【数学 III】数列の極限

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　数列の極限

項が限りなく続く数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

を**無限数列**といい、記号 $\{a_n\}$ で表します。ここからは、特に断りがない場合、数列は無限数列を意味するものとします。

1.1　数列の収束・発散

数列 $\{a_n\}$ において、n が限りなく大きくなるにつれて、a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば、$\{a_n\}$ は α に**収束**するといい、次のように書き表します。（記号 ∞ は、「無限大」と読みます。）

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha$$

また、α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といいます。

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、$\{a_n\}$ は**発散**するといい、次のような場合があります。

(ｉ) **正の無限大に発散**：n を限りなく大きくすると、a_n が限りなく大きくなる

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \infty \qquad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ の極限は正の無限大})$$

(ii) **負の無限大に発散**：n を限りなく大きくすると、a_n が負で $|\,a_n\,|$ が限りなく大きくなる

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \qquad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow -\infty \qquad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ の極限は負の無限大})$$

(iii) **振動**：発散する数列が、正の無限大にも負の無限大にも発散しない（**数列 $\{a_n\}$ の極限はない**）

【例題 1 − 1】

第 n 項が次の式で表される数列の収束、発散について調べなさい。

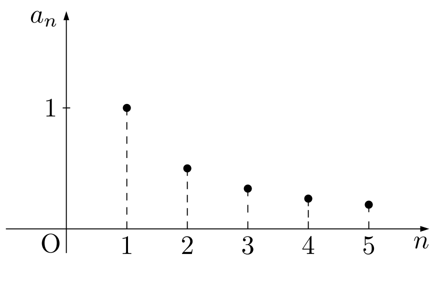
(1) $\dfrac{1}{n}$　　(2) $2n$　　(3) $(-1)^n$　　(4) $-n^2$

＜解説＞

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$

n を大きくするにつれ、a_n の値は 0 に近づくので、

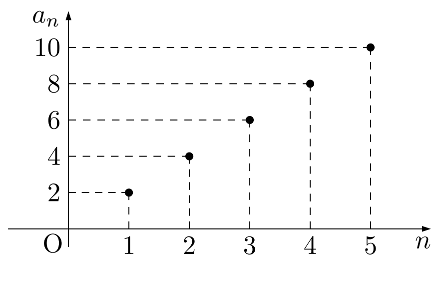
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{（0 に収束）}$$



(2) $a_n = 2n$

n を大きくするにつれ、a_n の値は大きくなるので、

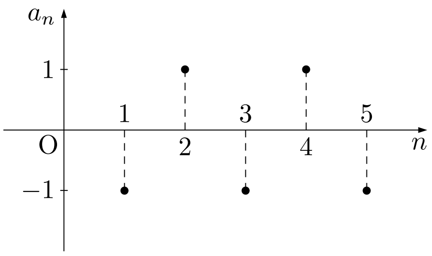
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{（正の無限大に発散）}$$



(3) $a_n = (-1)^n$

n を大きくするとき、a_n は 1 と -1 の値を交互にとり、一定の値に近づくことはありません。また、値が大きくなる（正の無限大に発散する）ことも小さくなる（負の無限大に発散する）こともないので、

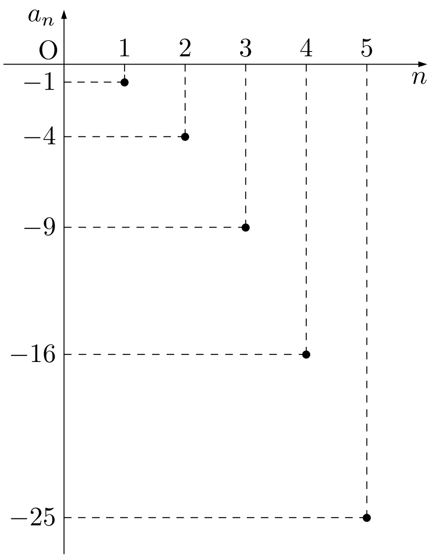
発散（振動する）



(4) $a_n = -n^2$

n を大きくするにつれ、a_n の値は小さくなるので、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \qquad \text{（負の無限大に発散）}$$



【演習 1 − 1】

第 n 項が次の式で表される数列の収束、発散について調べなさい。

(1) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　(2) -2^n　(3) $(-2)^n$　(4) $\dfrac{n-5}{2}$

1.2　数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき、次の性質が成り立ちます。

(i) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ （k は定数）

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$（ただし、$\beta \fallingdotseq 0$）

このように、収束する数列の和・差・積・商の極限値は、極限値の和・差・積・商に等しくなります。

【例題１－２】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)$　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n^2}\right)$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

<解説>

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2-0=2$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n^2}\right)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\right)\\ &= (1+0)\times(3+0)=3\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.3　数列の極限（整式）

「∞」は数ではないので、通常と同じように、

$$\infty - \infty = 0$$

と計算することはできません。そのため、「$\infty - \infty$」の形（**不定形**）のままでは極限を求めることができないので、極限が求められる形に変形する必要があります。

n の整式で表される数列の極限を求めるには、最高次の項（次数が最も高い項）でくくり出します。

【例題 1 － 3】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $n^2 - n$　　(2) $n^2 - 3n^3$

＜解説＞

(1) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^2-n) &= \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} n\\ &= \infty - \infty = 0\end{aligned}$$

最高次の項である「n^2」でくくり出し、次のようにして極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^2-n) &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= \infty \times (1-0) = \infty\end{aligned}$$

(2) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^2-3n^3) &= \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} 3n^3\\ &= \infty - \infty = 0\end{aligned}$$

最高次の項である「n^3」でくくり出し、次のようにして極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n^2-3n^3) &= \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n}-3\right)\\ &= \infty \times (0-3) = -\infty\end{aligned}$$

【演習 1 － 3】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $n^3 - n^2 - n$　　(2) $3n - n^2 + 1$

1.4 数列の極限（分数式）

「∞」は数ではないので、通常と同じように、

$$\frac{\infty}{\infty}=1$$

と計算することはできません。そのため、「$\frac{\infty}{\infty}$」の形（不定形）のままでは極限を求めることができないので、極限が求められる形に変形する必要があります。

n の分数式で表される数列の極限を求めるには、分母の最高次の項で分子・分母を割ります。

【例題 1 − 3】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $\dfrac{3n^2-2}{n+1}$ (2) $\dfrac{-2n^2+1}{5n^2}$ (3) $\dfrac{n+1}{n^3-1}$

＜解説＞

(1) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{n+1}&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2-2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)}\\&=\frac{\infty}{\infty}=1\end{aligned}$$

分母の最高次の項である「n」で分子・分母を割ることにより、次のようにして極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}\\&=\frac{\infty-0}{1+0}=\infty\end{aligned}$$

(2) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+1}{5n^2}&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-2n^2+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}5n^2}\\&=\frac{\infty}{\infty}=1\end{aligned}$$

分母の最高次の項である「n^2」で分子・分母を割ることにより、次のようにして極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+1}{5n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\dfrac{1}{n^2}}{5}\\&=\frac{-2+0}{5}=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(3) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3-1}&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-1)}\\&=\frac{\infty}{\infty}=1\end{aligned}$$

分母の最高次の項である「n^3」で分子・分母を割ることにより、次のようにして極限を求めます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1-\dfrac{1}{n^3}}$$

$$=\frac{0+0}{1-0}=0$$

【演習 1 − 4】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $\dfrac{2n^2+n+5}{n^2+3n+4}$ (2) $\dfrac{n^2-1}{n-1}$ (3) $\dfrac{4n^2+1}{3-4n^3}$

1.5 数列の極限（無理式）

「∞」は数ではないので、通常と同じように、

$$\infty - \infty = 0$$

と計算することはできません。そのため、「$\infty - \infty$」の形（**不定形**）のままでは極限を求めることができないので、極限が求められる形に変形する必要があります。

n の無理式で表される数列の極限を求めるには、次の関係を用いて無理式の有理化をします。

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$$

【例題 1 − 5】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

<解説>

(1) 収束する数列ではないので、次のようにして極限を求めることはできません。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} - \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} \\ &= \infty - \infty = 0\end{aligned}$$

分子を有理化することで極限を求めていきます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

(2) 分母は「$\infty - \infty$」の形（不定形）であるので、有理化して極限を求めていきます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{(n+1)-(n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2} = \infty\end{aligned}$$

【演習 1 − 5】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $\sqrt{n^2+n+1}-n$ (2) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (3) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

1.6 数列の極限と不等式

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において、すべての n について $a_n \leqq b_n$ （または、$a_n < b_n$）のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ になります。そのため、等式による変形をしても極限が定まらないようなときには、不等式をつくることで極限を考えることができます。

【例題 1 − 6】

h を正の定数とするとき、次の極限を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}(1+h)^n$$

<解説>

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

より、$(1+h)^n$ は次のように表すことができます。

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n$$

このことから、$h > 0$ のとき

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh \ \cdots\cdots\ ①$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$$

となるので、①より、

$$\lim_{n\to\infty}(1+h)^n = \infty$$

1.7 はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束するとき、数列の極限には次の性質が成り立ちます。

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき、すべての n について $a_n \leqq b_n$ （または、$a_n < b_n$）であるならば $\alpha \leqq \beta$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であるとき、すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$（「$\leqq$」ではなく、「$<$」でもOK）であるならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ （**はさみうちの原理**）

直接求めることが難しい数列の極限では、この性質を利用して求めることが有効になります。

【例題 1 − 7】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+h)^n}$ （h は正の定数）

＜解説＞

(1) $-1 \leqq \sin n\theta \leqq 1$ より、

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin n\theta}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

となるので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = 0$$

(2) 二項定理より、

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

h は正の定数なので、

$$0 < \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{2}{n(n-1)h^2}$$

$$0 < \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2} = 0$$

となるので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+h)^n} = 0$$

【演習１－７】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta-\cos n\theta}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$

2 無限等比数列

2.1 無限等比数列の極限

初項 r、公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになります。

(i) $r>1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$
$r=1+h\ (h>0)$ とおくと、

$$r^n=(1+h)^n \geqq 1+nh$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

(ii) $r=1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1^n=1$

(iii) $0<r<1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$
$r=\dfrac{1}{s}$ とおくと、$s>1$ であるので、(i) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$
よって、

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$$

(iv) $r=0$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 0^n=0$

(v) $-1<r<0$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$
$r=-s$ とおくと、$0<s<1$ であるので、(iii) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s^n=0$
よって、

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty}(-s)^n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n s^n=0$$

(vi) $r=-1$ のとき：振動する（極限はない）
$r^n=(-1)^n$ は、1 と -1 を交互にとるので振動し、極限はありません。

(vii) $r<-1$ のとき：振動する（極限はない）
$r=-s$ とおくと、$s>1$ であるので、(i) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$
また、$r^n=(-s)^n=(-1)^n s^n$ より、r^n の符号は交互に変わるため $\{r^n\}$ は振動し、極限はありません。

以上のことから、数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようにまとめることができます。

(i) $r>1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$　　(ii) $r=1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$

(iii) $|r|<1$ のとき：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$　　(iv) $r\leqq -1$ のとき：振動する（極限はない）

【例題 2 − 1】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　(2) $(-2)^n$　(3) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$　(4) $(\sqrt{3})^n$

＜解説＞

(1) $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ であるので、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(2) $-2 < -1$ であるので、極限はない（振動する）。

(3) $\left|-\dfrac{3}{4}\right| < 1$ であるので、

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

(4) $\sqrt{3} > 1$ であるので、

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n = \infty$$

2.2　数列の極限（指数）

「$\infty-\infty$」や「$\dfrac{\infty}{\infty}$」の形（**不定形**）のままでは極限を求めることができないので、極限が求められる形に変形する必要があります。

n の整式で表される数列の極限を求めるには、最高次の項（次数が最も高い項）でくくり出しましたが、r^n を含む同じような形の式においても同様にして、底の絶対値が最も大きい項でくくり出します。

また、n の分数式で表される数列の極限を求めるには、分母の最高次の項で分子・分母を割りましたが、r^n を含む同じような式においても同様にして、分母の底の絶対値が最も大きい項で分子・分母を割ります。

【例題 2 − 2】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) 5^n-3^n　(2) $\dfrac{7+5^{2n}}{9^n}$　(3) $\dfrac{5^n-3^n}{5^n-4^n}$　(4) $\dfrac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$

＜解説＞

(1) 5^n でくくり出して、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)&=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\\&=\infty\times(1-0)=\infty\end{aligned}$$

(2) $5^{2n}=25^n$ として、指数を n にそろえて考えます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{7+5^{2n}}{9^n}&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{7}{9^n}+\left(\frac{25}{9}\right)^n\right\}\\&=0+\infty=\infty\end{aligned}$$

(3) 5^n で分子・分母を割って、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n-4^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}\\&=\frac{1-0}{1-0}=1\end{aligned}$$

(4) 5^n で分子・分母を割って、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\\&=\frac{0-1}{0+1}=-1\end{aligned}$$

【演習 2 − 2】

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べなさい。

(1) $(-3)^n+2^n$　(2) $\dfrac{5^n-10^n}{3^{2n}}$　(3) $\dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}$

2.3 無限等比数列の収束条件

数列 $\{r^n\}$ の極限は次のように分類することができます。

(i) $r > 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

(ii) $r = 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

(iii) $|r| < 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

(iv) $r \leqq -1$ のとき：振動する（極限はない）

このとき、(ii), (iii) で数列 $\{r^n\}$ は収束するので、公比 r である無限等比数列の収束条件は、次のように表すことができます。

$$-1 < r \leqq 1$$

【例題 2 − 3】

無限等比数列

$$3,\ 6a,\ 12a^2,\ 24a^3,\ \cdots$$

が収束するような a の値の範囲を求めなさい。また、そのときの極限値を求めなさい。

＜解説＞

与えられた数列は、初項 3、公比 $2a$ の無限等比数列なので $\left\{3(2a)^{n-1}\right\}$
この数列が収束するための必要十分条件は、

$$-1 < 2a \leqq 1$$

つまり、

$$-\frac{1}{2} < a \leqq \frac{1}{2}$$

また、数列の極限値は、

- $2a = 1$、つまり、$a = \frac{1}{2}$ のとき：$\lim_{n\to\infty} 3(2a)^{n-1} = 3 \cdot 1 = 3$
- $-1 < 2a < 1$、つまり、$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ のとき：$\lim_{n\to\infty} 3(2a)^{n-1} = 3 \cdot 0 = 0$

【演習 2 − 3】

数列 $\left\{(x^2 + 2x - 1)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を求めなさい。また、そのときの極限値を求めなさい。

2.4　累乗を含む式で表される数列の極限

数列 $\{r^n\}$ の極限は次のように分類することができます。

(i) $r > 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$　　(ii) $r = 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

(iii) $|r| < 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$　　(iv) $r \leqq -1$ のとき：振動する（極限はない）

このように、r の値により極限は異なるので、r^n を含む式の極限を求めるためには、各場合に分けて考えていきます。

【例題 2 − 4】

$a_n = \dfrac{1-r^n}{1+r^n}$ である数列 $\{a_n\}$ の極限を、次の各場合について調べなさい。

(i) $r > 1$　　(ii) $r = 1$　　(iii) $-1 < r < 1$　　(iv) $r < -1$

<解説>

$r = -1$ のとき、n が奇数であると (分母) $= 0$ となり極限をもたないため、ここでは考えません。

(i) $r > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ になります。このとき、数列 $\{a_n\}$ の極限は、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}\\ &= \frac{1-\infty}{1+\infty} = -\frac{\infty}{\infty}\end{aligned}$$

と不定形になるので、分子・分母を r^n で割ることで数列 $\{a_n\}$ の極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{r^n}-1}{\dfrac{1}{r^n}+1} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{\infty} = 0\right)\\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1\end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ になるので、数列 $\{a_n\}$ の極限は、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}\\ &= \frac{1-1}{1+1} = 0\end{aligned}$$

(iii) $-1 < r < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ になるので、数列 $\{a_n\}$ の極限は、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}\\ &= \frac{1-0}{1+0} = 1\end{aligned}$$

(iv) $r < -1$ のとき、r^n の極限はないので、このままでは数列 $\{a_n\}$ の極限を求めることができません。しか

し、$\left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$ であるので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ になります。このことから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{r^n}-1}{\dfrac{1}{r^n}+1}\\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1\end{aligned}$$

【例題 2 − 4】

次の数列 $\{a_n\}$ の極限を調べなさい。

(1) $a_n = \dfrac{r^{-n}-r^n}{r^n+r^{-n}}$ （ただし、$r > 0$）　　(2) $a_n = \cos^n\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

2.5　隣接 2 項間の漸化式と極限

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し、その極限値が α だとします。このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ であれば $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$ となるので、漸化式から、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}(pa_n+q)\\ \alpha &= p\alpha+q \ \cdots\cdots \ ①\end{aligned}$$

という関係が成り立ちます。このように、数列 $\{a_n\}$ が収束するとき、その極限値は①を満たす α になります。

【例題 2 − 5】

次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+1$

＜解説＞

(1) 特性方程式を利用すると、漸化式を次のように変形することができます。

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & = \dfrac{1}{3}a_n+2\\ -) & \alpha & = \dfrac{1}{3}\alpha+2\\ \hline & a_{n+1}-\alpha & = \dfrac{1}{3}(a_n-\alpha) \ \cdots\cdots \ ① \end{array}$$

また、α の値は特性方程式より、

$$\begin{aligned}3\alpha &= \alpha+6\\ 2\alpha &= 6\\ \alpha &= 3\end{aligned}$$

となるので、①の式は、

$$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

と表すことができ、

$$a_1-3=1-3=-2$$

であるので、数列 $\{a_n-3\}$ は、初項 -2、公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列になります。よって、

$$\begin{aligned}a_n-3 &= -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ a_n &= -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\end{aligned}$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ の極限は、

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\right\}=3$$

(2) 特性方程式を利用すると、漸化式を次のように変形することができます。

$$\begin{array}{lrl} & a_{n+1} & = 3a_n + 1 \\ -) & \alpha & = 3\alpha + 1 \\ \hline & a_{n+1} - \alpha & = 3(a_n - \alpha) \ \cdots\cdots \ ② \end{array}$$

また、α の値は特性方程式より、

$$\begin{aligned} \alpha &= 3\alpha + 1 \\ -2\alpha &= 1 \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、②の式は、

$$a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(a_n + \frac{1}{2}\right)$$

と表すことができ、

$$a_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

であるので、数列 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ は、初項 $\frac{3}{2}$、公比 3 の等比数列になります。よって、

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ の極限は、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}\right) = \infty$$

【演習 2 − 5】

次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ について、下の問いに答えなさい。

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくとき、b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2) a_n を n の式で表しなさい。

(3) $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めなさい。

3　無限級数

3.1　無限級数の収束・発散

無限数列 $\{a_n\}$ の各項を順に $+$ で結んだ式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**といい、記号を用いて次のように表します。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

このとき、初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を第 n 項までの**部分和**といい、部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき、極限値 S をこの無限級数の和と定義します。

このことから、無限級数の収束、発散は次の手順により調べることができます。

(ｉ) 部分和 S_n を求める。
(ii) 数列 $\{S_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求める。

【例題 3 − 1】

次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots$

＜解説＞

初項 a_1 から第 n 項 a_n までの部分和を S_n とします。

(1) 第 n 項 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

と表せるので、部分和 S_n は、

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

となるので、この無限級数は収束し、その和は 1 になります。

(2) 第 n 項 a_n は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \end{aligned}$$

と表せるので、部分和 S_n は、

$$S_n = (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

となるので、この無限級数は発散します。

【演習 3 − 1】

次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots$

3.2 無限級数の収束・発散条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき、その和を S、第 n 項までの部分和を S_n とします。a_n と S_n には、

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

という関係が成り立つので、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})\\ &= S - S = 0\end{aligned}$$

このことから、次の関係が成り立ちます。

$$\text{無限級数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{が収束する} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

また、命題とその対偶の真偽は一致するので、この命題の対偶から次の関係も成り立ちます。

$$\text{数列 }\{a_n\}\text{ が 0 に収束しない} \Longrightarrow \text{無限級数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{は発散する}$$

【例題 3 − 2】

次の無限級数が発散することを示しなさい。

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\cdots$　　(2) $1-3+5-7+9-\cdots$

＜解説＞

(1) 第 n 項 a_n は、$a_n = \dfrac{n}{n+1}$ と表すことができ、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

このことから、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないので、無限級数は発散します。

(2) 第 n 項 a_n は、$a_n = (-1)^{n-1}(2n-1)$ と表すことができ、数列 $\{a_n\}$ は振動します。このことから、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないので、無限級数は発散します。

3.3 無限等比級数の和

初項 a、公比 r の無限等比数列 $\{a_n\}$ から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を**無限等比級数**といいます。

$a = 0$ のとき、無限等比数列 $\{a_n\}$ の各項は 0 になるので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

より、無限等比級数は収束し、その和は 0 になります。

$a \fallingdotseq 0$ のときは、この無限等比級数の第 n 項までの部分和 S_n を考えると、次のように表すことができます。

① $r = 1$ のとき：$S_n = na$　　② $r \fallingdotseq 1$ のとき：$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

また、数列 $\{r^n\}$ の極限は次のように分類することができるので、そのことから、無限等比級数の和は次のようになります。

(i) $r > 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

②より数列 $\{S_n\}$ は発散するので、無限等比級数も発散します。

(ii) $r = 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$　　$(\lim_{n\to\infty} a_n = a(\fallingdotseq 0))$

①より数列 $\{S_n\}$ は発散するので、無限等比級数も発散します。

(iii) $|r| < 1$ のとき：$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

②より $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$ となるので、無限等比級数は収束し、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

(iv) $r \leqq -1$ のとき：振動する（極限はない）

②より数列 $\{S_n\}$ は発散するので、無限等比級数も発散します。

以上のことから、$a \fallingdotseq 0$ のときの無限等比級数の和は、次のようにまとめることができます。

(i) $|r| < 1$ のとき：収束して、和は $\dfrac{a}{1-r}$　　(ii) $|r| \geqq 1$ のとき：発散する

【例題 3 − 3】

次の無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めなさい。

(1) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots$　　(2) $2 + 3 + \dfrac{9}{2} + \dfrac{27}{4} + \cdots$

＜解説＞

初項 a、公比 r の無限等比級数の収束・発散は、次の手順により考えます。

(i) 初項 a を確認する：$a = 0$ ならば収束。$a \fallingdotseq 0$ ならば (ii) の手順へ。

(ii) 公比 r を確認する：$|r|<1$ ならば収束。$|r|\geqq 1$ ならば発散。

(1) 初項は 1、公比 r は、

$$r=\left(-\frac{1}{3}\right)\div 1=-\frac{1}{3}$$

より、$|r|<1$ であるので、無限等比級数は収束します。また、であるので、その和は、

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

(2) 初項は 2、公比 r は、

$$r=3\div 2=\frac{3}{2}$$

より、$|r|>1$ であるので、無限等比級数は発散します。

【演習 3 − 3】

次の無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めなさい。

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ (2) $1+\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\cdots$ (3) $0.2+0.18+0.162+\cdots$

(4) $1-1+1-1+\cdots$ (5) $1-2+4-8+\cdots$ (6) $12-6\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}+\cdots$

3.4 無限等比級数の収束条件

初項 a、公比 r の無限等比級数の収束・発散については、次のように分類することができます。

(i) $a=0$ のとき：収束して、和は 0
(ii) $a \fallingdotseq 0$, $|r|<1$ のとき：収束して、和は $\dfrac{a}{1-r}$
(iii) $a \fallingdotseq 0$, $|r| \geqq 1$ のとき：発散する

このことから、無限等比級数は (i), (ii) のときに収束します。

【例題 3 − 4】

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。また、そのときの和を求めなさい。

(1) $1-2x+4x^2-8x^3+\cdots$　　(2) $1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x^3}{27}+\cdots$

<解説>

(1) 初項が 1、公比が $-2x$ であるので、この無限等比級数が収束するための条件は、

$$-1<-2x<1$$
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

このとき、求める和は、

$$\frac{1}{1-(-2x)}=\frac{1}{2x+1}$$

(2) 初項が 1、公比が $\dfrac{x}{3}$ であるので、この無限等比級数が収束するための条件は、

$$-1<\frac{x}{3}<1$$
$$-3<x<3$$

このとき、求める和は、

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{3}{3-x}$$

【演習 3 − 4】

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。また、そのときの和を求めなさい。

(1) $4+4(1-x)+4(1-x)^2+\cdots$　　(2) $x+x(x^2-x+1)+x(x^2-x+1)^2+\cdots$

3.5　無限級数の和の性質

収束する数列の極限値の性質（収束する数列の和・差・積・商の極限値は、極限値の和・差・積・商に等しい）から、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ であるとき、次の性質が成り立ちます。

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$ （k は定数）

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} ka_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} ka_l \\ &= \lim_{n\to\infty} k\sum_{l=1}^{n} a_l = kS\end{aligned}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = S + T\end{aligned}$$

【例題 3 − 5】

次の無限級数の和を求めなさい。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)$$

<解説>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ は初項 1、公比 $\frac{1}{3}$、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は初項 $\frac{1}{2}$、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であるので、ともに収束します。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

【演習 3 − 5】

次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 2^n + (-3)^n}{5^n}$