【数学 III】関数の極限

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　関数の極限

1.1　関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ には次のような状態が考えられます。

(i) ある一定の値 α に限りなく近づく
このとき，$f(x)$ は α に**収束する**といい，次のように書き表します。また、α を関数 $f(x)$ の**極限値**または**極限**といいます。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

$f(x)$ が x の整式であるとき，次の関係が成り立ちます。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(ii) $f(x)$ の値が限りなく大きくなる
このとき，$f(x)$ は**正の無限大に発散する**，または**極限は正の無限大**であるといい，次のように書き表します。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{または} \qquad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \infty$$

(iii) $f(x)$ の値が負で，その絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなる
このとき、$f(x)$ は**負の無限大に発散する**，または**極限は負の無限大**であるといい、次のように書き表します。

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \text{または} \qquad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow -\infty$$

(iv) (i)〜(iii) のいずれでもない
このとき，$f(x)$ の**極限はない**といいます。

【例題 1 − 1】

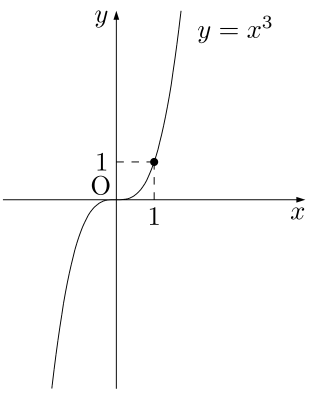
次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} x^3$　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3$　(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^3$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

＜解説＞

関数 $y=x^3$ のグラフは右図のようになるので，(1)〜(3) の極限は、このグラフを利用して考えます。



(1) x が 1 に限りなく近づくとき，y の値は 1 に限りなく近づきます。このことから，

$$\lim_{x\to 1} x^3 = 1 \qquad \text{（1 に収束）}$$

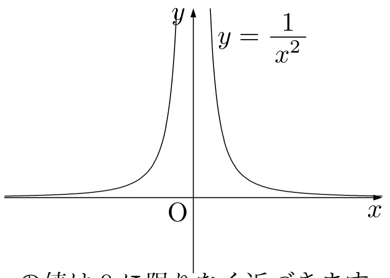
(2) x が限りなく大きくなるとき，y の値も限りなく大きくなります。このことから，

$$\lim_{x\to \infty} x^3 = \infty \qquad \text{（正の無限大に発散）}$$

(3) x が負の値をとりながらその絶対値 $|x|$ が限りなく大きくなるとき，y の値も，負の値をとりながらその絶対値 $|y|$ は限りなく大きくなります。このことから、

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \text{（負の無限大に発散）}$$

関数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフは右図のようになるので，(4)〜(6) の極限は、このグラフを利用して考えます。



(4) x が限りなく大きくなるとき，y の値は 0 に限りなく近づきます。このことから，

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{（0 に収束）}$$

(5) x が負の値をとりながらその絶対値 $|x|$ が限りなく大きくなるとき，y の値は 0 に限りなく近づきます。このことから，

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{（0 に収束）}$$

(6) x が 0 に限りなく近づくとき，y の値は限りなく大きくなります。このことから，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{（正の無限大に発散）}$$

1.2　関数の極限の性質

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ （α, β は有限の値）とするとき，関数の極限について次のような性質が成り立ちます。

(i) $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$ （ただし，k は定数）
(ii) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$, $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
(iii) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （ただし，$\beta \fallingdotseq 0$）

【例題 1 − 2】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1)$　(2) $\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2)(3x - 1)$　(3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - x + 1}$

＜解説＞

一般に，関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a について，次の関係が成り立ちます。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

そのため，関数の極限の性質を用いることで，収束する関数の極限は，限りなく近づける x の値を関数に代入することで求めることができます。

(1) $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 5$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2)(3x - 1) &= \lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) \times \lim_{x \to 2} (3x - 1) \\ &= (2^2 - 2 + 2)(3 \cdot 2 - 1) = 20\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} &= \frac{\lim_{x \to 1} (2x + 1)}{\lim_{x \to 1} (x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 - 1 + 1} = 3\end{aligned}$$

【演習 1 − 2】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$　(2) $\lim_{x \to 3} 2^x$　(3) $\lim_{x \to \frac{1}{9}} \log_3 x$

1.3 $\dfrac{0}{0}$ の極限

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ において，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ に $x=a$ を代入したときに $\dfrac{0}{0}$ の形（**不定形**）になると，このままでは極限を求めることができません。そこで，極限を求められる形に変形する必要があります。

$f(x), g(x)$ が x の整式である場合，$f(a)=0, g(a)=0$ であれば，因数定理より，$f(x)$ と $g(x)$ は $x-a$ を因数に持つので，分子・分母を $x-a$ で割ることにより，極限を求められる形（不定形ではない形）に変形することができます。

また，無理式を含む場合には，有理化をすることで極限を求められる形に変形します。

【例題 1 − 3】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

＜解説＞

(1) $x=1$ のとき，

$$x^2-x=1^2-1=0, \qquad x^2+x-2=1^2+1-2=0$$

となるので，$\dfrac{0}{0}$ の形（不定形）になります。そこで，次のように式変形をして極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(2) $x=0$ のとき，

$$1-\sqrt{1-x}=1-\sqrt{1}=0$$

となるので，$\dfrac{0}{0}$ の形（不定形）になります。分子に無理式が含まれているので，有理化して極限を求めます。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【演習 1 − 3】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

1.4 $\dfrac{\infty}{\infty}$ の極限

$x \longrightarrow \infty$（または，$x \longrightarrow -\infty$）のとき，関数の極限が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形（不定形）になると，このままでは極限を求めることができません。そこで，分子・分母を分母の最高次の項で割ると $\dfrac{\text{定数}}{\infty}(=0)$ となる項を作ることができるので，極限を求められる形（不定形ではない形）に変形することができます。

【例題 1 − 4】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x+1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$

＜解説＞

(1) 分子・分母を x で割って，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(2) 分子・分母を x で割って，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\infty-3}{1+0}=\infty$$

(3) 分子・分母を x^2 で割って，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2-0+0}{1+0}=2$$

【演習 1 − 4】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{6x^2+3x+4}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x+5)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

1.5　$\infty - \infty$ の極限

$x \longrightarrow \infty$（または，$x \longrightarrow -\infty$）のとき，関数の極限が $\infty - \infty$ の形（**不定形**）になると，このままでは極限を求めることができません。そこで，整式では最高次の項でくくり出し，無理式では有理化を行うことで，$\dfrac{\text{定数}}{\infty}(=0)$ となる項を作ることができ，極限を求められる形（不定形ではない形）に変形することができます。

【例題 1 − 5】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-3x+1)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+5}-x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-x)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$

＜解説＞

(1) $\infty - \infty$ の不定形になるので，最大次数の項 x^3 でくくり出して，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-3x+1) &= \lim_{x\to\infty}x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\\ &= \infty\times(1+0-0+0)=\infty\end{aligned}$$

(2) $\infty - \infty$ の不定形になるので，分子の有理化をします。また，そこで得られる式が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので，分母の最高次の項 x で分子・分母を割ります。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+5}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+5-x^2)}{\sqrt{x^2+5}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+1}\\ &= \frac{5}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(3) $\infty - \infty$ の不定形になるので，分子の有理化をします。また，そこで得られる式が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので，分母の最高次の項 x で分子・分母を割ります。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+2}-x)(\sqrt{x^2+x+2}+x)}{\sqrt{x^2+x+2}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}\\ &= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4) $\infty-\infty$ の不定形になるので，分子の有理化をします。また，そこで得られる式が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので，分母の最高次の項 x で分子・分母を割ります。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x-1-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{8+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{8+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}}=4\end{aligned}$$

【演習 1 − 5】

$x \longrightarrow \infty$ のとき，$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-kx$ が収束するような正の定数 k の値を求めなさい。また，そのときの $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい。

1.6 極限値から係数決定

関数 $f(x)$, $g(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$ であるとき，次の関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)\\&=\alpha\times 0=0\end{aligned}$$

このことから，極限値から係数を決定するような問題では，次のような手順により求めます。

(i) 分母 $\longrightarrow 0$ なら 分子 $\longrightarrow 0$
(ii) (i) から係数の関係式を求める
(iii) (ii) の関係式を用いて極限が求められる形（$\dfrac{0}{0}$ の不定形ではない形）に変形する
(iv) 極限値の式から係数を決定する

【例題 1 − 6】

等式 $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つように，定数 a, b の値を定めなさい。

＜解説＞

$\displaystyle\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)=0$ であるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}(ax+b)&=0\\4a+b&=0\\b&=-4a\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to 4}\frac{ax-4a}{\sqrt{x}-2}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{a(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{a(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}a(\sqrt{x}+2)=4a\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}4a&=12\\a&=3\end{aligned}$$

これを①に代入して，

$$b=-4\times 3=-12$$

【演習 1 − 6】

次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を定めなさい。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + ax + b}{x + 2} = 3$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x+1} - b}{x - 1} = 1$

1.7 右側極限と左側極限

変数 x が $x > a$ の範囲で a に限りなく近づく（右側から a に近づく）とき，

$$x \longrightarrow a+0 \qquad (a=0 \text{ の場合は，} x \longrightarrow +0)$$

$x < a$ の範囲で a に限りなく近づく（左側から a に近づく）とき，

$$x \longrightarrow a-0 \qquad (a=0 \text{ の場合は，} x \longrightarrow -0)$$

と書き表し，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ を**右側極限**，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ を**左側極限**といいます。

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) \fallingdotseq \lim_{x\to a-0} f(x)$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しません（$f(x)$ の極限はない）。

【例題 1 − 7】

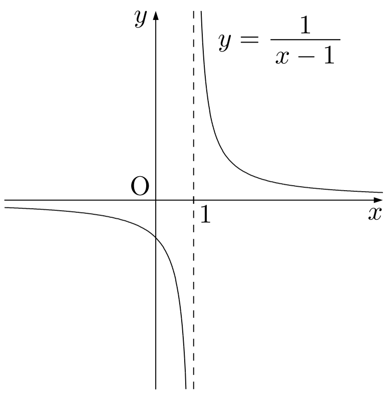
次の極限を調べなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1}$

＜解説＞

$y = \dfrac{1}{x-1}$ のグラフは右のようになります。

$x > 1$ の範囲で 1 に限りなく近づくとき，y の値は限りなく大きくなり，$x < 1$ の範囲で 1 に限りなく近づくとき，y の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなります。このことから，



(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$

【演習 1 − 7】

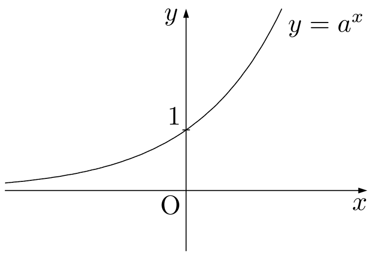
次の極限を調べなさい。ただし，$[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数を表します。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} [x]$

1.8 指数関数・対数関数の極限

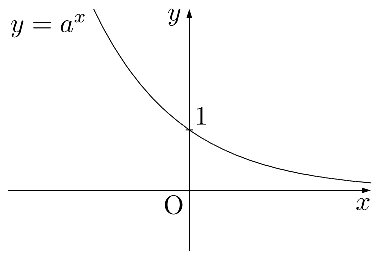
指数関数 $y=a^x$ のグラフを考えることにより，指数関数 a^x の $x\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow-\infty$ のときの極限は次のようになります。

(i) $a>1$ のとき



$$\lim_{x\to\infty} a^x=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=0$$

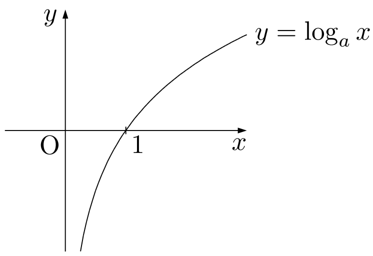
(ii) $0<a<1$ のとき



$$\lim_{x\to\infty} a^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$$

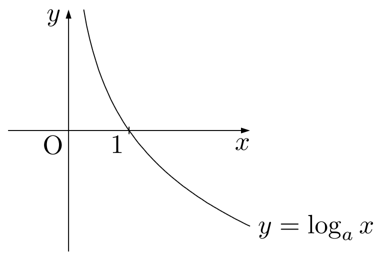
また，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフを考えることにより，対数関数 $\log_a x$ の $x\longrightarrow\infty$, $x\longrightarrow+0$ のときの極限は次のようになります。

(i) $a>1$ のとき



$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$$

(ii) $0<a<1$ のとき



$$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log_a x=\infty$$

【例題 1 － 8】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2})^x$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{2}} x$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

<解説>

(1) 底は $\sqrt{2}>1$ であるので，

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2})^x=\infty$$

(2) 底は $0<\dfrac{2}{3}<1$ であるので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$

(3) 底は $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ であるので，

$$\lim_{x \to +0} \log_{\frac{1}{2}} x = \infty$$

(4) 底は $2 > 1$ で，$x \longrightarrow +0$ のとき $\dfrac{1}{x} \longrightarrow \infty$ であるので，

$$\lim_{x \to +0} \log_2 \frac{1}{x} = \infty$$

【演習 1 − 8】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot 3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to -0} \frac{2^{\frac{2}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \{\log_{10}(x+2) - \log_{10} x\}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \{\log_{10} |x^2 - 4| - \log_{10} |x^2 - x - 2|\}$

2　三角関数と極限

三角関数の角の単位には弧度法が用いられます。

2.1　三角関数の極限と不等式

関数の極限には次の性質が成り立ちます。

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ であるとき，$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$（または，$f(x) < g(x)$）であるならば $\alpha \leqq \beta$

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ であるとき，$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$（「$\leqq$」ではなく，「$<$」でも OK）であるならば $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ （**はさみうちの原理**）

直接求めることが難しい関数の極限では，この性質を利用して求めることが有効になります。

【例題 2 − 1】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$　　(2) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

＜解説＞

(1) $0 \leqq |\sin x| \leqq 1$ であるので，

$$0 \leqq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leqq \frac{1}{|x|}$$

このとき，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

となるので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$$

よって，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(2) $0 \leqq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq 1$ であるので，

$$0 \leqq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x|$$

このとき，

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

となるので，はさみうちの原理より，

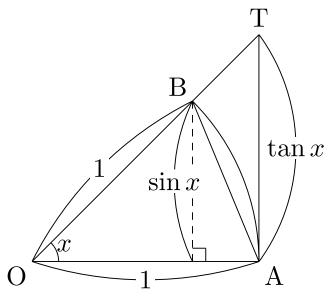
$$\lim_{x \to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

よって，

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

2.2 三角関数の極限（公式）

右の図のように，半径 1 の円 O の周上に $\angle\mathrm{AOB} = x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる 2 点 A, B をとり，点 A における円の接線と半直線 OB との交点を T とします。このとき，



$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$$
$$\text{扇形 OAB} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot x = \frac{1}{2}x$$
$$\triangle\mathrm{OAT} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2}\tan x$$

となるので，面積の大小関係から，

$$\triangle\mathrm{OAB} < \text{扇形 OAB} < \triangle\mathrm{OAT}$$
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$
$$\sin x < x < \tan x$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin x > 0$ であるので，各辺を $\sin x$ で割ると，

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

さらに逆数をとると，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x = 1$ であるので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ \cdots\cdots \ ①$$

また，$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき，$x = -t$ とおくと，

$$x \longrightarrow -0 \text{ のとき } t \longrightarrow +0$$

であるので，

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1 \ \cdots\cdots \ ②$$

よって，①, ②より，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

という関係が成り立ち，これを公式として利用します。

【例題 2 − 2】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x}$

＜解説＞

公式を利用するときは，次のように ◯ には同じものがあてはまるので，この形になるように変形します。

$$\lim_{\circ\to 0}\frac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}=1$$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$

$\displaystyle=2\cdot 1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{1}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{x}+\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 2x}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\dfrac{\sin 7x}{7x}+5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}{2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}$

$\displaystyle=\frac{7\cdot 1+5\cdot 1}{2\cdot 1}=6$

【演習 2 − 2】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2.3 三角関数の極限（置き換え）

三角関数の極限を求めるには，公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用することを考えます。このとき，次のように ◯ には同じものが入り，さらに，「◯ $\longrightarrow 0$」という形を作らなければなりません。

$$\lim_{\circ\to 0}\frac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}=1$$

そのため，次のように文字を置き換えることにより，「$\theta\longrightarrow 0$」という形を作ることができるので，公式を利用して極限を求めます。

(i) $x\longrightarrow a$ のとき：$x-a=\theta$ とおく　　(ii) $x\longrightarrow\pm\infty$ のとき：$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおく

【例題 2 − 3】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}$

＜解説＞

(1) $x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\theta\longrightarrow 0$ となります。また，三角関数の合成を用いると，

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta}{\theta}\\&=2\cdot 1=2\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき $\theta\longrightarrow 0$ となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\pi\theta}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0}\left(\pi\cdot\frac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}\right)\\&=\pi\cdot 1=\pi\end{aligned}$$

【演習 2 − 3】

次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x^2-1}$

3　関数の連続性

3.1　関数の連続・不連続

関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対し，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在してその値が $f(a)$ に等しいとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ において**連続**であるといい，このときのグラフは，切れ目のない曲線になります。また，関数 $f(x)$ がその定義域内の x の値 a について連続でないとき（$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在しない場合や，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在するが $\lim\limits_{x\to a} f(x) \fallingdotseq f(a)$ の場合），$f(x)$ は $x=a$ で**不連続**であるといい，そのグラフは，$x=a$ で切れていることになります。

一般に，関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ で連続（$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$）であるとき，次の各関数も $x=a$ で連続になります。

(i) $kf(x)$　　（k は定数）

$$\lim_{x\to a} kf(x) = kf(a)$$

(ii) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)+g(a)\end{aligned}$$

(iii) $f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)g(a)\end{aligned}$$

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$　　（ただし，$g(a) \fallingdotseq 0$）

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

集合 $\left\{x \,\middle|\, a<x<b\right\}$, $\left\{x \,\middle|\, a \leqq x \leqq b\right\}$ などを**区間**といい，集合 $\left\{x \,\middle|\, a<x<b\right\}$ を**開区間**，集合 $\left\{x \,\middle|\, a \leqq x \leqq b\right\}$ を**閉区間**といいます。また，区間は次のように，不等号を丸括弧，等号付きの不等号を角括弧に対応させ，次のように書き表します。

区間	$\left\{x \,\middle|\, a<x<b\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, a \leqq x \leqq b\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, a<x \leqq b\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, a \leqq x<b\right\}$
表し方	$(a,\ b)$	$[a,\ b]$	$(a,\ b]$	$[a,\ b)$
区間	$\left\{x \,\middle|\, a<x\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, a \leqq x\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, x \leqq b\right\}$	$\left\{x \,\middle|\, x<b\right\}$
表し方	$(a,\ \infty)$	$[a,\ \infty)$	$(-\infty,\ b]$	$(-\infty,\ b)$

実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ のように表します。

関数 $f(x)$ がある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその**区間で連続**であるといい，定義域内のすべての x の値で連続である関数を**連続関数**といいます。整式で表された関数，三角関数，指数関数，対数関数，無理関数などは，その定義域内で連続な関数になります。

【例題 3 − 1】

次の関数は $x=0$ で連続であるかどうか調べなさい。

(1) $f(x)=x^3$

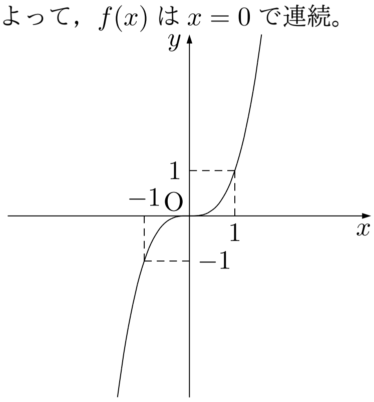
(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x \fallingdotseq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

＜解説＞

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3 = 0,\ f(0)=0$ となるので，

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

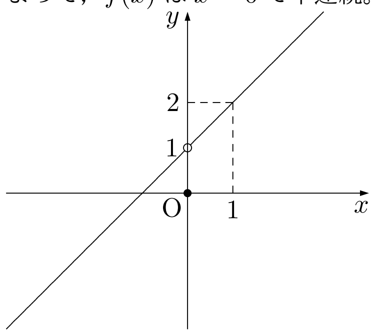
よって，$f(x)$ は $x=0$ で連続。



(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1,\ f(0)=0$ となるので，

$$\lim_{x\to 0} f(x) \fallingdotseq f(0)$$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で不連続。



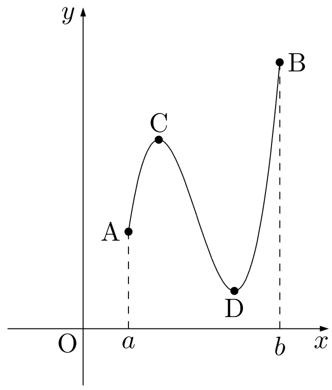
【演習 3 − 1】

次の関数は $x=0$ で連続であるかどうか調べなさい。ただし，[　] はガウス記号。

(1) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x \fallingdotseq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(2) $f(x)=x-[x]$

3.2 最大値・最小値の定理



右図のように，区間 $[a,\ b]$ で連続である関数 $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ があります。グラフからも明らかなように，閉区間で連続であれば，区間内のすべての x の値に対し，y の値がただ 1 つに決まります。そのため，その y の値の中で最大のものが最大値となり，最小のものが最小値となります。このように，閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもちます。しかし，閉区間でない場合や関数が連続でない場合は，最大値や最小値をもつとは限りません。

また，最大・最小となる点の候補は，次のようなものが考えられます。

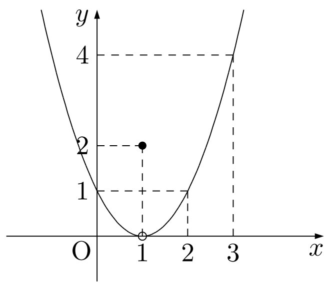
- 最大となる点：極大となる点（点 C），端点（点 B）
- 最小となる点：極小となる点（点 D），端点（点 A）

【例題 3 − 2】

関数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x \fallingdotseq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$ について，次の区間における最大値または最小値を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 3$　　(2) $0 \leqq x \leqq 2$　　(3) $2 < x < 3$

<解説>



$y=f(x)$ のグラフは右図のようになります。

(1) 区間 $2 \leqq x \leqq 3$ は閉区間で，関数 $f(x)$ は連続であるので，最大値と最小値をもちます。

$x=3$ のとき最大値 4，$x=2$ のとき最小値 1

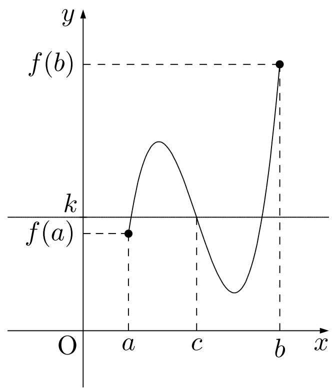
(2) 区間 $0 \leqq x \leqq 2$ は閉区間ですが，この区間で関数 $f(x)$ は連続ではありません。

$x=1$ のとき最大値 2，最小値はない

(3) 区間 $2 < x < 3$ は閉区間ではありません（開区間）。

最大値，最小値はない

3.3 中間値の定理



右図のように，関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であるならば，そののグラフは点 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ の間で切れ目なく続いています。このように，2 点 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ を結ぶいかなる曲線も，$f(a)$ から y の値を飛び越えて $f(b)$ に到達することはないので，$f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値をとります。このことから，関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続ならば次の定理が成り立ち，これを**中間値の定理**といいます。

(i) $f(a) \fallingdotseq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して，

$$f(c) = k$$

となるような実数 c が a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。

(ii) $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x) = 0$ は a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

【例題 3 − 3】

次の方程式は，(　) 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

(1) $x^3 + 2x + 1 = 0 \quad (-1 < x < 0)$　　(2) $3^x - 6x + 2 = 0 \quad (2 < x < 3)$

＜解説＞

(1) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ とおくと，$f(x)$ は実数全体で連続（閉区間 $[-1,\ 0]$ で連続）です。また，

$$f(-1) = (-1)^3 + 2\cdot(-1) + 1 = -2 < 0, \qquad f(0) = 1 > 0$$

であるので，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$，つまり，$x^3 + 2x + 1 = 0$ は $-1 < x < 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもちます。

(2) $f(x) = 3^x - 6x + 2$ とおくと，$f(x)$ は実数全体で連続（閉区間 $[2,\ 3]$ で連続）です。また，

$$f(2) = 3^2 - 6\cdot 2 + 2 = -1 < 0, \qquad f(3) = 3^3 - 6\cdot 3 + 2 = 11 > 0$$

であるので，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$，つまり，$3^x - 6x + 2 = 0$ は $2 < x < 3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもちます。

【演習 3 − 3】

次の方程式は，(　) 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示しなさい。

(1) $(x-1)\sin x = \cos x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(2) $\log_{10} x - \dfrac{x}{20} = 0 \quad (10 < x < 100)$