のとき　$a_2 = \dfrac{4 - a_1}{3 - a_1} = \dfrac{4 - 1}{3 - 1} = \dfrac{3}{2}$

$n = 2$ のとき　$a_3 = \dfrac{4 - a_2}{3 - a_2} = \dfrac{4 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \dfrac{8 - 3}{6 - 3} = \dfrac{5}{3}$

$n = 3$ のとき　$a_4 = \dfrac{4 - a_3}{3 - a_3} = \dfrac{4 - \frac{5}{3}}{3 - \frac{5}{3}} = \dfrac{12 - 5}{9 - 5} = \dfrac{7}{4}$

となります。このことから、分母は自然数、分子は奇数になっていることがわかるので、

$$a_n = \frac{2n - 1}{n}$$

であると推定することができます。

(2) $a_n = \dfrac{2n - 1}{n} \cdots\cdots$ (A) とすると、

(ｉ) $n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$$

よって、(A) は成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき、(A) が成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{2k - 1}{k}$$

このことから、$n = k + 1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{4 - a_k}{3 - a_k} = \frac{4 - \frac{2k - 1}{k}}{3 - \frac{2k - 1}{k}}$$

$$= \frac{4k - 2k + 1}{3k - 2k + 1}$$

$$= \frac{2k + 1}{k + 1} \quad \left(= \frac{2(k + 1) - 1}{k + 1}\right)$$

よって、$n = k + 1$ のときも (A) は成り立つ。

(i), (ii) より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。