【数学 III】積分法

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　不定積分の基本

1.1　x^α の不定積分

x で微分すると $f(x)$ になる次のような関数 $F(x)$ を，関数 $f(x)$ の**原始関数**といいます。

$$F'(x) = f(x)$$

例えば，

$$(x^2+x+1)' = 2x+1, \qquad (x^2+x+2)' = 2x+1, \qquad (x^2+x+3)' = 2x+1$$

となるので，x^2+x+1、x^2+x+2、x^2+x+3 のいずれも $2x+1$ の原始関数となります。このように，ある関数の原始関数は無数に存在しますが，定数部分が異なるのみです。そこで，一般に，関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数は C を任意の定数として，

$$F(x) + C$$

と表すことができます。これを記号を用いて，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表し，$F(x)+C$ を $f(x)$ の**不定積分**，C を**積分定数**といい，このように関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを**積分する**といいます。

α を実数とすると，導関数の公式より，

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

であるので，x^α の不定積分は C を積分定数として，

- $\alpha \fallingdotseq -1$ のとき：$\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$　　（指数を 1 つ増やして、指数の逆数を前に出す）
- $\alpha = -1$ のとき：$\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

また，積分は微分の逆の演算であるので，不定積分の結果が正しいかどうかは，得られた式を微分して，その結果が元の式（被積分関数）と一致するかどうかで確認することができます。

【例題 1 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(2) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

【演習１－１】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int x^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

1.2 不定積分の基本性質

関数の定数倍・和・差の不定積分について，次の公式が成り立ちます。($f(x)$, $g(x)$ は関数，k, l は定数)

(i) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

また，(i)〜(iii) から，次のことが成り立ちます。

$$\int \{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)\,dx$$

【例題 1 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int (2x^4-3x^2+4)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1+3x^3}{x^4}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \left(6\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $$\begin{aligned}\int (2x^4-3x^2+4)\,dx &= 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + 4\int dx\\ &= 2\cdot\frac{1}{5}x^5 - 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot x + C\\ &= \frac{2}{5}x^5 - x^3 + 4x + C\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int \frac{1+3x^3}{x^4}\,dx &= \int \frac{1}{x^4}\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-4}\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{3}x^{-3} + 3\log|x| + C = -\frac{1}{3x^3} + 3\log|x| + C\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int \left(6\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx &= 6\int \sqrt{x}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 6\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= 6\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C = 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

【演習 1 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+x-1}{x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$

1.3 三角関数の不定積分

三角関数の導関数の公式

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

から，三角関数の不定積分の公式は次のようになります。（C は積分定数）

(i) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (ii) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

【例題 1 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 5\cos x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int (\tan x + 1)\cos x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{3+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 5\cos x)\,dx = 4\int \sin x\,dx - 5\int \cos x\,dx = -4\cos x - 5\sin x + C$

(2) $$\begin{aligned}\int (\tan x + 1)\cos x\,dx &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\cos x\,dx = \int (\sin x + \cos x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx \\ &= -\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int \frac{3+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \cos x\right)dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \cos x\,dx \\ &= 3\tan x + \sin x + C\end{aligned}$$

【演習 1 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

1.4　指数関数の不定積分

指数関数の導関数の公式

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \log a$$

から，指数関数の不定積分の公式は次のようになります。（C は積分定数）

（i）$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$　　（ii）$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

【例題 1 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int (2e^x - x^2)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (3^x + 5^x)\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int (2e^x - x^2)\,dx = 2\int e^x\,dx - \int x^2\,dx = 2e^x - \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int (3^x + 5^x)\,dx = \int 3^x\,dx + \int 5^x\,dx = \frac{3^x}{\log 3} + \frac{5^x}{\log 5} + C$

【演習 1 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int 5(e^x - 2^x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (e^x + 2^{x+1})\,dx$

2　置換積分法と部分積分法

2.1　$f(ax+b)$ の不定積分

関数 $f(x)$ に対して，$F'(x)=f(x)$，$a(\fallingdotseq 0)$, b を定数とすると，合成関数の微分法より，

$$\{F(ax+b)\}'=F'(ax+b)\cdot(ax+b)'=aF'(ax+b)=af(ax+b)$$

となることから，$f(ax+b)$ の不定積分は，C を積分定数として次のように表すことができます。

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

【例題 2 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int(3x-5)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int\sin(3x+2)\,dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{1}{1-3x}\,dx$　(4) $\displaystyle\int 2^{4x-1}\,dx$

<解説>

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int(3x-5)^3\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(3x-5)^4+C=\frac{1}{12}(3x-5)^4+C$

(2) $\displaystyle\int\sin(3x+2)\,dx=\frac{1}{3}\{-\cos(3x+2)\}+C=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{1-3x}\,dx=\frac{1}{-3}\log|1-3x|+C=-\frac{1}{3}\log|1-3x|+C$

(4) $\displaystyle\int 2^{4x-1}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{2^{4x-1}}{\log 2}+C=\frac{2^{4x-3}}{\log 2}+C$

【演習 2 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int\sqrt[3]{(2x+1)^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{e^{3x-1}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2(2-4x)}\,dx$

2.2 置換積分法

$F(x) = \int f(x)\,dx$ において，x が t の関数として $x = g(t)$ と表されるとき，合成関数の微分法を用いて $F(x)$ を t について微分すると，

$$\frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

このことから次の公式が成り立ち，このように文字を置き換えて積分する方法を**置換積分法**といいます。

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

また，$\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ を形式的に $dx = g'(t)dt$ と書き表せば，公式の左辺を，

$$dx \longrightarrow g'(t)dt$$

のようにして置き換えることにより成り立つ公式だと考えることができます。

【例題 2 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

＜解説＞

被積分関数を直接積分することが難しいとき，置換積分法の利用し，被積分関数のうち複雑にしている要素を t などの適当な文字に表して変形します。また，C は積分定数とします。

(1) $x + 2 = t$ とおくと，

$$x = t - 2, \qquad \frac{dx}{dt} = 1 \quad (dx = dt)$$

となるので，

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{t-2}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}\right)dt = \log|\,t\,| + \frac{2}{t} + C$$
$$= \log|\,x+2\,| + \frac{2}{x+2} + C$$

(2) $\sqrt{4x+1} = t$ とおくと，

$$x = \frac{t^2-1}{4}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t \quad \left(dx = \frac{1}{2}tdt\right)$$

となるので，

$$\int \frac{2x}{\sqrt{4x+1}}\,dx = \int \frac{2 \cdot \dfrac{t^2-1}{4}}{t} \cdot \frac{1}{2}t\,dt = \int \frac{t^2-1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}t(t^2-3) + C = \frac{1}{12}\sqrt{4x+1}(4x-2) + C = \frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{4x+1} + C$$

【演習 2 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(2x+1)^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{9x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt[3]{x+2}\,dx$

2.3　$f(g(x))g'(x)$ の置換積分

置換積分法の公式 $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ の左辺と右辺，x と t を入れ換えると，次の公式が得られます。

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

このことから，被積分関数がある関数 $f(g(x))$ と微分した関数 $g'(x)$ との積で表される場合，$g(x)=t$ などのように適当な文字に置き換えることにより，$\dfrac{dt}{dx}=g'(x)$ を形式的に $g'(x)dx=dt$ と表せば，公式のように複雑な積分を簡単な形に表すことができます。

また，$f(t)=\dfrac{1}{t}$ であるとき，

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|\,t\,| + C = \log|\,g(x)\,| + C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

となることから，次の公式が得られます。

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|\,g(x)\,| + C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

【例題 2 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+1}\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $t=x^2+1$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=2x \longrightarrow 2xdx=dt$$

となるので，

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

(2) $t=\sin x$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \longrightarrow \cos x dx = dt$$

となるので，

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(3) $(x^2+4x+1)' = 2x+4 = 2(x+2)$ であるので，

$$\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+4x+1)'}{x^2+4x+1}\,dx = \log|\,x^2+4x+1\,| + C$$

【演習 2 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int e^x(e^x+1)^2\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int x(x^2+1)^3\,dx$ (4) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

2.4 部分積分法

積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より，$f(x)g(x)$ は右辺の原始関数であると考えることができるので，

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

このことから，次の**部分積分法**の公式が得られます。

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

部分積分法は，直接積分することが難しく，被積分関数が 2 種類の関数の積で表される場合に用います。このとき，2 種類の関数のどちらを $f(x)$, $g(x)$ に当てはめるかが重要で，実際に積分をするのは $\int f'(x)g(x)\,dx$ の部分になるので，微分して簡単になる（定数になる）ものを $f(x)$，簡単に積分できるものを $g(x)$ とし，$f'(x)g(x)$ を積分できる形にすることがポイントです。

【例題 2 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int \log x\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ だとして部分積分法の公式を利用すると，

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

(2) 被積分関数 $\log x$ を $(\log x)\cdot 1$ のような積であると考え，$f(x) = \log x$, $g'(x) = 1$ だとして部分積分法の公式を利用すると，

$$\int \log x\,dx = \int (\log x)\cdot(x)'\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\log x - x + C$$

この結果

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C \quad (= x(\log x - 1) + C) \qquad (C \text{ は積分定数})$$

は，公式としてよく用いられるので覚えておきましょう。

【演習 2 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int x\sin 2x\,dx$ (2) $\int \sqrt{x}\log x\,dx$ (3) $\int x^2e^x\,dx$

3　いろいろな関数の不定積分

3.1　分数関数の積分

分数関数を積分するには次の公式を利用します。

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|\,g(x)\,| + C \qquad （C\text{ は積分定数}）$$

しかし，被積分関数の分子が「分母の微分」の形であればいいのですが，そうでない場合には積分することができません。そこで，主に次のような方法で式変形を行い，積分できる形にします。

- (分子の次数) $\geqq$ (分母の次数) のとき：分子を分母で割る
- (分子の次数) $<$ (分母の次数) のとき：部分分数分解を行う

【例題 3 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx$

<解説>

C は積分定数とします。

(1) $\dfrac{x^2+3}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x+1} = x-1+\dfrac{4}{x+1}$ と変形できるので，

$$\int \frac{x^2+3}{x+1}\,dx = \int \left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 4\log|\,x+1\,| + C$$

(2) $\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ とおき，分母を払って整理すると，

$$\begin{aligned} x-3 &= a(x-2)+b(x-1) \\ &= (a+b)x-(2a+b) \end{aligned}$$

このことから，

$$a+b=1, \qquad 2a+b=3$$

となるのでこれを解いて，

$$a=2, \qquad b=-1$$

よって，

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)dx &= 2\log|\,x-1\,| - \log|\,x-2\,| + C \\ &= \log\frac{(x-1)^2}{|\,x-2\,|} + C \end{aligned}$$

【演習 3 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2+x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x(x-1)^2}\,dx$

3.2　無理関数の積分

被積分関数に根号を含むとき，簡単なものであれば直接積分することができますが，複雑な形ではそのまま積分をすることができません。そこで，次のようにして積分できる形に変形します。

- 積・商の形：置換積分法を用いる
  $\sqrt{ax+b}=t$ とおくと，両辺を 2 乗すれば，
  $$ax+b=t^2$$
  両辺を x で微分して，
  $$a=\frac{d}{dx}t^2=\frac{d}{dt}t^2\cdot\frac{dt}{dx}=2t\cdot\frac{dt}{dx}\qquad（形式的に，a\ dx=2t\ dt）$$
- 分母に和・差の形：有理化をする

【例題 3 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2+x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $\sqrt{2+x}=t$ とおき，両辺を 2 乗して x で微分すると，

$$2+x=t^2$$
$$dx=2tdt$$

よって，

$$\int x\sqrt{2+x}\,dx=\int(t^2-2)t\cdot 2tdt=\int(2t^4-4t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{5}(2+x)^2\sqrt{2+x}-\frac{4}{3}(2+x)\sqrt{2+x}+C$$

(2) 被積分関数の分母を有理化すると，

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(x+1)-1}=\sqrt{x+1}-1$$

となるので，

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx=\int(\sqrt{x+1}-1)\,dx=\int\left\{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1\right\}dx$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-x+C=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-x+C$$

【演習 3 − 2】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x}\,dx$

3.3 三角関数の積分（式変形）

三角関数の積分を行うとき，主に，次の積分の公式を用います。

(i) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ （C は積分定数） (ii) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ （C は積分定数）

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ （C は積分定数） (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$ （C は積分定数）

逆に言えば，これ以外の形（積の形）では積分することができないので，2 倍角・3 倍角の公式や積 $\longrightarrow$ 和の公式などを用いることにより次数を下げ，積分できる形に変形します。

(i) 2 倍角の公式：$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

2 倍角の公式から次のように表すことができる（半角の公式）ので，これを利用して，$\sin^2 x$，$\cos^2 x$ を 1 次の形に変形します。

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(ii) 3 倍角の公式：$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3 倍角の公式から次のように表すことができるので，これを利用して，$\sin^3 x$，$\cos^3 x$ を 1 次の形に変形します。

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \qquad \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

【例題 3 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sin 3x \cos x\,dx$

<解説>

C は積分定数とします。

(1) 2 倍角の公式から，

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

となるので，

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(2) 3 倍角の公式から，

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

となるので，

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$$

(3) 積 $\longrightarrow$ 和の公式から，

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$$

となるので，

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos x \, dx &= \int \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C \\ &= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

【演習 3 − 3】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \left(\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}\right)^2 dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx$　(3) $\displaystyle\int \cos 4x \cos 2x \, dx$

3.4 三角関数の積分（置換積分）

置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

から，

（i） $g(x) = \sin x$ のとき

$$\int f(\sin x)\cdot(\sin x)'\,dx = \int f(\sin x)\cdot\cos x\,dx$$

$\sin x = t$ とおくと，

$$\int f(\sin x)\cdot(\sin x)'\,dx = \int f(t)\,dt$$

（ii） $g(x) = \cos x$ のとき

$$\int f(\cos x)\cdot(\cos x)'\,dx = \int f(\cos x)\cdot(-\sin x)\,dx$$

$\cos x = t$ とおくと，

$$\int f(\cos x)\cdot(\cos x)'\,dx = \int f(t)\,dt$$

となるので，$f(\sin x)$ と $\cos x$ との積，もしくは，$f(\cos x)$ と $\sin x$ との積で表される三角関数などは，置換積分法を利用して積分することができます。

【例題 3 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}\,dx$

<解説>

C は積分定数とします。

(1) $\sin x = t$ とおくと，$\cos x\ dx = dt$ であるので，

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx = \int t^5\,dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$$

(2) $\sin x = t$ とおくと，$\cos x\ dx = dt$ であるので，

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{t}{1+t}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - \log|1+t| + C \\ &= \sin x - \log(1+\sin x) + C\end{aligned}$$

【演習 3 − 4】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int (\cos x + \sin^2 x)\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

3.5　指数・対数を含む関数の積分

e^x の関数 $f(e^x)$ を積分するとき，$e^x = t$ とおくことで，$e^x\ dx = dt$ より $dx = \dfrac{1}{t}dt$ となるので，

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

のようにして，e^x を含まない t で表される関数の積分に変形することができます。

また，$\log x$ の関数 $f(\log x)$ を積分するときは，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ となることから，置換積分法や部分積分法を利用して積分します。特に，

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となることは重要です。

【例題 3 − 5】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $e^x = t$ とおくと，$e^x\ dx = dt$ より $dx = \dfrac{1}{t}dt$ となるので，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+2}\,dx &= \int \frac{1}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)\right\}dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\log|t| - \log|t+2|\right) + C = \frac{1}{2}\{\log e^x - \log(e^x+2)\} + C\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(e^x+2) + C\end{aligned}$$

(2) $\log x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}dx = dt$ となるので，

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|\log x| + C$$

【演習 3 − 5】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log x+1)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{(e^x+1)^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$

3.6 部分積分法（同形出現）

e^x は微分（積分）しても $(e^x)' = e^x$ と変わらず， $\sin x$ や $\cos x$ を微分（積分）すると $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ となるように，一方を微分（積分）すればもう一方が現れます。そのため，e^x と $\sin x$ や $\cos x$ との積で表される関数を積分するとき，部分積分法を繰り返し用いると同じ形が出現するので，その性質を利用して不定積分を求めることができる場合があります。

【例題 3 − 6】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$ (2) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$

＜解説＞

C は積分定数とします。

(1) $I = \displaystyle\int e^x \sin x \, dx$ とおくと，

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} = e^x \sin x - e^x \cos x - I \\ 2I &= e^x (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

よって，

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(2) $J = \displaystyle\int e^x \cos x \, dx$ とおくと，

$$\begin{aligned} J &= \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \sin x + \int (e^x)' \sin x \, dx \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \right) = e^x \cos x + e^x \sin x - J \\ 2J &= e^x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

よって，

$$J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

【演習 3 − 6】

$I = \displaystyle\int (e^x + e^{-x}) \sin x \, dx$, $J = \displaystyle\int (e^x - e^{-x}) \cos x \, dx$ であるとき，

(1) $I = (e^x - e^{-x}) \sin x - J$, $J = (e^x + e^{-x}) \cos x + I$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) I, J を求めなさい。

4　定積分とその基本性質

4.1　定積分の基本

ある区間で連続な関数を $f(x)$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき，区間内の 2 つの実数 a, b に対して，$F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい，次のように表します。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

このことから，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は次のようにして求めることができます。

（i）原始関数 $F(x)$ を求める　　（ii）$F(b)-F(a)$ を計算する

【例題 4 − 1】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 2^t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$

<解説>

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_1^e = \log e - \log 1 = 1$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 2^t\,dt = \left[\frac{2^t}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{2^1-2^0}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

【演習 4 − 1】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin 2x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x}\,dx$

4.2　定積分の計算

定積分を求めるとき，まずは原始関数を求めるので，不定積分のときに成り立つ性質は，次のように定積分でも成り立ちます。

(i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

(i)〜(iii) から次の関係が成り立ちます。

$$\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$$

また，定積分に特有な次の性質も成り立ち，これらを利用して定積分の計算を行います。

(iv) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$　　(v) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

【例題 4 − 2】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3+x-4}{x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cos 2x\,dx$

＜解説＞

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3+x-4}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(2x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx = \left[x^2+\log|x|+\frac{4}{x}\right]_1^2$

$\displaystyle = (4+\log 2+2)-(1+\log 1+4) = 1+\log 2$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \Big[\log|x-3|-\log|x-2|\Big]_0^1$

$\displaystyle = \log 2-\log 1-(\log 3-\log 2) = 2\log 2-\log 3$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 5x+\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{5}\cdot 1+1\right)\right\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{3}-\frac{6}{5}\right)$

$\displaystyle = \frac{3-\sqrt{3}}{5}$

【演習 4 − 2】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^4}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x}$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x}-e^{-x})^2\,dx$　　(4) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4 x\,dx$

4.3 積分区間の分割

絶対値記号のついた式を計算するとき，そのままでは計算することができないので，$A \geqq 0$ のとき $|A| = A$，$A < 0$ のとき $|A| = -A$ のようにして場合分けをし，絶対値記号をなくす必要があります。

絶対値記号で表された関数の定積分を求めるときも同様に，絶対値記号がついたままでは計算できないので，定積分の性質

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

を利用し，積分区間における絶対値記号の中の式の符号に応じて，場合分けを行います。

【例題 4 − 3】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\,e^x - 1\,|\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x\,|\,dx$

＜解説＞

(1) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $|\,e^x - 1\,| = -(e^x - 1)$，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\,e^x - 1\,| = e^x - 1$ となるので，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |\,e^x - 1\,|\,dx &= \int_{-1}^{0} |\,e^x - 1\,|\,dx + \int_{0}^{1} |\,e^x - 1\,|\,dx = -\int_{-1}^{0} (e^x - 1)\,dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\,dx \\ &= -\Big[e^x - x\Big]_{-1}^{0} + \Big[e^x - x\Big]_{0}^{1} = -\{e^0 - (e^{-1} + 1)\} + \{(e - 1) - e^0\} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{e} - 1\right) + (e - 1 - 1) = e + \frac{1}{e} - 2\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $|\cos x\,| = \cos x$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき $|\cos x\,| = -\cos x$ となるので，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\cos x\,|\,dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x\,|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x\,|\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx \\ &= \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

【演習 4 − 3】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{(3x-2)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|\,2x - a\,|\,dx \quad (0 \leqq a \leqq \pi)$

4.4　文字定数を含む三角関数の積分

a を定数とするとき，$\sin ax$ や $\cos ax$ のような文字定数を含む三角関数の積分は，$\dfrac{1}{a}$ と三角関数との積で表されます。しかし，分母は 0 にはならないので，$a = 0,\ a \neq 0$ の場合に分けて計算する必要があります。

【例題 4 − 4】

$m,\ n$ を自然数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx$ を求めなさい。

<解説>

$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx$ とおくと，和 $\longrightarrow$ 積の公式から，

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}\,dx$$

(i) $m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos 2(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\cos 2(m-n)\pi}{m-n} - \left(\frac{\cos 0}{m+n} + \frac{\cos 0}{m-n}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n}\right) = 0 \end{aligned}$$

(ii) $m = n$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2mx\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2mx}{2m}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4m}(\cos 4m\pi - \cos 0) \\ &= -\frac{1}{4m}(1-1) = 0 \end{aligned}$$

(i), (ii) より，

$$I = 0$$

【演習 4 − 4】

$m,\ n$ は自然数とします。次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\,dt$

5　定積分の置換積分法と部分積分法

5.1　定積分の置換積分法

閉区間 $[a,\ b]$ で関数 $f(x)$ が連続で，x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて $x=g(t)$ と表されるとします。また，$a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，不定積分の置換積分法により，

$$F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

となるので，

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt &= \Big[F(g(t))\Big]_{\alpha}^{\beta} = F(g(\beta))-F(g(\alpha))\\ &= F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b=\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

このことから次の関係が成り立ちます。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt$$

【例題 5 − 1】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(2x+1)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

＜解説＞

(1) $2x+1=t$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{2}dt$

また，x と t の対応は右のようになるので，

x	-2	$\longrightarrow$	1
t	-3	$\longrightarrow$	3

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(2x+1)^4\,dx &= \int_{-3}^{3} t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt=\left[\frac{t^5}{10}\right]_{-3}^{3}\\ &= \frac{3^5-(-3)^5}{10}=\frac{243}{5}\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと，$x+2=t^2$, $dx=2tdt$

また，x と t の対応は右のようになるので，

x	2	$\longrightarrow$	7
t	2	$\longrightarrow$	3

$$\begin{aligned}\int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx &= \int_2^3 \frac{t^2-2}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_2^3 (t^2-2)\,dt\\ &= 2\left[\frac{t^3}{3}-2t\right]_2^3 = 2\left\{(9-6)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}=\frac{26}{3}\end{aligned}$$

(3) $\sin x = t$ とおくと，$\cos x dx = dt$

また，x と t の対応は右のようになるので，

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 2$$

【演習 5 − 1】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

5.2 $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分

$\sqrt{a^2-x^2}$ は，$x=a\sin\theta$ とおくと，

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}$$

と変形できるので，このことを利用して $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分を求めていきます。

【例題 5 − 2】

$a>0$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めなさい。

＜解説＞

$x=a\sin\theta$ とおくと，$dx=a\cos\theta d\theta$ となり，x と θ の対応は右の表のようになります。区間 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において $\cos\theta\geqq 0$ であるので，

x	0	$\longrightarrow$	a
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

【演習 5 − 2】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

5.3 $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ の定積分

$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ は，$x = a\tan\theta$ とおくと，

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2\tan^2\theta + a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\tan^2\theta+1} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}$$

と変形できるので，このことを利用して $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ の定積分を求めていきます。

【例題 5 − 3】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$

＜解説＞

(1) $x = \tan\theta$ とおくと，$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，x と θ の対応は右の表のようになります。よって，

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(2) $x = 2\tan\theta$ とおくと，$dx = \dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，x と θ の対応は右の表のようになります。よって，

x	$0 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

【演習 5 − 3】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$

5.4 偶関数・奇関数の定積分

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ という形の定積分を求めるとき，次のように積分区間を分割することができます。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots \text{①}$$

①の右辺の第１項 $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ について，$x=-t$ とおくと $dx=(-1)dt$ となり，x と t の対応は右の表のようになります。よって，

x	$-a$	$\longrightarrow$	0
t	a	$\longrightarrow$	0

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

このことから，①は次のように表すことができます。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x)+f(x)\}\,dx$$

このとき，

(i) $f(x)$ が偶関数ならば，$f(-x)=f(x)$ より，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) $f(x)$ が奇関数ならば，$f(-x)=-f(x)$ より，

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

という関係が成り立ち，この性質を利用することで偶関数・奇関数の定積分を楽に求めることができます。

【例題 5 − 4】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (x^3+x^2+x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-e}^{e} xe^{x^2}\,dx$

＜解説＞

一般に，偶数・奇数の積とは異なり，偶関数・奇関数の積においては次のような関係になります。

(偶関数) × (偶関数) = (偶関数)，(偶関数) × (奇関数) = (奇関数)，(奇関数) × (奇関数) = (偶関数)

(1) $y=x^3$, $y=x$ は奇関数，$y=x^2$ は偶関数であるので，

$$\int_{-3}^{3} (x^3+x^2+x)\,dx = \int_{-3}^{3} x^3\,dx + \int_{-3}^{3} x^2\,dx + \int_{-3}^{3} x\,dx = 2\int_{0}^{3} x^2\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 2\cdot 3^2 = 18$$

(2) $y=\sin x$ は奇関数，$y=\cos x$ は偶関数であるので，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1 = 2$$

(3) $f(x) = xe^{x^2}$ とおくと，$f(-x) = -xe^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f(x)$ となるので，$y = xe^{x^2}$ は奇関数。よって，

$$\int_{-e}^{e} xe^{x^2}\,dx = 0$$

【演習 5 − 4】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

5.5 定積分の部分積分法

積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より，

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

このことから，次の定積分における部分積分法の公式が得られます。

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

部分積分法は，直接積分することが難しく，被積分関数が 2 種類の関数の積で表される場合に用います。このとき，2 種類の関数のどちらを $f(x)$, $g(x)$ に当てはめるかが重要で，実際に積分をするのは $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ の部分になるので，微分して簡単になる（定数になる）ものを $f(x)$，簡単に積分できるものを $g(x)$ とし，$f'(x)g(x)$ を積分できる形にすることがポイントです。

【例題 5 − 5】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 2x\,dx$

＜解説＞

(1) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$\displaystyle\qquad = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx = \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$\displaystyle\qquad = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

【演習 5 − 5】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin x)^2\,dx$

6　定積分のいろいろな関数

6.1　定積分と導関数

a を定数とし，関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とします。このとき，定積分の上端が変数になるような定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は，次のようにその変数の関数（積分変数 t には無関係な関数）になります。

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

これを x で微分すると，次のような関係が導かれます。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

また，同様にして次の関係も成り立ち，公式として利用できます。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(x)\Big]_{h(x)}^{g(x)} = \frac{d}{dx}\{F(g(x)) - F(h(x))\} = F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) \\ &= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)\end{aligned}$$

【例題 6 − 1】

次の関数を x で微分しなさい。

(1) $y = \displaystyle\int_1^x \frac{t^3}{1+e^t}\,dt$　　(2) $y = \displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$　　(3) $y = \displaystyle\int_x^{2x} \sin t\,dt$

＜解説＞

(1) $y' = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{t^3}{1+e^t}\,dt = \frac{x^3}{1+e^x}$

(2) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt - \int_0^x t\cos t\,dt$ と変形できるので，積の導関数の公式から，

$$\begin{aligned}y' &= (x)'\int_0^x \cos t\,dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right) - \frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt \\ &= \int_0^x \cos t\,dt + x\cos x - x\cos x = \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x\end{aligned}$$

(3) $y' = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{2x} \sin t\,dt = (\sin 2x)\cdot(2x)' - (\sin x)\cdot(x)' = 2\sin 2x - \sin x$

【演習 6 − 1】

次の関数を x で微分しなさい。

(1) $y = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2\cos t\,dt$　　(2) $y = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{t^2+2}$

6.2 定積分で表された関数の最大・最小

関数 $f(x)$ の最大・最小は，次のような手順で求めるのが基本になります。

(ｉ) 導関数 $f'(x)$ を求める。
(ii) 増減表を作る。
(iii) 増減表（グラフ）から，最大値・最小値（極値や端点における値が候補）を求める。

このとき，関数 $f(x)$ が $f(x)=\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ のように定積分で表されるような場合では，その導関数 $f'(x)$ は，定積分の導関数の公式から次のようになります。

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)$$

【例題 6 − 2】

関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^x (2-t)\log t\,dt\ (1\leqq x\leqq e)$ の最大値，最小値を求めなさい。

＜解説＞

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x (2-t)\log t\,dt=(2-x)\log x$$

$1\leqq x\leqq e$ のとき，$f'(x)=0$ とすると，

$$x=1,\ 2$$

また，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_1^x (2-t)\log t\,dt=\int_1^x \left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\,dt\\&=\left[\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)\log t\right]_1^x-\int_1^x\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)\cdot\frac{1}{t}\,dt=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\log x-\int_1^x\left(2-\frac{1}{2}t\right)\,dt\\&=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\log x-\left[2t-\frac{1}{4}t^2\right]_1^x=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\log x+\frac{1}{4}x^2-2x-\left(\frac{1}{4}-2\right)\\&=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\log x+\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

このとき，

$$f(1)=0$$
$$f(2)=2\log 2+1-4+\frac{7}{4}=2\log 2-\frac{5}{4}$$
$$f(e)=2e-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2-2e+\frac{7}{4}=\frac{7-e^2}{4}\quad(<0)$$

このことから，$1\leqq x\leqq e$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	e
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(e)$

よって，

$$x=2 \text{ のとき最大値 } 2\log 2-\frac{5}{4}，\ x=e \text{ のとき最小値 } \frac{7-e^2}{4}$$

【演習 6 − 2】

関数 $f(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}\frac{t}{t^2+1}\,dt$ の最大値，最小値を求めなさい。

6.3 文字係数を含む関数の定積分の最小値

$a,\, b$ は定数で，$f(x)$ が t を含む x の関数であるとき，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は次のように表されます。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

このとき，$F(x)$ も t を含む x の関数になりますが，$F(b)-F(a)$ は，$x=a,\, b$ を代入しているため x は消え，t の関数であると考えることができます。

【例題 6 − 3】

$f(a) = \displaystyle\int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx$ は，a の 2 次式で表されることを式で示し，関数 $f(a)$ を最小にする a の値と，その最小値を求めなさい。

＜解説＞

$f(a)$ は，

$$f(a) = \int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2axe^x + a^2x^2)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx - 2a\int_0^1 xe^x\,dx + a^2\int_0^1 x^2\,dx$$

ここで，

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

となることから，$f(a)$ は次のように a の 2 次式で表されます。

$$f(a) = \frac{1}{2}(e^2-1) - 2a + \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3}(a^2-6a) + \frac{1}{2}(e^2-1) = \frac{1}{3}(a-3)^2 + \frac{1}{2}(e^2-7)$$

よって，$f(a)$ は，

$a = 3$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}(e^2-7)$

6.4 定積分の等式と関数の決定

a, b を定数として，関数 $f(x)$ が $f(x) = g(x) + \int_a^b f(t)\,dt$ のように，被積分関数に自身を含むような定積分を持つ等式で表される場合，直接関数を特定することはできません。しかし，a, b が定数であるとき，$\int_a^b f(t)\,dt$ は定数になるため，それを k などのような適当な文字を用いれば，関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = g(x) + k$$

と表すことができます。すると，

$$k = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \{g(t) + k\}\,dt$$

のように，k についての方程式が得られ，これを解けば k を特定することができ，また，$f(x)$ も特定することができます。

【例題 6 − 4】

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$f(x) = \cos^2 x + \int_0^\pi f(t)\,dt$$

＜解説＞

$\int_0^\pi f(t)\,dt$ は定数であるので，$\int_0^\pi f(t)\,dt = k$ ……· ① とおくと，$f(x)$ は次のように表すことができます。

$$f(x) = \cos^2 x + k$$

このことから，

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = \int_0^\pi (\cos^2 t + k)\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos 2t}{2} + k\right)dt = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\cos 2t + k + \frac{1}{2}\right)dt$$
$$= \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \left(k + \frac{1}{2}\right)t\right]_0^\pi = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

よって，①より k を求めると，

$$k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$
$$k = \frac{\pi}{2(1-\pi)}$$

となるので，

$$f(x) = \cos^2 x + \frac{\pi}{2(1-\pi)}$$

【演習 6 − 4】

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

(1) $f(x) = \sin x + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$　　(2) $f(x) = 2\sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)f(t)\,dt$

6.5 定積分と漸化式

n を 0 以上の整数とし，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ とします。また，$\sin^0 x=1,\ \cos^0 x=1$ とすると，次の等式が成り立ちます。

① $n\geqq 0$ のとき $I_n=J_n$

(i) $n=0$ のとき

$\sin^0 x=1,\ \cos^0 x=1$ であるので，

$$I_0=J_0$$

(ii) $n\geqq 1$ のとき

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$dx=(-1)dt$ となり，x と t の対応は右のようになります。よって，

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-1)\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=J_n\end{aligned}$$

(i), (ii) より，$n\geqq 0$ のとき $I_n=J_n$

② $n\geqq 2$ のとき $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'\,dx\\&=\Big[-\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)=(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

【例題 6 − 5】

n を 0 以上の整数，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\ \sin^0 x=1$ とします。$n\geqq 2$ のとき $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ となることを利用して，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $n\geqq 1$ のとき $I_{2n}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$ (2) $n\geqq 2$ のとき $I_{2n-1}=1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}$

＜解説＞

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ より，n を $2n$ に置き換えると，

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \quad (n \geqq 1)$$

このことから，

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} I_0$$

ここで，

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

となるので，$n \geqq 1$ のとき，

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

(2) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ より，n を $2n-1$ に置き換えると，

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \quad (n \geqq 2)$$

このことから，

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} I_{2n-5} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} I_1$$

ここで，

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

となるので，$n \geqq 2$ のとき，

$$I_{2n-1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-2}{2n-1}$$

【演習 6 − 5】

次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

6.6 定積分と極限

$\dfrac{0}{0}$ の形（不定形）の極限を求めるとき，微分係数の定義式 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ を利用することで，極限が求められる場合があります。

【例題 6 − 6】

$f(x)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}(\sin t-\cos t)^4\,dt$ とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ を求めなさい。

＜解説＞

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin t-\cos t)^4\,dt=0$ であるので，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ここで，

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}(\sin t-\cos t)^4\,dt=(\sin x-\cos x)^4$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)^4=0$$

よって，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=0$$

【演習 6 − 6】

$F(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}(t\sin at+b)\,dt$（$a,\ b$ は定数，$a\neq 0$）とします。

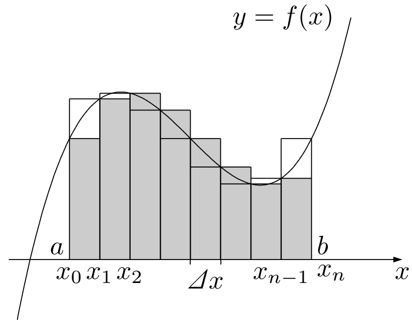
(1) $F(x)$ を計算しなさい。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ を求めなさい。

7　定積分の和と不等式

7.1　区分求積法

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ であるとし，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸，2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積を S とします。また，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その両端と分点を順に



$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_k,\cdots\cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

とし，$\dfrac{b-a}{n}=\varDelta x$ とおけば，$x_k=a+k\varDelta x$ と表されます。

右図の影をつけた各長方形の面積は，

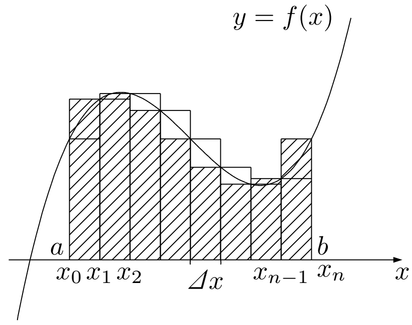
$$f(x_k)\varDelta x \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

と表すことができるので，その和を S_n とすると，

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x$$

となります。このとき，n を限りなく大きくすれば分割の幅は限りなく小さくなり，面積 S_n は S に限りなく近づくことになります。

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x=S$$



同じようにして，図の斜線をつけた各長方形の面積は，

$$f(x_k)\varDelta x \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$$

と表すことができるので，その和を T_n とすると，

$$T_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

となります。このとき，n を限りなく大きくすれば分割の幅は限りなく小さくなり，面積 T_n も S に限りなく近づくことになり，このようにして図形の面積を求める方法を，**区分求積法**といいます。

$$\lim_{n\to\infty} T_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x=S$$

一般に，関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，$f(x) \geqq 0$ であるかどうかにかかわらず，次の等式が成り立ちます。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x \qquad \left(\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right)$$

特に，$a=0,\, b=1$ とすると，$\varDelta x=\dfrac{1}{n},\, x_k=\dfrac{k}{n}$ となることから，次の等式が成り立ちます。

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

【例題 7 − 1】

次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}$

＜解説＞

数列の和の極限は，次の手順により求めます。

(ⅰ) 数列の和を $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ もしくは $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形で表す。

(ⅱ) 等式 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ を利用して定積分の形にし，その定積分を求める。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=1$

【演習 7 − 1】

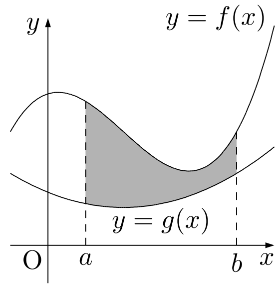
次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right\}$

7.2 定積分と不等式の証明

右図のように，$f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続な関数で，常に $f(x) \geqq g(x)$ であるとき，2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積は 0 以上になるので，次の関係が成り立ちます。



$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{（常に } f(x) = g(x) \text{ のとき等号成立）}$$

また，このことを不等式の証明に利用することができます。

【例題 7 − 2】

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき，$\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{2}$ であることを用いて，不等式 $\dfrac{1}{3} < \log\dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{2}$ を証明しなさい。

<解説>

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき，$\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{2}$ であり，等号は常には成り立たないので，

$$\int_2^3 \frac{1}{3}\,dx < \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx < \int_2^3 \frac{1}{2}\,dx \ \cdots\cdots\ ①$$

このとき，

$$\int_2^3 \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{1}{3}x\right]_2^3 = \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3} \qquad \int_2^3 \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$$

よって，①より，

$$\frac{1}{3} < \log\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$$

【演習 7 − 2】

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$ であることを用いて，次の不等式を証明しなさい。

$$\pi\log 2 - \frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\sin x)\,dx < \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\log\left(\frac{\pi}{2}+1\right) - \frac{\pi}{2}$$

7.3 不等式の証明（数列の和）

数列の和を含む不等式の大小関係は，その式だけでは判断が難しいことがあります。そのようなときには，数列の和を図形の面積に対応させ，その面積の大小関係から不等式を証明することができます。

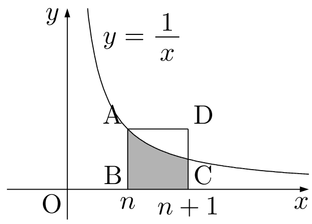
【例題 7 − 3】

次の不等式を証明しなさい。ただし，n は自然数とします。

(1) $\dfrac{1}{n} > \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\,dx$　　　(2) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n} > \log(n+1)$

＜解説＞

(1) $x > 0$ で $y = \dfrac{1}{x}$ は減少関数になり，そのグラフは右図のようになります。このとき，$\mathrm{A}\left(n,\ \dfrac{1}{n}\right)$, $\mathrm{B}(n,\ 0)$, $\mathrm{C}(n+1,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(n+1,\ \dfrac{1}{n+1}\right)$ とすると，図から，

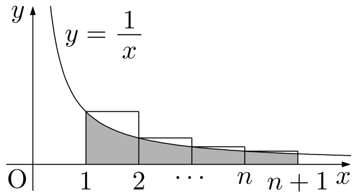


$$\text{長方形 ABCD} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

よって，

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

(2) (1) の不等式から，n について，1 から n まで不等式の辺々を加えると，



$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

ここで，

$$(\text{右辺}) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$

よって，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

【演習 7 − 3】

次の不等式を証明しなさい。ただし，n は自然数とします。

(1) $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x^2}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$　　$(n \geqq 2)$

7.4 シュワルツの不等式

a, b は $a < b$ となる定数で，t は任意の実数とします。また，$f(x)$, $g(x)$ はともに区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続な関数であるとすると，

$$\int_a^b \{tf(x)+g(x)\}^2\,dx = t^2\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \ \cdots\cdots \ ①$$

ここで，$\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = A$, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = B$, $\displaystyle\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx = C$ とおくと，$\{tf(x)+g(x)\}^2 \geqq 0$ より $\displaystyle\int_a^b \{tf(x)+g(x)\}^2\,dx \geqq 0$ となることから，①より，

$$\int_a^b \{tf(x)+g(x)\}^2\,dx = At^2 + 2Bt + C \geqq 0 \ \cdots\cdots \ ②$$

と表すことができます。このとき，$\{f(x)\}^2 \geqq 0$ より $A = \displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \geqq 0$ であるので，

(i) $A > 0$ のとき

t の 2 次方程式 $At^2 + 2Bt + C = 0$ の解の判別式を D とすると，②の 2 次不等式 $At^2 + 2Bt + C \geqq 0$ が成り立つための条件は，

$$\frac{D}{4} = B^2 - AC \leqq 0$$

(ii) $A = 0$ のとき

常に $\{f(x)\}^2 = 0$，つまり，$f(x) = 0$ となるので $B = 0$ となり，

$$B^2 - AC = 0^2 - 0 \cdot C = 0$$

(i), (ii) より，$B^2 - AC \leqq 0$，つまり，

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$$

が成り立ち，この不等式を**シュワルツの不等式**といいます。

【例題 7 − 4】

シュワルツの不等式を利用して，次の不等式を証明しなさい。ただし，$a < b$ であるとします。

$$\left\{\int_a^b f(x)\,dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

＜解説＞

シュワルツの不等式

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$$

において，$g(x)=1$ とすると，

$$\left\{\int_a^b f(x)\cdot 1\,dx\right\}^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\cdot\int_a^b 1^2\,dx$$

ここで，

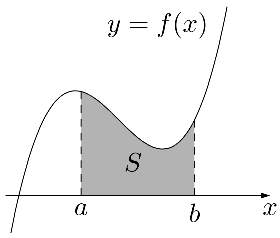
$$\int_a^b 1^2\,dx = \int_a^b dx = \Big[x\Big]_a^b = b-a$$

よって，

$$\left\{\int_a^b f(x)\,dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

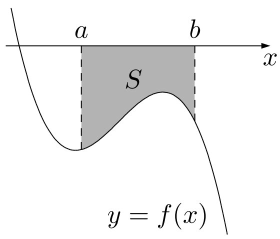
8　面積

8.1　曲線と x 軸の間の面積



区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，縦の長さ $f(x)$，横の長さ dx である長方形の $x=a$ から $x=b$ までの和 $\displaystyle\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



同じようにして，区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，縦の長さ $-f(x)$，横の長さ dx である長方形の $x=a$ から $x=b$ までの和 $\displaystyle\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$

そのため，曲線と x 軸の間の面積を求めるには，基本的に次のような手順で考えます。

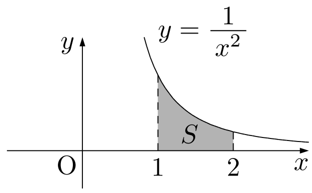
(i) x 軸との共有点や上下関係がわかる大体のグラフをかく。
(ii) 積分区間と被積分関数を決定する。
(iii) 定積分を計算して面積を求める。

【例題 8 − 1】

次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

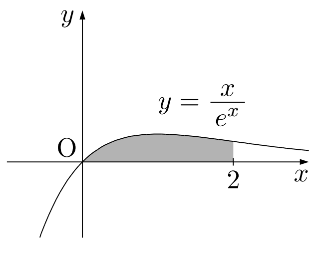
(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=2$　　　(2) $y=\dfrac{x}{e^x}$, $x=0$, $x=2$

＜解説＞



(1) 右図のように，$y=\dfrac{1}{x^2}$ は，区間 $1 \leqq x \leqq 2$ において常に $y>0$ であるので，求める面積 S は，

$$S=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$



(2) 右図のように，$y=\dfrac{x}{e^x}$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2$ において常に $y \geqq 0$ であるので，求める面積 S は，

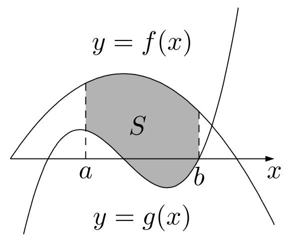
$$\begin{aligned}S&=\int_0^2 \frac{x}{e^x}\,dx=\int_0^2 xe^{-x}\,dx=\int_0^2 x\cdot(-e^{-x})'\,dx\\&=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^2-\int_0^2(-e^{-x})\,dx=-2e^{-2}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^2\\&=-2e^{-2}-e^{-2}-(-1)=1-\frac{3}{e^2}\end{aligned}$$

【演習 8 − 1】

次の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めなさい。

(1) $y = x^3 - x^2 - 2x$　　(2) $y = (x - e)\log x$

8.2　2 曲線間の面積



区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，縦の長さ $f(x)-g(x)$，横の長さ dx である長方形の $x=a$ から $x=b$ までの和 $\displaystyle\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

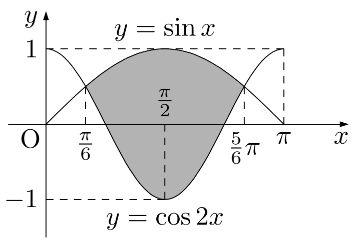
そのため，2 曲線間の面積を求めるには，基本的に次のような手順で考えます。

(ｉ) 2 曲線の共有点や上下関係がわかる大体のグラフをかく。
(ii) 積分区間と被積分関数を決定する。
(iii) 定積分を計算して面積を求める。

【例題 8 − 2】

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin x$, $y=\cos 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

＜解説＞



$0 \leqq x \leqq \pi$ における 2 曲線の共有点の x 座標は，$\sin x=\cos 2x$ を解くと，

$$\sin x = 1-2\sin^2 x$$
$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$
$$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$$
$$\sin x \geqq 0 \text{ より}\qquad \sin x=\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

このことから，2 曲線の位置関係は図のようになり，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ において $\sin x \geqq \cos 2x$ となります。よって，求める面積 S は，

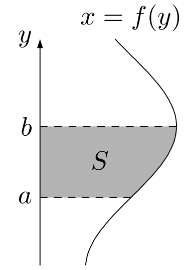
$$\begin{aligned} S&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\sin x-\cos 2x)\,dx=\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\\ &=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

【演習 8 − 2】

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

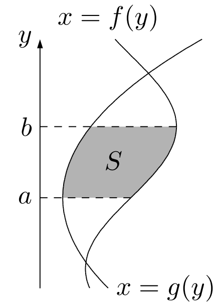
(1) $y=\dfrac{1}{3}x^4$, $y=-x^2+6$　　　(2) $y=\sin x$, $y=\sin 3x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

8.3 曲線と y 軸の間の面積



区間 $[a,\ b]$ で常に $f(y) \geqq 0$ であるとき，曲線 $x=f(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=a$, $y=b$ で囲まれた部分の面積 S は，横の長さ $f(y)$，縦の長さ dy である長方形の $y=a$ から $y=b$ までの和 $\displaystyle\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S=\int_a^b f(y)\,dy$$



同じようにして，区間 $[a,\ b]$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ であるとき，2 曲線 $x=f(y)$, $x=g(y)$ と 2 直線 $y=a$, $y=b$ で囲まれた部分の面積 S は，横の長さ $f(y)-g(y)$，縦の長さ dy である長方形の $y=a$ から $y=b$ までの和 $\displaystyle\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S=\int_a^b \{f(y)-g(y)\}\,dy$$

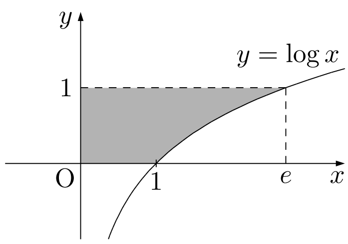
そのため，2 曲線間の面積を求めるには，基本的に次のような手順で考えます。

(ｉ) 2 曲線の共有点や位置関係がわかる大体のグラフをかく。
(ii) 積分区間と被積分関数を決定する。
(iii) 定積分を計算して面積を求める。

【例題 8 − 3】

曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および $y=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

＜解説＞



x 軸方向の積分では直接面積 S を求めることが大変なので，y 軸方向の積分で求めていきます。

そこで，$y=\log x$ を x について解くと $x=e^y$ と表すことができるので，求める面積 S は，横の長さ e^y，縦の長さ dy である長方形の $y=0$ から $y=1$ までの和であると考えて，

$$S=\int_0^1 e^y\,dy=\Big[e^y\Big]_0^1=e-1$$

＜別解＞

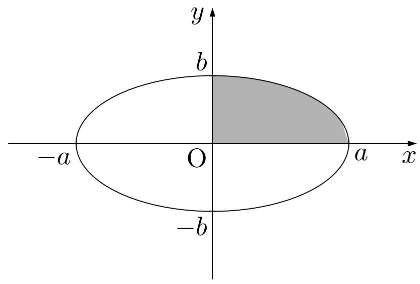
$y=0$ のとき $x=1$，$y=1$ のとき $x=e$ となるので，縦の長さ 1，横の長さ e の長方形から，曲線 $y=\log x$ と x 軸，直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積を取り除くことでも面積 S を求めることができます。

$$S=e-\int_1^e \log x\,dx=e-\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e=e-1$$

【演習 8 − 3】

曲線 $x=4y-y^2$ と曲線 $y=\sqrt{3x}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

8.4 楕円の面積



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，x 軸，y 軸に関して対称になるので，楕円の面積 S とすると，右図の影をつけた部分の面積の 4 倍になります。

楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと，

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

となるので，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の楕円の方程式は，

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

よって，

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$x=a\sin\theta$ とすると，$dx=a\cos\theta\,d\theta$ となり，x と θ の対応表は右のようになります。このことから，

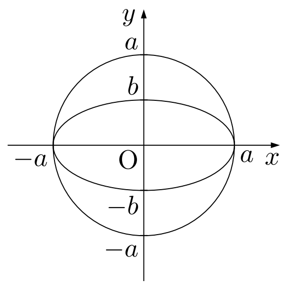
x	0	$\longrightarrow$	a
θ	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}S&=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot a\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=2ab\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab\end{aligned}$$

ただし，定積分 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を置換積分法を利用して求めましたが，これは，半径 a である四分円の面積を表すことから，

$$S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

と求めることもできます。



また，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍 に縮小または拡大した曲線であるので，その面積も円の面積 πa^2 を $\dfrac{b}{a}$ 倍したものになり，

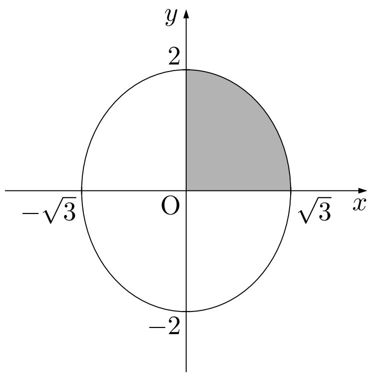
$$\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$$

と考えることができます。

【例題 8 − 4】

楕円 $4x^2+3y^2=12$ で囲まれた図形の面積を，定積分を用いて求めなさい。

＜解説＞



楕円 $4x^2+3y^2=12$ は，x 軸，y 軸に関して対称になるので，楕円の面積 S とすると，右図の影をつけた部分の面積の 4 倍になります。

楕円の方程式 $4x^2+3y^2=12$ を y について解くと，

$$\begin{aligned} 3y^2 &= 12-4x^2 \\ y^2 &= \frac{4}{3}(3-x^2) \\ y &= \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{3-x^2} \end{aligned}$$

となるので，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の楕円の方程式は，

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{3-x^2}$$

よって，求める面積 S は，

$$S = 4\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{8\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の四分円の面積を表すので，

$$S = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3}\pi$$

8.5　媒介変数表示の曲線と面積

曲線の方程式が媒介変数 t によって，$x = f(t)$, $y = g(t)$ で表されるような曲線であっても，曲線と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分の面積 S は，常に $y \geqq 0$ であれば，

$$S = \int_a^b y\,dx$$

となります。このとき，定積分の計算は，$a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$ であるとすると，$dx = f'(t)\,dt$ より置換積分法を利用して，

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

【例題 8 − 5】

媒介変数 t によって，$\begin{cases} x = 2\cos 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ と表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

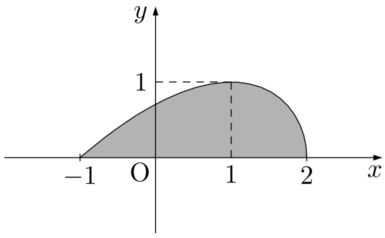
＜解説＞

$\dfrac{dx}{dt} = -4\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3\cos 3t$ であり，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ とすると，$3t = \dfrac{\pi}{2}$ より，

$$t = \frac{\pi}{6}$$

となるので，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ における t の値に対応する x, y の変化は次のようになります。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
x	2	$\leftarrow$	1	$\leftarrow$	-1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0



このことから，曲線の概形は右図で，求める面積は図の影をつけた部分になります。

よって，求める面積 S は，

$$S = \int_{-1}^{2} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin 3t \cdot (-4\sin 2t)\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \sin 2t\,dt = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 5t - \cos t)\,dt$$

$$= -2\left[\frac{1}{5}\sin 5t - \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\left\{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$$

【演習 8 − 5】

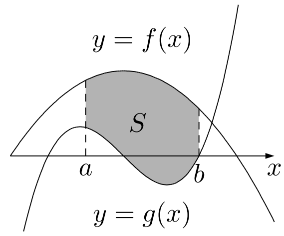
次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1)　曲線 $x = \dfrac{t}{2}$, $y = \dfrac{1}{4}t^2 - t$ と x 軸　　(2)　$x = 2\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(3)　曲線 $x = \sin t$, $y = t\cos t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸

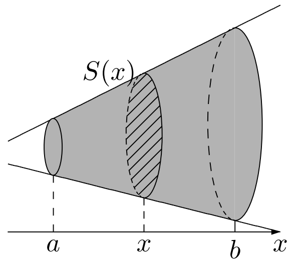
9　体積

9.1　断面積と立体の体積



区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるとき，2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は，縦の長さ $f(x) - g(x)$，横の長さ dx である長方形の $x = a$ から $x = b$ までの和 $\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$



右図のような立体の体積について同じようにして考えることができます。

x 軸に垂直な 2 平面 α, β に挟まれた部分の体積を V，2 平面 α, β と x 軸との交点の座標を，それぞれ a, b（ただし，$a < b$）とします。このとき，$a \leqq x \leqq b$ において，x 軸に垂直な平面で切ったときの断面積は x の関数で表されるので，それを $S(x)$ とすれば，体積 V は，底面積 $S(x)$，高さ dx である立体の体積の $x = a$ から $x = b$ までの和 $\int_a^b$ と考えることで，次のように表すことができます。

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

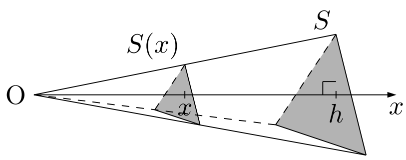
このことから，立体の体積は次のような手順で求めます。

(ｉ) 簡単な図（グラフ）をかいて，立体のようすを確認する。
(ii) 立体の断面積を x の関数で表し，積分区間を定める。
(iii) 定積分を計算する。

【例題 9 − 1】

底面積 S，高さ h の角錐の体積 V を，定積分を用いて求めなさい。

＜解説＞



右図のように角錐の頂点を原点 O とし，角錐の底面と x 軸が垂直に交わるように x 軸をとります。このとき，x 軸上の座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面で角錐を切ったときの切り口の面積を $S(x)$ とすると，切り口の多角形と底面の多角形は相似になり，その相似比は $x : h$ であることから，

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$
$$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

よって，

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}Sh$$

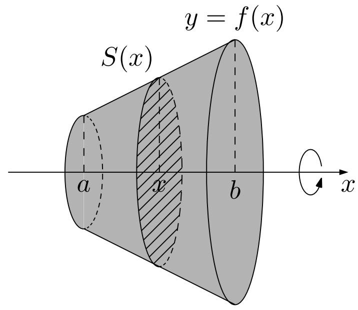
【演習 9 − 1】

底面の半径が 3 cm の円柱があります。底面の直径 AB を含み，底面と 45° の角をなす平面で円柱を切り取るとき，切り取られた立体の体積を求めなさい。

9.2　x 軸の周りの回転体の体積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b\ (a<b)$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えます。

右図のように，点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，半径 $|\,f(x)\,|$ の円になるので，その面積 $S(x)$ は次のように表されます。



$$S(x)=\pi|\,f(x)\,|^2=\pi\{f(x)\}^2=\pi y^2$$

よって，回転体の体積 V は，次のように求めることができます。

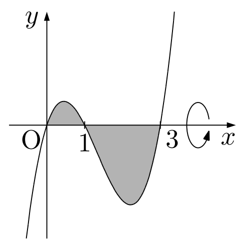
$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

【例題 9 − 2】

曲線 $y=x^3-4x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めなさい。

＜解説＞

曲線と x 軸との交点の x 座標は，$x^3-4x^2+3x=0$ より，



$$\begin{aligned} x(x^2-4x+3)&=0\\ x(x-1)(x-3)&=0\\ x&=0,\ 1,\ 3\end{aligned}$$

よって，求める体積を V とすると，右の図から，

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^3 y^2\,dx=\pi\int_0^3(x^3-4x^2+3x)^2\,dx=\pi\int_0^3(x^6+16x^4+9x^2-8x^5-24x^3+6x^4)\,dx\\ &=\pi\int_0^3(x^6-8x^5+22x^4-24x^3+9x^2)\,dx=\pi\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{3}x^6+\frac{22}{5}x^5-6x^4+3x^3\right]_0^3\\ &=\pi\left(\frac{2187}{7}-972+\frac{5346}{5}-486+81\right)=\frac{162}{35}\pi\end{aligned}$$

【演習 9 − 2】

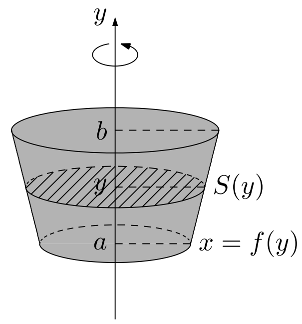
次の曲線と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めなさい。

(1) $y=1-x^4$　　(2) $x^2+4y^2=4$　　(3) $y=\sin x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$

9.3　y 軸の周りの回転体の体積

曲線 $x = f(y)$ と y 軸および 2 直線 $y = a$, $y = b$ $(a < b)$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えます。

右図のように，点 $(0,\ y)$ を通り，y 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，半径 $|\,f(y)\,|$ の円になるので，その面積 $S(y)$ は次のように表されます。



$$S(y) = \pi|\,f(y)\,|^2 = \pi\{f(y)\}^2 = \pi x^2$$

よって，回転体の体積 V は，次のように求めることができます。

$$V = \int_a^b S(y)\,dy = \pi\int_a^b \{f(y)\}^2\,dy = \pi\int_a^b x^2\,dy$$

【例題 9 − 3】

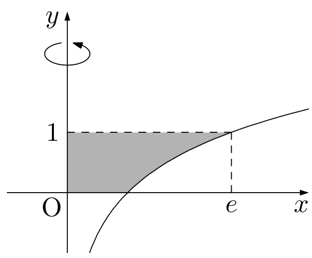
曲線 $y = \log x$ と x 軸，y 軸および $y = 1$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

＜解説＞

$y = \log x$ より，

$$x = e^y$$

よって，右の図より求める体積 V は，



$$V = \pi\int_0^1 x^2\,dy = \pi\int_0^1 e^{2y}\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

【演習 9 − 3】

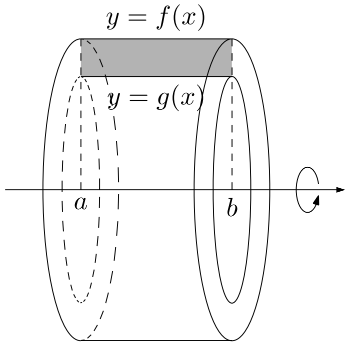
次の曲線と直線で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

(1) $y = \log(1 + x)$，y 軸，$y = 2$　　　(2) $y = 1 - \sqrt{x}$，x 軸，y 軸

9.4　2 曲線間の回転体の体積 (1)

区間 $[a,\ b]$ において，$f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ であるとします。

2 つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分（右図の影をつけた部分）を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $\pi\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$ から，曲線 $y=g(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $\pi\displaystyle\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$ を取り除くことにより得られるので，



$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx-\pi\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b \left[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right]dx$$

このとき，回転体の体積 V を，

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

と計算しないように注意しましょう。

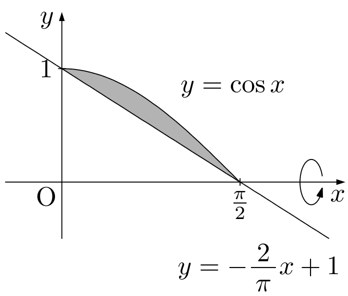
【例題 9 － 4】

曲線 $y=\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+1$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

＜解説＞

曲線 $y=\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分，を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は，

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$



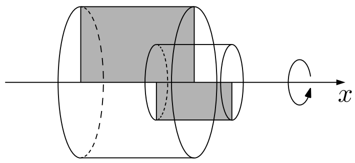
この体積から，直線 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+1$ と x 軸，y 軸に囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を取り除けば，求める立体の体積になります。このとき，この回転体は底面の半径が 1，高さが $\dfrac{\pi}{2}$ の円錐になるので，求める体積 V は，

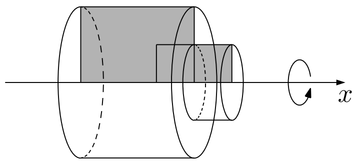
$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx-\frac{\pi^2}{6}\\&=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

【演習 9 － 4】

区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，2 曲線 $y=2\sin 2x$, $y=\tan x$ が囲む図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

9.5　2曲線間の回転体の体積 (2)





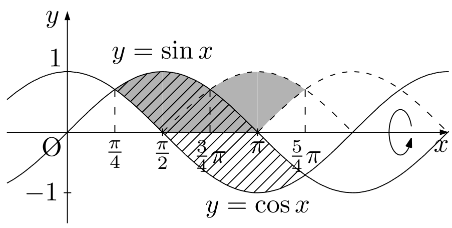
曲線や直線に囲まれた部分が回転軸の両側にあると，回転軸の一方の側にある部分が回転することによりできる立体と，回転軸のもう一方の側にある部分が回転することによりできる立体とが重なってしまう場合があります（右図)。

そのため，そのような回転体の体積を求めるには，どの部分が重なっているのかを正しく把握する必要があります。このとき，立体にしてから重なりを考えるよりも，平面の状態で考えた方が楽であるので，囲まれた部分を回転軸の一方の側に集めることで重なりを把握します。

【例題 9 − 5】

2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

<解説>



2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$ で囲まれた部分は右図の斜線部分になります。これを x 軸の周りに 1 回転してできる立体は，x 軸より下側にある部分を，x 軸に関して折り返すことにより得られる右図の影をつけた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体と等しくなります。また，その図形は $x = \dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称になるので，

$$
\begin{aligned}
V &= 2\left(\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 x\,dx - \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx\right) = 2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\right) \\
&= \pi\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (1-\cos 2x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx\right\} = \pi\left(\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \pi\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{4}(\pi + 6)
\end{aligned}
$$

【演習 9 − 5】

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 曲線 $y = \sin x$, $y = -\sin 2x$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

9.6 媒介変数表示の曲線と体積

曲線の方程式が媒介変数 θ によって，$x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ で表されるような曲線であっても，曲線と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は，次のように表されます。

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

このとき，定積分の計算は，$a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$ であるとすると，$dx = f'(\theta)\,d\theta$ より置換積分法を利用して，

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \int_\alpha^\beta \{g(\theta)\}^2 f'(\theta)\,d\theta$$

また，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積においても，同じようにして求めることができます。

【例題 9 − 6】

θ を媒介変数とする曲線 $x = \sin\theta$, $y = \theta - \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ があります。

(1) この曲線の概形をかきなさい。

(2) この曲線と y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

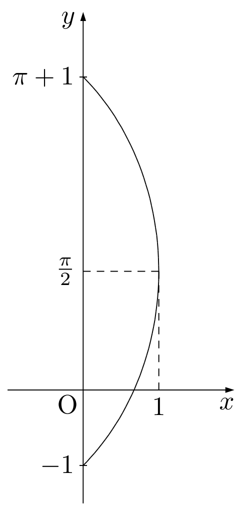
＜解説＞

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = 1 + \sin\theta\ (> 0)$ であるので，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ とすると，$\cos\theta = 0$ より，

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の値に対応する x, y の変化は次のようになり，曲線の概形は右図のようになります。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
x	0	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	2	$+$	
y	-1	$\uparrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\uparrow$	$\pi+1$



(2) (1) より，求める体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{\pi+1} x^2\,dy = \pi\int_0^\pi \sin^2\theta(1+\sin\theta)\,d\theta = \pi\int_0^\pi (\sin^2\theta + \sin^3\theta)\,d\theta \\ &= \pi\int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}\right)d\theta = \pi\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^\pi \\ &= \pi\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{12}\right)\right\} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

【演習 9 − 6】

t を媒介変数とする曲線 $x = \sin 2t,\ y = (1-t)^2\ (0 \leqq t \leqq 1)$ があります。

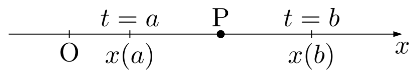
(1) この曲線の概形をかきなさい。

(2) この曲線と x 軸および y 軸とで囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

10　道のり

10.1　直線上の運動と道のり

点 P が数直線上を運動するとき，点 P の時刻 t における座標を $x = x(t)$，速度を $v = v(t)$ とすると，



$$v = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

であるので，$t = a$ から $t = b$ までの点 P の位置の変化量 s は，

$$s = x(b) - x(a) = \Big[x(t)\Big]_a^b = \int_a^b x'(t)\,dt = \int_a^b v(t)\,dt$$

と表すことができ，このことから，$t = b$ における点 P の座標は次のようになります。

$$x(b) = x(a) + \int_a^b v(t)\,dt$$

また，$t = a$ から $t = b$ までの点 P の動いた道のり l は，$x(a)$ から $x(b)$ に後戻りすることなく進めば（$v(t) \geqq 0$ であれば），位置の変化量 s に一致します。しかし，後戻りすることがあれば（$v(t) < 0$ となることがあれば），その移動距離分も考慮する必要があるので，$|\,v(t)\,|$ の定積分により求めることができます。

$$l = \int_a^b |\,v(t)\,|\,dt$$

【例題 10 − 1】

原点を出発して x 軸上を運動する点 P の t 秒後における速度 v を，$v = 9t^2 - 45t$ とします。

(1) P の t 秒後の座標を求めなさい。

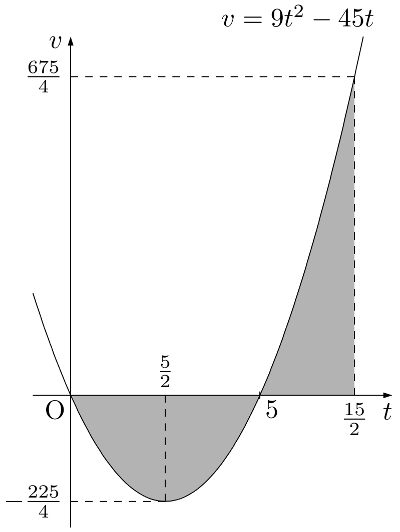
(2) P は何秒後に原点に戻ってきますか。

(3) P が原点を出発してから原点に戻ってくるまでに動いた道のり s を求めなさい。

＜解説＞

(1) t 秒後の P の座標を x とすると，

$$x = 0 + \int_0^t v\,dt = \int_0^t (9t^2 - 45t)\,dt = \left[3t^3 - \frac{45}{2}t^2\right]_0^t = 3t^3 - \frac{45}{2}t^2$$



(2) 原点に戻ってくるとき，$x = 0$ であるので，

$$3t^3 - \frac{45}{2}t^2 = 0$$

$$t^2\left(t - \frac{15}{2}\right) = 0$$

$$t > 0 \text{ より}\quad t = \frac{15}{2}$$

よって，$\frac{15}{2}$ 秒後

(3) $9t^2-45t=9t(t-5)$ であるので，$0 \leqq t \leqq 5$ のとき $v \leqq 0$，$5 \leqq t \leqq \dfrac{15}{2}$ のとき $v \geqq 0$

よって，求める道のり s は，

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\frac{15}{2}} |\,v\,|\,dt = \int_0^5 (-v)\,dt + \int_5^{\frac{15}{2}} v\,dt = \int_0^5 (45t-9t^2)\,dt + \int_5^{\frac{15}{2}} (9t^2-45t)\,dt \\
&= \left[\frac{45}{2}t^2 - 3t^3\right]_0^5 + \left[3t^3 - \frac{45}{2}t^2\right]_5^{\frac{15}{2}} \\
&= \left(\frac{45}{2}\cdot 5^2 - 3\cdot 5^3\right) + \left(3\cdot\frac{15^3}{2^3} - \frac{45}{2}\cdot\frac{15^2}{2^2}\right) - \left(3\cdot 5^3 - \frac{45}{2}\cdot 5^2\right) \\
&= 2\left(\frac{45}{2}\cdot 5^2 - 3\cdot 5^3\right) = 375
\end{aligned}$$

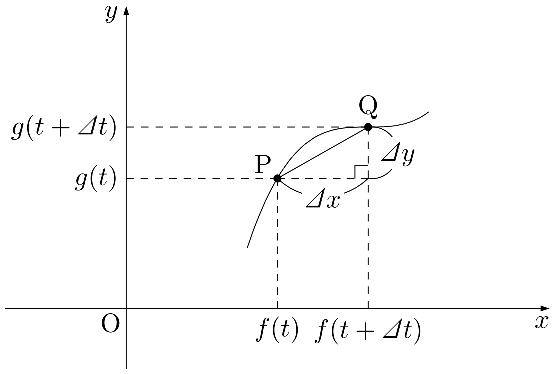
【演習 10 − 1】

原点を出発して x 軸上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が，$v=\sqrt{3}\sin\pi t+\cos\pi t$ で与えられているとします。

1. 点 P が出発後初めて停止する瞬間の点 P の座標を求めなさい。
2. 出発後 $t=2$ までに，点 P の動いた道のりを求めなさい。

10.2　平面上の運動と道のり

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ とし，時刻 a から時刻 t までに P が通過する道のりを $s(t)$ とします。t の増分 $\varDelta t$ に対する $x, y, s(t)$ の増分をそれぞれ $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta s$ で表すと，$\varDelta t$ が十分小さい正の値のとき，$\mathrm{Q}(f(t+\varDelta t),\ g(t+\varDelta t))$ とすると，$\varDelta s$（道のり PQ）は線分 PQ の長さにほぼ等しいと考えることができます。よって，



$$\varDelta s \fallingdotseq \sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}$$

この両辺を $\varDelta t$ で割ると，

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}$$

ここで，$\varDelta t \longrightarrow 0$ とすると，

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

このことから，時刻 a から b までに P が通過する道のり s は，

$$s = s(b)-s(a) = \Big[s(t)\Big]_a^b = \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

また，時刻 t における P の速度 $\vec{v}$ の大きさ $\left|\vec{v}\right|$ は，

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

であるので，平面上の運動であっても直線上の運動と同じように，道のり s は次の式で表すことができます。

$$s = \int_a^b \left|\vec{v}\right| dt$$

【例題 10 − 2】

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が，$\mathrm{P}(e^{\sqrt{3}t}\cos t,\ e^{\sqrt{3}t}\sin t)$ で表されるとき，次の問いに答えなさい。

(1) 時刻 t における P の速度を $\vec{v}$ とするとき，$\left|\vec{v}\right|$ を求めなさい。

(2) $t=0$ から $t=2\pi$ までの間に P が動いた道のりを求めなさい。

<解説>

(1) $x = e^{\sqrt{3}t}\cos t$ より，

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\cos t - e^{\sqrt{3}t}\sin t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\cos t - e^{\sqrt{3}t}\sin t)^2 = 3e^{2\sqrt{3}t}\cos^2 t - 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}t}\sin t\cos t + e^{2\sqrt{3}t}\sin^2 t$$

同じようにして，$y = e^{\sqrt{3}t}\sin t$ より，

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\sin t + e^{\sqrt{3}t}\cos t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\sin t + e^{\sqrt{3}t}\cos t)^2 = 3e^{2\sqrt{3}t}\sin^2 t + 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}t}\sin t\cos t + e^{2\sqrt{3}t}\cos^2 t$$

となるので，

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{3e^{2\sqrt{3}t}(\sin^2 t + \cos^2 t) + e^{2\sqrt{3}t}(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{4e^{2\sqrt{3}t}} = 2e^{\sqrt{3}t}$$

(2) (1) より，P が動いた道のり s は，

$$s = \int_0^{2\pi}\left|\vec{v}\right|dt = \int_0^{2\pi} 2e^{\sqrt{3}t}\,dt = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(e^{2\sqrt{3}\pi} - 1)$$

【演習 10 − 2】

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 4t, \quad y = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 16t$$

で表されるとき，$t = 0$ から $t = 4$ までに P が通過する道のり s を求めなさい。

10.3　媒介変数で表された曲線の長さ

平面上の曲線の方程式が，媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

で表されるとき，この曲線の長さ L は，平面上を運動する点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ が，時刻 $t = a$ から $t = b$ までに通過する道のりと同じであると考えることができるので，次の式で表すことができます。

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$$

【例題 10 − 3】

次の曲線の長さ L を求めなさい。

(1) $x = t^2,\ y = t^3 \quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{5})$　　(2) $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

＜解説＞

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 3t^2$ であるので，

$$L = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{9t^2 + 4}\,dt$$

ここで，$9t^2 + 4 = x$ とおくと，$18tdt = dx$ と表すことができ，t と x の対応は右のようになるので，

t	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{5}$
x	4	$\longrightarrow$	49

$$L = \int_4^{49} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{18}\,dx = \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^{49} = \frac{343 - 8}{27} = \frac{335}{27}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = 3\sin^2 t\cos t,\ \dfrac{dy}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t) = -3\sin t\cos^2 t$ で，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin t \geqq 0,\ \cos t \geqq 0$ であることから，

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\sin^2 t\cos t)^2 + (-3\sin t\cos^2 t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin 2t\,dt$$
$$= \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}(1 + 1) = \frac{3}{2}$$

【演習 10 − 3】

次の曲線の長さ L を求めなさい。

(1) $x = t^2,\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$　　(2) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

10.4　曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ は，媒介変数 t を用いて次のように表すことができます。

$$x=t, \qquad y=f(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

このとき，

$$\frac{dx}{dt}=1, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

となるので，この曲線の長さ L は，次の式で表すことができます。

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

【例題 10 − 4】

曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めなさい。

＜解説＞

$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ であり，また，$\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ であるので，求める長さ L は，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx\\&=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

【演習 10 − 4】

次の曲線の長さ L を求めなさい。

(1) $y=\log(1-x^2)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$　　(2) $y=x\sqrt{x}$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{5}{9}\right)$