【数学A】確率

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　事象と確率

1.1　試行と事象

同じ条件のもとで何回も繰り返すことができる実験や観測を**試行**といい、その結果として起こる事柄を**事象**といいます。

ある 1 つの試行で起こり得る結果全体を**全事象**といい、その各々の要素を**根元事象**といいます。また、根元事象を 1 つも含まないような事象を**空事象**といい、空集合 ϕ で表します。

【例題 1 − 1】

1 個のサイコロを投げる試行を考えます。

(1) 全事象 U を集合を使って表しなさい。ただし、「1 の目が出る」事象は $\{1\}$ と表すものとします。

(2) 根元事象を集合を使って表しなさい。

＜解説＞

(1) 1 個のサイコロを投げた場合、1〜6 の目のいずれかが出るので、全事象 U は

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

と表せます。

(2) 根元事象は、全事象の各々の要素、つまり、全事象の 1 個の要素だけからなる部分集合のことをいいます。このことから、根元事象は

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

と表されます。

1.2 事象の確率

1 個のサイコロを投げる試行では、いびつな形をしていたり、何か細工をしていない限り、ある目が極端に出やすかったり、出にくかったりということはなく、どの目も同じような割合で出ます。

このように、一般にある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は**同様に確からしい**といいます。

このような試行において、起こり得る根元事象が全部で N 個あり、試行にともなう事象 A が a 個の根元事象からなっているとき、A の起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}} = \frac{a}{N}$$

と表され、ある事柄が起こると期待される回数の割合を数値で表したものになります。このことから、確率は、全事象 U の根元事象の総数（起こり得るすべての場合の数）$n(U)$ と、ある事象 A に対応する根元事象の個数（事象 A の起こる場合の数）$n(A)$ を数えあげ、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

により求めるということになります。

【例題 1 − 2】

袋に次の数の玉が入っています。赤玉を 1 つ取り出す確率を求めなさい。

(1) 白玉 13 個、赤玉 17 個　　(2) 白玉 125 個、赤玉 25 個

＜解説＞

全事象を U、赤玉を 1 つ取りだす事象を A として考えると、

$$U = \{\text{白}, \text{赤}\}, \qquad A = \{\text{赤}\}$$

より、

$$n(U) = 2, \qquad n(A) = 1$$

となるので、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2}$$

と考えることができそうですが、これは誤りです。それは、根元事象である白玉を 1 つ取り出す事象と赤玉を 1 つ取り出す事象が、同様に確からしくはないからです。（1）では赤玉、（2）では白玉のほうが取り出しやすいはずですよね。

そのため、確率を求める場合には、「同様に確からしい」事象でなければ正しく求めることができなくなってしまうので注意が必要です。

(1) 白玉、赤玉にそれぞれ数字が書かれていて、全事象 U は

$$U = \{\text{白}1, \text{白}2, \cdots, \text{白}13, \text{赤}1, \text{赤}2, \cdots, \text{赤}17\}$$

のようになっていると考えます。すると、根元事象

$$\{\text{白}1\},\ \{\text{白}2\},\ \cdots,\ \{\text{白}13\},\ \{\text{赤}1\},\ \{\text{赤}2\},\ \cdots,\ \{\text{赤}17\}$$

は同様に確からしく、赤玉を 1 つ取り出す事象 A は

$$A = \{\text{赤}1,\ \text{赤}2,\ \cdots,\ \text{赤}17\}$$

となるので、

$$n(U) = 30, \qquad n(A) = 17$$

よって、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{17}{30}$$

(2) （1）と同じようにして考えると、全事象 U は

$$U = \{\text{白}1,\ \text{白}2,\ \cdots,\ \text{白}125,\ \text{赤}1,\ \text{赤}2,\ \cdots,\ \text{赤}25\}$$

のようになっていると考えれば、根元事象

$$\{\text{白}1\},\ \{\text{白}2\},\ \cdots,\ \{\text{白}125\},\ \{\text{赤}1\},\ \{\text{赤}2\},\ \cdots,\ \{\text{赤}25\}$$

は同様に確からしくなり、事象 A は

$$A = \{\text{赤}1,\ \text{赤}2,\ \cdots,\ \text{赤}25\}$$

このことから、

$$n(U) = 150, \qquad n(A) = 25$$

となるので、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\cancel{25}^{\,1}}{\cancel{150}^{\,6}} = \frac{1}{6}$$

1.3 場合の数と確率

【例題1－3】

2個のさいころを同時に投げるとき、次の事象の確率を求めなさい。

(1) 目の数の和が6

(2) 目の数の差が2

(3) 目の数の和が9以上

(4) 目の数の和が奇数

＜解説＞

2個のさいころを同時に投げるとき、一方のさいころが「1」の目が出て、もう一方のさいころが「2」の目が出た場合と、一方のさいころが「2」の目が出て、もう一方のさいころが「1」の目が出た場合とでは、同じような2つのさいころを使った場合、見た目には区別ができません。しかし、確率を考える上では、実際のさいころに見た目の区別ができないものであっても、その2つのさいころに大小の大きさであったり、赤白のような色の区別があるものと同じようにして考える必要があります。

また、さいころの目の出方について場合の数を考えるとき、表を用いると数え上げやすくなります。

(i) 目の数の和

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(ii) 目の数の差

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

(1) 目の数の和についての表から、目の数の和が5になるものを数え上げると、5通りあることがわかるので、その確率は、

$$\frac{5}{36}$$

(2) 目の数の差についての表から、目の数の差が2になるものを数え上げると、8通りあることがわかるので、その確率は、

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

(3) 目の数の和についての表から、目の数の和が9以上になるものを数え上げると、10通りあることがわかるので、その確率は、

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(4) 目の数の和についての表から、目の数の和が奇数になるものを数え上げると、18通りあることがわかるので、その確率は、

$$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

1.4 順列と確率

【例題 1 − 4】

男子 3 人、女子 2 人が 1 列に並ぶ順をくじで決めるとき、次の確率を求めなさい。

(1) 男女が交互に並ぶ確率 (2) 女子 2 人が両端になる確率 (3) 女子 2 人が隣り合う確率

＜解説＞

「くじびきで」、「無作為に」などの言葉は、同様に確からしいことを表すキーワードになります。

男子 3 人、女子 2 人の 5 人を一列に並べるとき、次のような 5 つの場所を用意し、その場所に 5 人を当てはめていくことを考えます。

$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}$

このとき、すべての場合は、5! 通りになります。

(1) 男女が交互に並ぶのは、「男女男女男」となるときです。男子は 1, 3, 5 という 3 つ場所を選んで並べればよいので 3! 通り。また、女子は 2, 4 という 2 つの場所を選んで並べればよいので 2! 通りあります。このことから、求める確率は、

$$\frac{3!\times 2!}{5!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{10}$$

(2) 女子 2 人が両端になるのは、「女男男男女」となるときです。女子は、1, 5 という 2 つの場所を選んで並べればよいので 2! 通りあり、男子は、残りの 2, 3, 4 という 3 つの場所を選んで並べればよいので 3! 通りになります。このことから、求める確率は、

$$\frac{2!\times 3!}{5!}=\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{10}$$

(3) 女子 2 人が隣り合うには、2 人の女子をひとまとめにして考えます。つまり、3 人の男子とひとまとめにした女子という 4 つのものを並べると考えるので、その並べ方は 4! 通りになります。ただし、ひとまとめにした女子 2 人の並べ方が 2! 通りあるので、求める確率は、

$$\frac{4!\times 2!}{5!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{2}{5}$$

1.5　組合せと確率

【例題 1 − 5】

袋の中に、白玉 5 個、赤玉 3 個が入っている。この袋の中から、3 個の玉を同時に取り出すとき、次の確率を求めなさい。

(1) すべて白玉である確率　　(2) すべて赤玉である確率　　(3) 2 個が白玉である確率

＜解説＞

白玉と赤玉の取り出しやすさには違いがあるので、玉の取り出しやすさを同程度にするために、

白 1、白 2、白 3、白 4、白 5、赤 1、赤 2、赤 3

のように、それぞれの玉に数字が書かれていて区別できるものだと考えます。このとき、3 個の玉の取り出し方は、

$${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7\ (\text{通り})$$

になります。

(1) 取り出す 3 個の玉がすべて白玉になるためには、白玉 5 個から 3 個の玉を選べばよいので、その取り出し方は、

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2\ (\text{通り})$$

このことから、求める確率は、

$$\frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{5}{28}$$

(2) 取り出す 3 個の玉がすべて赤玉になるためには、赤玉 3 個から 3 個の玉を選べばよいので、その取り出し方は、

$${}_3\mathrm{C}_3 = 1\ (\text{通り})$$

このことから、求める確率は、

$$\frac{1}{8 \cdot 7} = \frac{1}{56}$$

(3) 取り出す玉のうち 2 個が白玉になるためには、白玉 5 個から 2 個選び、赤玉 3 個から 1 個選べばよいので、その取り出し方は、

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 5 \cdot 2 \cdot 3\ (\text{通り})$$

よって、求める確率は、

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

2　確率の基本性質

2.1　積事象と和事象

ある試行にともなう 2 つの事象 A、B について、「A と B がともに起こる」という事象を、A と B の**積事象**といい、$A \cap B$ のようにして共通部分で表します。

また、「A または B の少なくとも一方が起こる」という事象を A と B の**和事象**といい、$A \cup B$ のようにして和集合で表します。

【例題 2 − 1】

スペードの 1 から 13 までの 13 枚のトランプから 1 枚ひいてその数字を調べる。事象 A, B, C, D を次のように定めるとき、次の事象の表す集合を要素を書き並べる方法で表しなさい。

A : 偶数　　B : 素数　　C : 3 の倍数　　D : 5 の倍数

(1) $A \cup B$　　(2) $C \cap D$

＜解説＞

全事象 U の表す集合を、要素を書き並べる方法で表すと

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$$

となります。「トランプを 1 枚ひいてその**数字**を調べる」ので、「スペード」という情報は必要ありません。

同じようにして、事象 A, B, C, D は

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\},\quad B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\},\quad C = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\},\quad D = \{5,\ 10\}$$

のように表せます。

(1) 和事象 $A \cup B$ は、事象 A と B に含まれるすべての要素を書き並べればよいので、

$$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$$

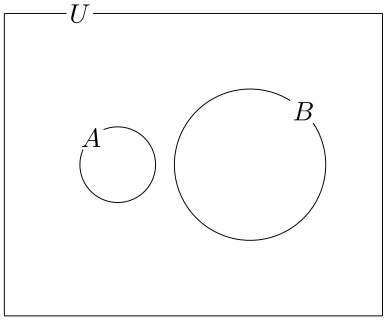
(2) 積事象 $C \cap D$ は、事象 C と D に含まれる共通の要素を書き並べればよいのですが、そのような要素は存在しません。よって、

$$C \cap D = \phi$$

2.2 確率の基本性質

ある試行にともなう 2 つの事象 A、B について、事象 A と事象 B が同時には起こり得ないとき、つまり、$A \cap B = \phi$ であるとき、事象 A, B は互いに**排反**であるとか、**排反事象**であるといいます。

また、3 つの事象 A, B, C のうち、どの 2 つの事象も互いに排反であるときには、事象 A, B, C は**排反**であるといいます。



ある試行にともなう 2 つの事象を A, B とし、全事象を U とします。このとき、A, B, U の根元事象の個数はそれぞれ、$n(A), n(B), n(U)$ と表すことができ、事象 A の根元事象の個数は、全事象における根元事象の個数を超えることはなく、また、負になることもないので、

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$

という関係が成り立ちます。（この関係は事象 B についても同様に成り立ちます。）

この式の各辺を $n(U)$ で割ると

$$\frac{0}{n(U)} \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq \frac{n(U)}{n(U)}$$

$$0 \leqq P(A) \leqq 1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となり、確率は必ず 0 以上 1 以下の値になることがわかります。とくに、

$$P(U) = \frac{n(U)}{n(U)} = 1 \quad \cdots\cdots \text{②} \qquad P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(U)} = 0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

となります。

また、図のように事象 $A,\ B$ が互いに排反であるようなときには、$A \cap B = \phi$ より

$$n(A \cap B) = n(\phi) = 0$$

であるので、和事象 $A \cup B$ に含まれる根元事象の個数は

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

と表され、この両辺を $n(U)$ で割ると、和事象 $A \cup B$ の確率 $P(A \cup B)$ は

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \cdots\cdots \text{④}$$

となります。

このようにして導き出された確率の性質を、**確率の基本性質**といい、確率の基本性質④ を**確率の加法定理**といいます。

① $0 \leqq P(A) \leqq 1$　　② $P(U) = 1$　　③ $P(\phi) = 0$

④ **確率の加法定理**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ （ただし、事象 A と B は互いに排反）

【例題 2 − 2】

袋の中に、白玉 2 個、赤玉 3 個が入っています。この中から 2 個の玉を取り出したとき、その 2 個が同じ色になる確率を求めなさい。

＜解説＞

2 個の玉の色が同じになるのは、

(i) 白玉 2 個を取り出す　　(ii) 赤玉 2 個を取り出す

という 2 つの場合が考えられるので、それぞれの事象を順に $A,\ B$ とし、全事象を U とします。

確率を考える際にはお馴染みのように、根元事象は同様に確からしくなければならないので、袋の中に入っている白玉と赤玉は

白 1, 白 2, 赤 1, 赤 2, 赤 3

のようにそれぞれ区別ができるものとして考えます。すると袋の中に入っている 5 個の玉から 2 個の玉を取り出す全事象の根元事象には

(白 1, 白 2),　(白 1, 赤 1),　(白 1, 赤 2),　(白 1, 赤 3),　(白 2, 赤 1),

(白 2, 赤 2),　(白 2, 赤 3),　(赤 1, 赤 2),　(赤 1, 赤 3),　(赤 2, 赤 3)

という 10 個の事象が考えられるので、

$$n(U) = 10$$

となります。これは 5 個の玉から順序は関係なく 2 つの玉を選べばよいことから

$$n(U) = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$$

のようにして計算で求めることができます。

(i) 白玉を 2 個取り出す事象 A

白玉を 2 個取り出す事象は

(白 1, 白 2)

という場合のみしか考えられないので、

$$n(A) = 1$$

となります。これは 2 個の白玉から順序は関係なく 2 つの玉を選べばよいことから

$$n(A) = {}_2\mathrm{C}_2 = 1$$

のようにして計算で求めることができます。

(ii) 赤玉を 2 個取り出す事象 B

赤玉を 2 個取り出す事象は

(赤 1, 赤 2),　(赤 1, 赤 3),　(赤 2, 赤 3)

という場合が考えられるので

$$n(B) = 3$$

となります。これは 3 個の白玉から順序は関係なく 2 つの玉を選べばよいことから

$$n(B) = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$$

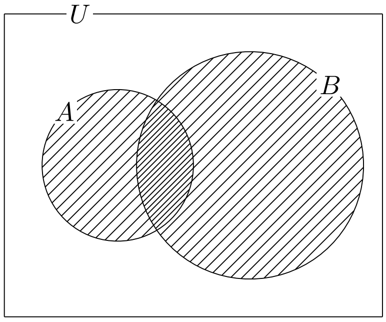
のようにして計算で求めることができます。

取り出した 2 個の玉が同じ色になる事象は、事象 A と B の和事象 $A \cup B$ で、A と B は互いに排反である

ので、確率の加法定理より、求める確率 $P(A \cup B)$ は、

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}^{5}} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

2.3 和事象の確率



2 つの事象 A と B が互いに排反でないような場合には、$A \cap B \fallingdotseq \phi$ であるので、和事象 $A \cup B$ には

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

という関係が成り立ちます。

全事象を U として、この両辺を $n(U)$ で割ると、

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \cdots\cdots \ ①$$

という関係が導き出されます。

また、事象 A と B が互いに排反であるような場合には、$A \cap B = \phi$ であるので、確率の基本性質③より

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

となります。このことから、①の式に $P(A \cap B) = 0$ を代入すれば、確率の加法定理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

を導き出すことができ、①の式は、事象 A と B が互いに排反でない場合のみで成り立つのではなく、互いに排反であるような場合にも成り立つことがわかります。

【例題 2 − 3】

トランプのカードが 52 枚あり、このカードの中から 1 枚のカードをひきます。

事象 A：ハートをひく　　事象 B：絵札をひく

とするとき、

事象 $A \cup B$：ハートをひくか絵札をひく

確率 $P(A \cup B)$ を求めなさい。

<解説>

全事象を U とすると、根元事象は同様に確からしいものでなければいけないので、

$$U = \{\diamondsuit 1,\ \cdots,\ \diamondsuit K,\ \clubsuit 1,\ \cdots,\ \clubsuit K,\ \heartsuit 1,\ \cdots,\ \heartsuit K,\ \spadesuit 1,\ \cdots,\ \spadesuit K\}$$

と考えると、

$$n(U) = 52$$

になります。

このとき、事象 A と B は

$$A = \{\heartsuit 1,\ \heartsuit 2, \heartsuit 3,\ \heartsuit 4,\ \heartsuit 5,\ \heartsuit 6,\ \heartsuit 7,\ \heartsuit 8,\ \heartsuit 9,\ \heartsuit 10,\ \heartsuit J,\ \heartsuit Q,\ \heartsuit K\}$$

$$B = \{\diamondsuit J,\ \diamondsuit Q,\ \diamondsuit K,\ \clubsuit J,\ \clubsuit Q,\ \clubsuit K,\ \heartsuit J,\ \heartsuit Q,\ \heartsuit K,\ \spadesuit J,\ \spadesuit Q,\ \spadesuit K\}$$

となるので、

$$n(A) = 13, \qquad n(B) = 12$$

しかし、事象 A と B は互いに排反ではなく、

事象 $A \cap B$: ハートで絵札をひく

つまり、$A \cap B = \{\heartsuit J,\ \heartsuit Q,\ \heartsuit K\}$ が存在し、

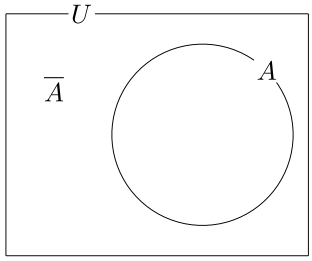
$$n(A \cap B) = 3$$

となります。

以上のことから、和事象の確率 $P(A \cup B)$ は、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{13}{52} + \frac{12}{53} - \frac{3}{52} \\ &= \frac{\cancel{22}^{\,11}}{\cancel{52}_{\,26}} = \frac{11}{26} \end{aligned}$$

2.4　余事象とその確率



ある試行において事象 A という 1 つの事象を考えるとき、事象 A に対して、「A が起こらない」という事象を A の**余事象**といい、$\overline{A}$ で表します。

全事象を U とすると、

$$A \cup \overline{A} = U$$

であるので、確率の基本性質②より

$$P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となります。また、事象 A と $\overline{A}$ は互いに排反であるので、

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

確率の加法定理より、

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

よって、①, ②より

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

という関係が成り立ち、余事象の確率 $P(\overline{A})$ は、

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

となります。

【例題 2 − 4】

トランプのカードが 52 枚あります。このうち 3 枚のカードをひいたとき、少なくとも 1 枚が絵札となる確率を求めなさい。

<解説>

52 枚のカードから 3 枚のカードをひいたとき、その 3 枚のカードの絵札の枚数には

(i) 絵札の枚数が 0 枚　(ii) 絵札の枚数が 1 枚　(iii) 絵札の枚数が 2 枚　(iv) 絵札の枚数が 3 枚

という 4 つの場合が考えられます。

また、「少なくとも 1 枚」が絵札となる場合は、「最も少なくて 1 枚」は絵札とならなければいけないということなので、「1 枚以上」絵札となる場合を考えます。つまり、4 つの場合のうちで、(ii), (iii), (iv) の 3 つの場合になります。

このことから、「絵札の枚数が 0 枚」となる事象 (i) を事象 A とすると、「少なくとも 1 枚が絵札」となる事象は $\overline{A}$ ということになります。

全事象を U とすると、52 枚のカードから 3 枚のカードをひくので、

$$n(U) = {}_{52}\mathrm{C}_3 = \frac{52 \cdot \cancel{51}^{17} \cdot \cancel{50}^{25}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 52 \cdot 17 \cdot 25$$

また、絵札の枚数が 0 枚となるには、絵札 12 枚を除いた 40 枚のカードから 3 枚のカードを選べばよいので、

$$n(A) = {}_{40}\mathrm{C}_3 = \frac{\cancel{40}^{20} \cdot \cancel{39}^{13} \cdot 38}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20 \cdot 13 \cdot 38$$

以上より、求める確率 $P(\overline{A})$ は

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{n(A)}{n(U)} \\ &= 1 - \frac{\cancel{20} \cdot \cancel{13} \cdot 38}{\cancel{52} \cdot 17 \cdot \cancel{25}^{5}} \\ &= 1 - \frac{38}{85} = \frac{47}{85} \end{aligned}$$

となります。

このように、直接確率を求めることが面倒な場合には、余事象の確率を考えることで簡単に求められる場合があります。そのため、直接と余事象どちらの方が簡単に確率を求められるのかを意識しながら、問題に取り組むようにしてください。

3　独立な試行の確率

3.1　独立な試行

2 つの試行 S, T について、それぞれの試行の結果が他の試行の結果に影響を与えないとき、試行 S, T は**独立**であるといいます。

【例題 3 − 1】

次の 2 つの試行 P, Q は独立ですか。

(1) 赤玉、白玉が入っている A, B 2 つの袋から玉を取り出す

P : A から玉を 1 つ取り出し、色を見る　　Q : B から玉を 1 つ取り出し、色を見る

(2) 赤玉、白玉が入っている 1 つの袋から玉を取り出す

P : 袋から玉を 1 つ取り出し、色を見る　　Q : ひき続いて袋から玉を取り出し、色を見る

（ただし、P の試行の後、玉はもとに戻さない。）

<解説>

(1) A, B 2 つの袋の中に、赤玉、白玉が何個ずつ入っているのかはわかりませんが、仮に

A = { 赤, 赤, 白 }　　B = { 赤, 白, 白 }

のように玉が入っているとします。
A の袋から 1 つの玉を取り出したとき、その玉の色が赤でも白でも、B の袋から赤玉が取り出しやすくなったり、白玉が取り出しやすくなったりするということはありませんね。つまり、試行 P の結果が試行 Q に影響することはないので、2 つの試行 P, Q は

「独立である」

ということができます。

(2) 袋の中に

{ 赤, 白, 白, 白, 白 }

のように玉が入っているとします。
袋から玉を 1 つ取り出し、その玉の色が赤であった場合、玉をもとにもどさなければ、袋の中の玉は

{ 白, 白, 白, 白 }

のようになっているので、ひき続いて袋から玉を取り出すとき、赤玉を取り出すことは絶対にありませんね。しかし、最初に取り出した玉が白玉であれば、袋の中は

{ 赤, 白, 白, 白 }

のようになっているので、次に赤玉を取り出すことは可能です。
このように、試行 P の結果が試行 Q の結果に影響を与えてしまうので、試行 P, Q は独立ではありません。

3.2 独立な試行の確率

2 つの試行 S, T が独立で、S で事象 A が起こり、T で事象 B が起こるとします。試行 S, T の全事象をそれぞれ U_S、U_T とすると、事象 A と B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は、積の法則から、

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= \frac{n(A)\times n(B)}{n(U_S)\times n(U_T)}\\ &= \frac{n(A)}{n(U_S)}\times\frac{n(B)}{n(U_T)}\\ &= P(A)\times P(B)\end{aligned}$$

となり、それぞれの確率の積で求めることができます。

【例題 3 − 2】

トランプのカード 52 枚の中から、1 枚ずつ続けて 2 枚のカードをひきます。1 枚目に抜いたカードをもとに戻すとすると、2 枚ともハートである確率を求めなさい。

＜解説＞

次のように 2 つの試行 S と T を

S : カードを 1 枚抜いてマークを見る　　T : 続けて、カードを 1 枚抜いてマークを見る

とすると、1 枚目に抜いたカードはもとに戻すので、試行 S の結果が試行 T には影響しません。つまり、試行 S, T は独立です。

また、カードを 1 枚抜いたときのマークは

$$\{\diamondsuit,\ \clubsuit,\ \heartsuit,\ \spadesuit\}$$

となるのでこれが根元事象になりますが、52 枚のカードの中にそれぞれのマークは 13 枚ずつあるので、これらの根元事象は同様に確からしいといえます。

以上のことから、2 つの試行 S, T を合わせた試行の根元事象は、積の法則から

$$4\times 4 = 16\ (\text{通り})$$

あり、2 枚ともハートのカードになるのは、積の法則より

$$1\times 1 = 1\ (\text{通り})$$

になるので、求める確率は

$$\frac{1}{16}\quad\left(=\frac{1\times 1}{4\times 4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$$

となります。

ここで、試行 S においてハートのカードが出る事象を A とし、試行 T においてハートのカードが出る事象を B とすると、それぞれの確率 $P(A)$, $P(B)$ は

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{4}$$

になるので、2 枚ともハートである確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

として求めることもできます。

この問題では、どちらの方法で解いてもそれほど労力はかわりませんが、それぞれの事象における確率が明確になっている場合には、確率の積で求める方法が有効になります。

3.3 独立な試行の確率と加法定理

【例題 3 − 3】

A, B 2 種類の袋があります。A には赤 3 個と白 7 個、B には赤 2 個と白 3 個が入っています。A, B それぞれの袋から玉を 1 個ずつ取り出すとき、同じ色の玉を取り出す確率を求めなさい。

＜解説＞

A, B の袋から玉を 1 個取り出すそれぞれの試行は、互いに影響しないので、独立な試行であるといえます。このとき、同じ色の玉を取り出すのは、2 つとも赤玉であるときと、2 つとも白玉であるときのいずれかです。それぞれの場合について確率を求めると、独立な試行であることから、

(i) A から赤玉、B からも赤玉を取り出すとき

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{50}$$

(ii) A から白玉、B からも白玉を取り出すとき

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{50}$$

(i), (ii) の事象は互いに排反であるので、求める確率は、確率の加法定理より、

$$\frac{6}{50} + \frac{21}{50} = \frac{27}{50}$$

3.4 確率が与えられた独立な試行

【例題 3 − 4】

A, B, C の 3 つの試験があります。それぞれの試験の合格率は、それぞれ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$ であるとき、次の確率を求めなさい。

(1) A, B, C 3 つの試験すべて合格する確率

(2) 2 つの試験に合格する確率

(3) 少なくとも 1 つの試験に合格する確率

＜解説＞

試験	A		B		C	
合否	◯	×	◯	×	◯	×
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$

問題文に与えられた条件から、合格した場合を「◯」、不合格だった場合を「×」で表すと、右の表のようにまとめることができます。
3 つの試験を受験する場合、実際の試験では、1 つの試験の結果が別の試験の結果に全く影響を及ぼさないということはないと思いますが、ここでは、それぞれの試験の結果が影響を及ぼさない、つまり、独立な試行であるとして確率を求めていきます。

(1) A, B, C 3 つの試験すべて合格する確率は、

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{70}$$

(2) 2 つの試験に合格するとき、次のような 3 つの場合を考えることができるので、それぞれの確率は、

① A と B に合格し、C が不合格　② A と C に合格し、B が不合格　③ B と C に合格し、A が不合格

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{70} \qquad \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{70} \qquad \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{70}$$

①, ②, ③のそれぞれの事象は互いに排反であるので、求める確率は、

$$\frac{6}{70} + \frac{1}{70} + \frac{4}{70} = \frac{11}{70}$$

(3) 少なくとも 1 つの試験に合格する場合というのは、

(i) 3 つの試験すべてに合格　(ii) 2 つの試験に合格　(iii) 1 つの試験のみ合格

という 3 つの場合のことです。(i), (ii) については、(1), (2) ですでに求めているので、残りの (iii) について確率を求めることを考えます。

1 つの試験のみに合格する場合は、A, B, C の試験のいずれか 1 つに合格すればよいので、次のようになります。

① A の試験に合格する確率　② B の試験に合格する確率　③ C の試験に合格する確率

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{70} \qquad \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{24}{70} \qquad \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{70}$$

(i), (ii), (iii) のそれぞれの事象は互いに排反であるので、求める確率は、

$$\left(\frac{6}{70}+\frac{24}{70}+\frac{4}{70}\right)+\frac{11}{70}+\frac{1}{70}=\frac{46}{70}=\frac{23}{35}$$

また、少なくとも 1 つの試験に合格するという事象は、すべての試験が不合格である事象の余事象であるので、そのことから、

$$1-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}=1-\frac{12}{35}=\frac{23}{35}$$

として確率を求めることもできます。

3.5　反復試行の確率

1回ずつの試行が他の試行に影響を与えない独立な試行を、同じ条件のもとで繰り返し行うとき、これを**反復試行**といいます。

1回の試行で事象 A の起こる確率 p とすると、事象 A の起こらない確率は余事象 $\overline{A}$ の確率なので、$1-p$ となります。

ここで、n 回の反復試行において A がちょうど r 回起こるときの確率を考えます。

1回目から r 回目までずっと A が起こり、残りはずっと A が起こらなかったとき、その確率は、

$$p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) = p^r(1-p)^{n-r}$$

となります。他にも、1回目は A が起こらず、2回目から r 回 A が起こり、残りはずっと A が起こらなかった場合には、

$$(1-p) \times p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times \cdots (1-p) = p^r(1-p)^{n-r}$$

のようになり、A が r 回起きれば、A が起きないのは $n-r$ 回になるので、どのような場合でも確率は同じ「$p^r(1-p)^{n-r}$」になります。

すると、問題になるのはこの「$p^r(1-p)^{n-r}$」という確率がいくつのパターン存在するのかということになります。A が起こるのは n 回のうちどこで r 回起きてもいいので、A の起こり方は、r 個の「p」と $n-r$ 個の「$1-p$」の並べ方の総数と同じだけあると考えることができ、

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r\text{（通り）}$$

もしくは、n 回のうちどこで A が起こるかを r 回選ぶ選び方と考えて、

$${}_n\mathrm{C}_r\text{（通り）}$$

だけあると考えることができます。

よって、n 回の反復試行で A がちょうど r 回起こる確率は、

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$

となります。

【例題3－5】

AとBの2人で将棋をし、先に3勝した方を優勝とします。1回の大戦で、A，Bの勝つ確率は、それぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ とするとき、Aの優勝する確率を次のように考えながら求めなさい。

(1) Aが3連勝して優勝する確率　(2) Aが3勝1敗で、4回目の対戦で優勝する確率

(3) Aが3勝2敗で、5回目の対戦で優勝する確率　(4) Aの優勝する確率

<解説>

(1) Aが3連勝して優勝する確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

(2) A が 3 勝 1 敗で、4 回目の対戦で優勝するためには、3 回目の対戦までに 2 勝 1 敗で、4 回目の対戦で A が勝てばよいので、その確率は、

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27} $$

(3) A が 3 勝 2 敗で、5 回目の対戦で優勝するためには、4 回目の対戦までに 2 勝 2 敗で、5 回目の対戦で A が勝てばよいので、その確率は、

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81} $$

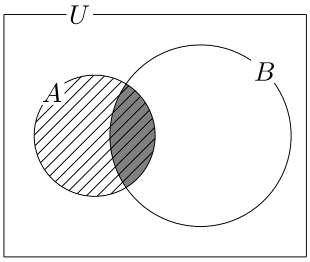
(4) A の優勝する場合は、3 連勝するとき、3 勝 1 敗のとき、3 勝 2 敗のときという 3 つの場合を考えることができ、それぞれの事象は互いに排反であるので、求める確率は、

$$ \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81} $$

4　条件付き確率

4.1　条件付き確率

ある試行にともなう 2 つの事象 A, B について、事象 A が起こったという状況のもとで事象 B が起こる確率を、**事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率**といい、$P_A(B)$ と表します。



この、事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率は、事象 A を全事象としたときの事象 B の起こる確率を表すので、次の式で定義されます。

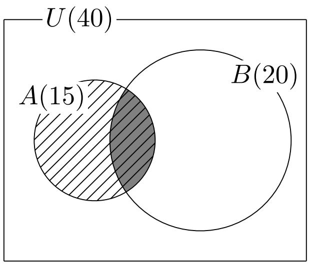
$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

【例題 4 − 1】

40 人のクラスで問題 A、問題 B からなる小テストをしたところ、A の正解者は 15 人、B の正解者は 20 人、2 問とも不正解であった人は 10 人でした。問題 A を正解した人が B も正解する確率を求めなさい。

<解説>

問題文のようすをベン図で表すと右のようになります。このことから、



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 15 + 20 - (40 - 10) = 5 \end{aligned}$$

問題 A を正解した人が B も正解する確率は、事象 A を全事象としたときの事象 B の起こる確率を求めればよいので、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \\ &= \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4.2 確率の乗法定理

事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率は、次の式で表されます。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

この式を変形すると、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \\ n(A)P_A(B) &= n(A \cap B) \\ \frac{n(A)}{n(U)}P_A(B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ P(A)P_A(B) &= P(A \cap B) \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

となり、①の式を**確率の乗法定理**といいます。独立な試行である場合では、

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

のようにして求めることができましたが、独立な試行でない場合は、この確率の乗法定理を利用して求めることになります。

また、①の式をさらに変形すると、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と表すこともできます。

【例題 4 − 2】

10 本のくじの中に 3 本の当たりくじが含まれています。このくじを A 君と B 君ががこの順に 1 本ずつひいたとき、B 君の当たる確率を求めなさい。ただし、ひいたくじはもとに戻さないとします。

＜解説＞

B 君が当たるとき、次の 2 つの場合が考えられます。それぞれの確率は、確率の乗法定理より、

(i) A 君が当たり、B 君も当たる

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P_A(B) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} \end{aligned}$$

(ii) A 君がはずれ、B 君が当たる

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90} \end{aligned}$$

(i), (ii) は互いに排反であるので、求める確率は、

$$\frac{6}{90} + \frac{21}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

となります。

このことから、A 君の当たる確率も B 君の当たる確率もともに $\frac{3}{10}$ になることがわかります。この結果からもわかるように、一般的に、くじびきはくじをひく順番にかかわらず等しい確率になります。