【数学 III】関数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　分数関数

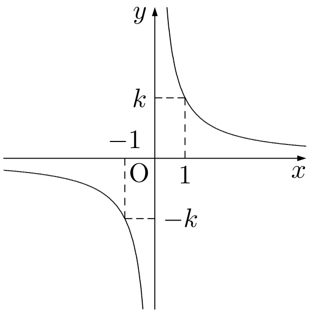
x の分数式（分母が x の 1 次以上の整式）で表される関数を x の**分数関数**といい、ここでは、分母が x の 1 次式、分子が x の 1 次式または定数である $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ という形の分数関数について考えます。分数関数の定義域は、特に断りがない場合、分母を 0 にしない実数 x 全体になります。

1.1　分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ

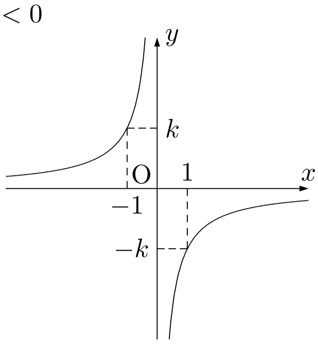
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ のグラフは、反比例のグラフであるので、次のような特徴をもつ双曲線になります。このとき、直角に交わる 2 直線（x 軸と y 軸）が漸近線となるので、この双曲線を**直角双曲線**とよぶことがあります。

① 原点に関して対称
② 2 直線 x 軸（$y=0$）、y 軸（$x=0$）が漸近線
③ $k>0$ のとき第 1 象限・第 3 象限、$k<0$ のとき第 2 象限・第 4 象限にある

(i) $k>0$



(ii) $k<0$



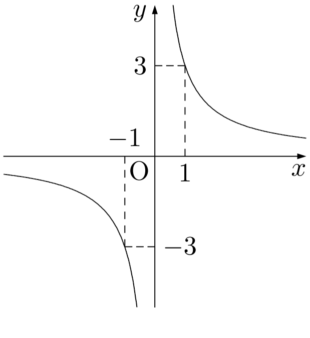
【例題 1 − 1】

次の関数のグラフをかきなさい。

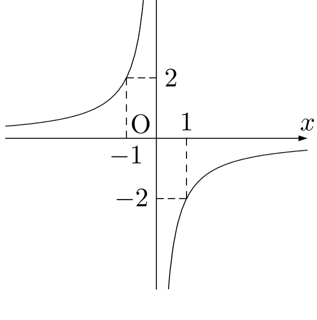
(1) $y=\dfrac{3}{x}$　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$

＜解説＞

(1)



(2)



1.2　分数関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフ

分数関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ は、

$$y - q = \frac{k}{x-p}$$

より、$y = \dfrac{k}{x}$ の x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x - p, \qquad y \longrightarrow y - q$$

と置き換えたものになっているので、そのグラフは、$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したものになります。このことから、$y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフには、次のような特徴があります。

① 点 $(p,\ q)$ に関して対称
② 2 直線 $x = p,\ \ y = q$ が漸近線
③ 点 $(p,\ q)$ に対して、$k > 0$ のとき右上・左下、$k < 0$ のとき左上・右下にある

【例題 1 − 2】

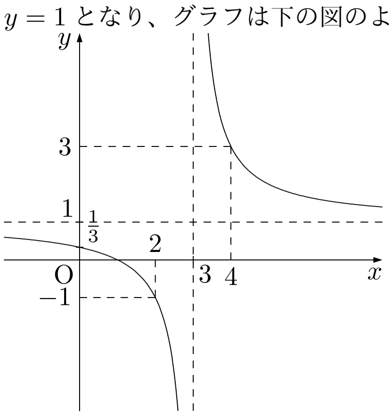
次の関数のグラフの漸近線を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$　　　　(2) $y = -\dfrac{3}{x+1} - 2$

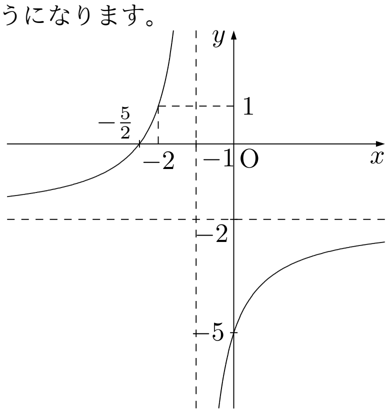
＜解説＞

$y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフは、点 $(p,\ q)$ を原点、直線 $y = q$ を x 軸、直線 $x = p$ を y 軸だとみなし、$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフをかくことで得られます。

(1) $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ のグラフは、$y = \dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3、y 軸方向に 1 だけ平行移動したものになります。このことから、漸近線は 2 直線 $x = 3$, $y = 1$ となり、グラフは下の図のようになります。



(2) $y = -\dfrac{3}{x+1} - 2$ のグラフは、$y = -\dfrac{3}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1、y 軸方向に -2 だけ平行移動したものになります。このことから、漸近線は 2 直線 $x = -1$, $y = -2$ となり、グラフは下の図のようになります。



【演習１－２】

次の関数のグラフの漸近線を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y = \dfrac{3}{x+3} - 1$　　(2) $y = -\dfrac{4}{x-2} - 5$

1.3 分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は、$c \fallingdotseq 0,\ ad \fallingdotseq bc$ のとき、

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$

のようにして、$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形することによりそのグラフを考えることができます。

【例題 1 − 3】

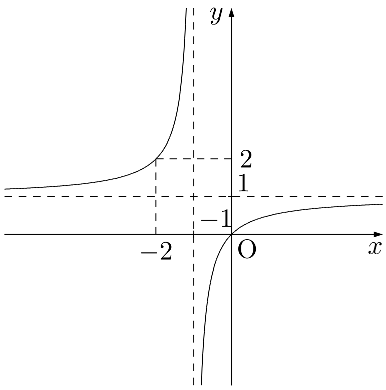
次の関数のグラフの漸近線を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y=\dfrac{x}{x+1}$　　(2) $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$

＜解説＞

(1) 関数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ は、

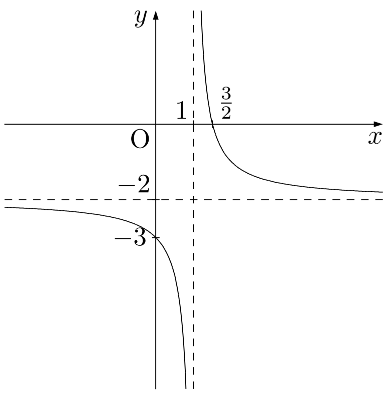
$$\begin{aligned} y&=\frac{x}{x+1}\\ &=\frac{(x+1)-1}{x+1}\\ &=-\frac{1}{x+1}+1 \end{aligned}$$



のように変形できるので、$y=\dfrac{x}{x+1}$ のグラフは、$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1、y 軸方向に 1 だけ平行移動したものになります。このことから、漸近線は、2 直線 $x=-1,\ y=1$ となり、そのグラフは右図。

(2) 関数 $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$ は、

$$\begin{aligned} y&=\frac{-2x+3}{x-1}\\ &=\frac{-2(x-1)-2+3}{x-1}\\ &=\frac{1}{x-1}-2 \end{aligned}$$



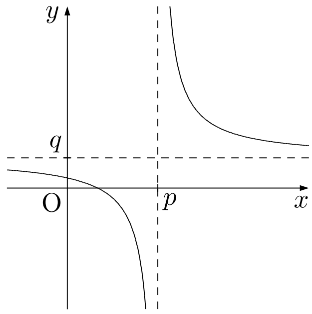
のように変形できるので、$y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$ のグラフは、$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1、y 軸方向に -2 だけ平行移動したものになります。このことから、漸近線は、2 直線 $x=1,\ y=-2$ となり、そのグラフは右図。

【演習 1 − 3】

次の関数のグラフの漸近線を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y=\dfrac{-x}{x+1}$　　(2) $y=\dfrac{-2x-5}{2x+3}$

1.4 分数関数の値域



分数関数の定義域は、特に断りがない場合、分母を 0 にしない実数 x 全体になります。そのため、関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k \fallingdotseq 0)$ の定義域は $x \fallingdotseq p$ となり、2 直線 $x=p,\ y=q$ が漸近線となることからも明らかです。また、そのことから、値域は $y \fallingdotseq q$ となります。

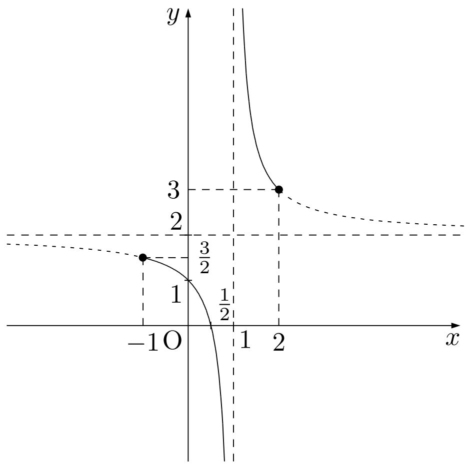
関数の値域（定義域）を求める問題では、グラフを利用して考えることが基本になります。そのことは分数関数においても例外ではありません。また、定義域に制限のある関数の値域を求める場合には、端点が重要になるので、その値を求めておくと、値域を求めたりグラフをかいたりするのに役立ちます。

【例題 1 − 4】

次の関数のグラフをかき、その値域を求めなさい。

$$y=\frac{2x-1}{x-1} \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$$

＜解説＞



$y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-1}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+2-1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1}+2 \end{aligned}$$

と変形できるので、そのグラフは、$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1、y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフになります。

また、

- $x=-1$ のとき：$y=\dfrac{2\cdot(-1)-1}{-1-1}=\dfrac{3}{2}$
- $x=2$ のとき：$y=\dfrac{2\cdot 2-1}{2-1}=3$

となり、漸近線は、2 直線 $x=1,\ y=2$ となることから、グラフは図の実線部分になります。よって、値域は、

$$y \leqq \frac{3}{2},\ 3 \leqq y$$

【演習 1 − 4】

次の関数のグラフをかき、その値域を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{x}{x-2} \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$　　(2) $y=\dfrac{3x-2}{x+1} \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$

1.5 分数関数の決定

分数関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q \ (k \fallingdotseq 0)$ のグラフは、2 直線 $x = p,\ y = q$ を漸近線にもちます。逆に、2 直線 $x = p,\ y = q$ を漸近線とするような分数関数のグラフは、関数 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフになります。このことから、漸近線の条件から $p,\ q$ の値を、また、通る点の条件から k の値を求めることができ、分数関数を決定することができます。

【例題 1 − 5】

関数 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ のグラフは、2 直線 $x = -3,\ y = 2$ を漸近線とし、点 $(-2,\ 5)$ を通るとき、定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めなさい。

＜解説＞

2 直線 $x = -3,\ y = 2$ を漸近線とするので、関数を次のように表すことができます。

$$y = \frac{k}{x-(-3)} + 2 \quad (k \fallingdotseq 0)$$

このグラフが点 $(-2,\ 5)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} \frac{k}{-2+3} + 2 &= 5 \\ k &= 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

となり、これは $k \fallingdotseq 0$ を満たします。このことから、分数関数は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{x+3} + 2 \\ &= \frac{3 + 2(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{2x+9}{x+3} \end{aligned}$$

と表されるので、この式と $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ の係数を比較して、

$$a = 2, \quad b = 9, \quad c = 3$$

【演習 1 − 5】

関数 $y = \dfrac{ax+b}{2x+c}$ のグラフが、点 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通り、2 直線 $x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}$ を漸近線とするとき、定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めなさい。

1.6 分数関数のグラフと方程式

2 つの関数のグラフの共有点の座標は、y（または x）を消去して得られる方程式を解くことにより求めることができます。

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \longrightarrow f(x) = g(x)$$

2 つの関数の一方が分数関数である場合においても、同様にして共有点の座標を求めることができますが、分数関数は、「分母を 0 にしない実数 x 全体」が定義域になるので、得られる解が適するかどうかを判断する必要があり、ここではそれをグラフから判断します。

【例題 1 − 6】

次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めなさい。

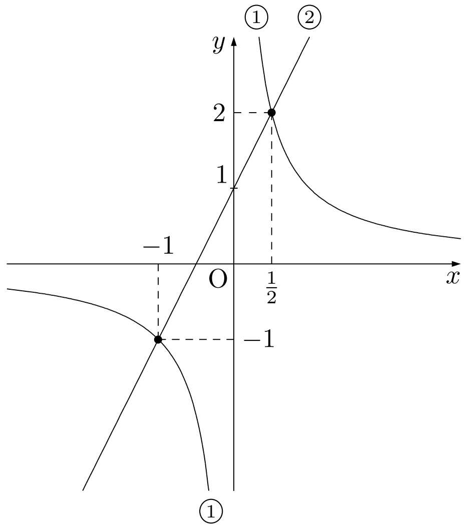
(1) $y = \dfrac{1}{x},\ y = 2x + 1$　　(2) $y = \dfrac{1}{x-2},\ y = x$

＜解説＞

(1) それぞれの関数を、

$$y = \frac{1}{x} \ \cdots\cdots\ ①, \qquad y = 2x + 1 \ \cdots\cdots\ ②$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、分母を払って整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 2x + 1 \\ 2x^2 + x &= 1 \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \\ (2x - 1)(x + 1) &= 0 \\ x &= \frac{1}{2},\ -1 \end{aligned}$$

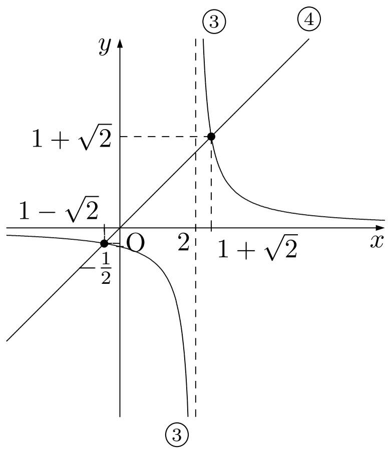
よって、グラフより求める座標は、

$$\left(\frac{1}{2},\ 2\right), \quad (-1,\ -1)$$

(2) それぞれの関数を、

$$y = \frac{1}{x-2} \ \cdots\cdots\ ③, \qquad y = x \ \cdots\cdots\ ④$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。③, ④より y を消去し、分母を払って整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} &= x \\ x^2 - 2x &= 1 \\ x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x &= -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-1)} = 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、グラフより求める座標は、

$$(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}),\quad (1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$$

【演習 1 − 6】

次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めなさい。

(1) $y = \dfrac{2}{x+3},\ y = x+4$

(2) $y = \dfrac{4x}{2x-1},\ y = 2x$

1.7 分数方程式

分数式を含む方程式を**分数方程式**といいます。

分数方程式は、ある関数と分数関数との共有点の x 座標を求めると考えることで解くことができますが、解の存在をグラフで確認する必要があります。分数関数は、「分母を 0 にしない実数 x 全体」が定義域になるので、分数方程式を解くときには、分母を 0 にしない x の範囲において、分母を払って通常の方程式と同様に解くことができます。

【例題 1 − 7】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\dfrac{3}{x-2} = x$　　(2) $\dfrac{6}{x+4} = -x+1$

＜解説＞

(1) 分母は 0 でないので、

$$x \fallingdotseq 2 \cdots\cdots ①$$

与えられた方程式を、分母を払って整理して解くと、

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} &= x \\ 3 &= x(x-2) \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ x &= 3,\ -1 \end{aligned}$$

この値は①の条件を満たすので、求める方程式の解は、

$$x = 3,\ -1$$

(2) 分母は 0 でないので、

$$x \fallingdotseq -4 \cdots\cdots ②$$

与えられた方程式を、分母を払って整理して解くと、

$$\begin{aligned} \frac{6}{x+4} &= -x+1 \\ 6 &= -(x-1)(x+4) \\ x^2 + 3x - 4 + 6 &= 0 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x+1)(x+2) &= 0 \\ x &= -1,\ -2 \end{aligned}$$

この値は②の条件を満たすので、求める方程式の解は、

$$x = -1,\ -2$$

【演習 1 − 7】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\dfrac{x-3}{x-1} - 1 = -x$　　(2) $x + 2 = \dfrac{3}{x-7} + 7$

1.8 分数関数のグラフと不等式

分数式を含む不等式を**分数不等式**といいます。

$f(x) > g(x)$ ($f(x)$ または $g(x)$ が分数式) のような分数不等式では、不等式の両辺に対応する関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの上下関係から、不等式の解を求めることができます。

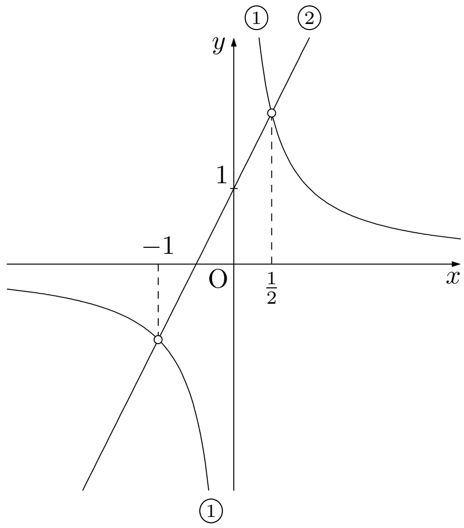
【例題 1 − 8】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{1}{x} > 2x + 1$　　　　(2) $\dfrac{1}{x-2} \leqq x$

＜解説＞

(1) $y = \dfrac{1}{x}$ ······· ①, $y = 2x + 1$ ······· ② とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、分母を払って整理した方程式を解くと、①, ②の共有点の x 座標は次のようになります。

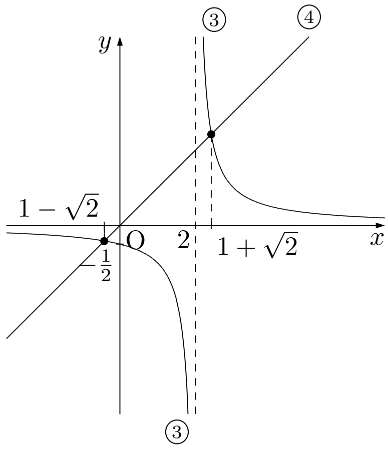


$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= 2x + 1\\ 2x^2 + x &= 1\\ 2x^2 + x - 1 &= 0\\ (2x - 1)(x + 1) &= 0\\ x &= \frac{1}{2},\ -1\end{aligned}$$

よって、①のグラフが②のグラフよりも上側にある x の値の範囲を求めて、

$$x < -1, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

(2) $y = \dfrac{1}{x-2}$ ······· ③, $y = x$ ······· ④ とすると、そのグラフは右図のようになります。③, ④より y を消去し、分母を払って整理した方程式を解くと、③, ④の共有点の x 座標は次のようになります。



$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} &= x\\ x^2 - 2x &= 1\\ x^2 - 2x - 1 &= 0\\ x &= -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1\cdot(-1)} = 1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって、④のグラフが③のグラフよりも上側にあるか一致する x の値の範囲を求めて、

$$1 - \sqrt{2} \leqq x < 2, \quad 1 + \sqrt{2} \leqq x$$

【演習１－８】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{2}{x+3} \geqq x+4$　　(2) $\dfrac{4x}{2x-1} < 2x$

1.9 分数不等式

分数不等式は、グラフの上下関係からその解を求めることができますが、すべての項を左辺に集めて $\dfrac{A}{B} > 0$ のような 1 つの分数式で表し、左辺にある A, B の因数の符号をチェックすることでも不等式を解くことができます。

【例題 1 − 9】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{3}{x-2} > x$　　(2) $\dfrac{6}{x+4} \leqq -x+1$

＜解説＞

(1) 与えられた不等式は次のように変形することができます。

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-2} &> x\\ \frac{3}{x-2} - x &> 0\\ \frac{3-x(x-2)}{x-2} &> 0\\ -\frac{x^2-2x-3}{x-2} &> 0\\ \frac{(x-3)(x+1)}{x-2} &< 0\end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
P	$-$	0	$+$	／	$-$	0	$+$

この式の左辺を P とすると、各因数の符号を調べると上の表のようになるので、求める不等式の解は、

$x < -1, \quad 2 < x < 3$

(2) 与えられた不等式は次のように変形することができます。

$$\begin{aligned}\frac{6}{x+4} &\leqq -x+1\\ \frac{6}{x+4} + x - 1 &\leqq 0\\ \frac{6+(x-1)(x+4)}{x+4} &\leqq 0\\ \frac{x^2+3x+2}{x+4} &\leqq 0\\ \frac{(x+1)(x+2)}{x+4} &\leqq 0\end{aligned}$$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
P	$-$	／	$+$	0	$-$	0	$+$

この式の左辺を P とすると、各因数の符号を調べると上の表のようになるので、求める不等式の解は、

$x < -4, \quad -2 \leqq x \leqq -1$

【演習 1 − 9】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{x-3}{x-1} - 1 \geqq -x$　　(2) $x+2 > \dfrac{3}{x-7} + 7$

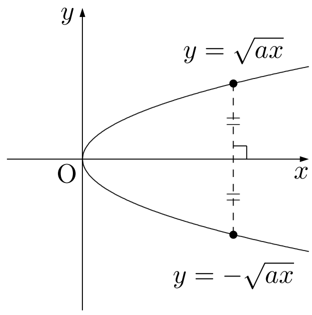
2　無理関数

根号の中に文字を含む式を**無理式**といい、x の無理式で表される関数を x の**無理関数**といいます。ここでは、根号の中が x の 1 次式である $y=\sqrt{ax+b}$ という形の無理関数について考えます。無理関数の定義域は、特に断りがない場合、根号の中が 0 以上となる実数 x 全体になります。

2.1　無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

関数 $x=\dfrac{y^2}{a}$ $(a>0)$ のグラフは、右の図のように、頂点が原点で、x 軸を軸とする放物線になります。$x=\dfrac{y^2}{a}$ を y について解くと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{a} \\ y^2 &= ax \\ y &= \pm\sqrt{ax} \end{aligned}$$



となり、この式の表すグラフも放物線 $x=\dfrac{y^2}{a}$ と同じになります。このことから、無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフは放物線 $x=\dfrac{y^2}{a}$ の $y \geqq 0$ の部分を、また、$y=-\sqrt{ax}$ のグラフは放物線 $x=\dfrac{y^2}{a}$ の $y \leqq 0$ の部分を表します。（無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフと $y=-\sqrt{ax}$ のグラフは、x 軸に関して対称）

【例題 2 − 1】

次の無理関数のグラフをかきなさい。

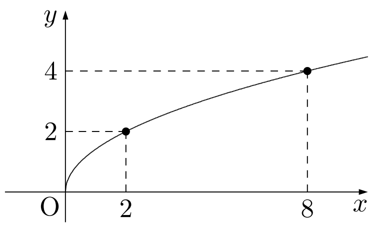
(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=\sqrt{-2x}$　　(3) $y=-\sqrt{2x}$　　(4) $y=-\sqrt{-2x}$

＜解説＞

グラフをかくときの基本は、x と y の対応表を作成し、対応する点をなめらかに結びます。

(1) 定義域が $x \geqq 0$ であることに注意して x と y の対応表を作ると、次のようになります。

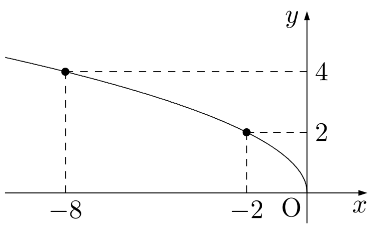
x	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
y	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$



このことから、グラフは右の図のようになります。

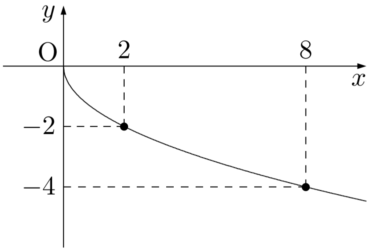
(2) 定義域が $x \leqq 0$ であることに注意して x と y の対応表を作ると、次のようになります。

x	$\cdots$	-8	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0
y	$\cdots$	4	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{2}$	0



このことから、グラフは右の図のようになります。（(1) のグラフと y 軸に関して対称）

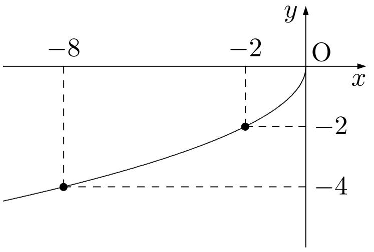
(3) 定義域が $x \geqq 0$ であることに注意して x と y の対応表を作ると、次のようになります。



x	0	1	2	3	$\cdots$	8	$\cdots$
y	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	-4	$\cdots$

このことから、グラフは右の図のようになります。((1) のグラフと x 軸に関して対称)

(4) 定義域が $x \leqq 0$ であることに注意して x と y の対応表を作ると、次のようになります。



x	$\cdots$	-8	$\cdots$	-3	-2	-1	0
y	$\cdots$	-4	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	-2	$-\sqrt{2}$	0

このことから、グラフは右の図のようになります。((1) のグラフと原点に関して対称)

2.2 無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフ

無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$ は、$y=\sqrt{ax}$ の x を、

$$x \longrightarrow x-p$$

と置き換えたものになっているので、そのグラフは、$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものになります。このことから、$y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフには次のような特徴があります。

① 点 $(p,\ 0)$ を通る
② 定義域は、$a>0$ のとき $x \geqq p$、$a<0$ のとき $x \leqq p$

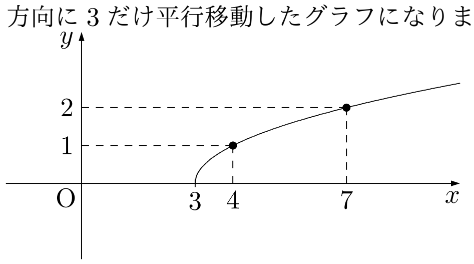
【例題 2 − 2】

次の関数のグラフをかきなさい。
(1) $y=\sqrt{x-3}$　　(2) $y=\sqrt{2(x+3)}$

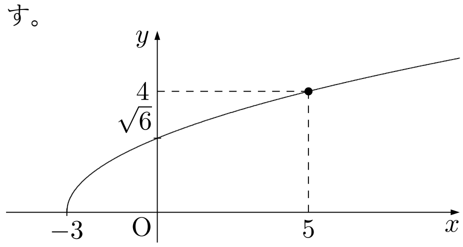
＜解説＞

$y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフは、点 $(p,\ 0)$ を原点だとみなし、$y=\sqrt{ax}$ のグラフをかきます。

(1) $y=\sqrt{x-3}$ のグラフは、$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したグラフになります。



(2) $y=\sqrt{2(x+3)}$ のグラフは、$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフになります。



【演習 2 − 2】

次の関数のグラフをかきなさい。
(1) $y=\sqrt{-2(x-2)}$　　(2) $y=-\sqrt{2(x+1)}$

2.3　無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフ

無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a \fallingdotseq 0)$ は、根号内の x の係数 a でくくり、$y-c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ と変形でき、これは $y=\sqrt{ax}$ の x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x+\frac{b}{a}, \qquad y \longrightarrow y-c$$

と置き換えたものになります。このことから、$y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフは、$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$、y 軸方向に c だけ平行移動したものになります。

【例題 2 − 3】

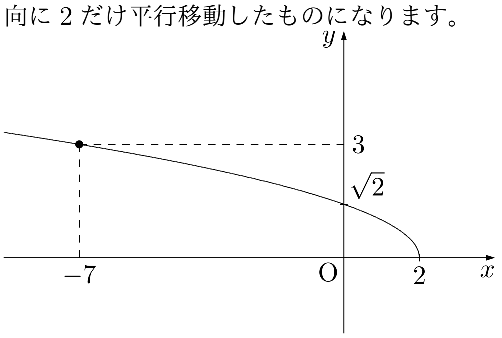
次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{2-x}$　　(2) $y=\sqrt{2x+4}+1$

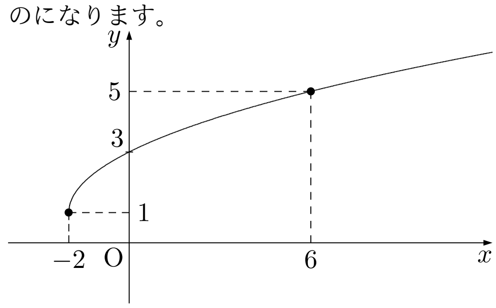
＜解説＞

無理関数 $y=\sqrt{ax+b}+c$ のグラフは、点 $\left(-\dfrac{b}{a},\ c\right)$ を原点だとみなし、$y=\sqrt{ax}$ のグラフをかきます。

(1) $y=\sqrt{2-x}$ は、$y=\sqrt{-(x-2)}$ と変形できるので、このグラフは、$y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものになります。



(2) $y=\sqrt{2x+4}+1$ は、$y=\sqrt{2(x+2)}+1$ と変形できるので、このグラフは、$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に -2、y 軸方向に 1 だけ平行移動したものになります。

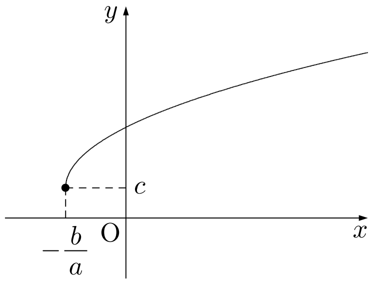


【演習 2 − 3】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=\sqrt{3x+6}$　　(2) $y=\sqrt{4-2x}+1$

2.4 無理関数の値域



無理関数の定義域は、特に断りがない場合、根号の中が 0 以上となる実数 x 全体になります。そのため、関数 $y = \sqrt{ax+b}+c$ の定義域は、$a > 0$ のとき $x \geqq -\frac{b}{a}$ となり、$a < 0$ のとき $x \leqq -\frac{b}{a}$ となります。また、$\sqrt{A}$ は A の平方根のうち正のものを表すので、$A \geqq 0$ のとき $\sqrt{A} \geqq 0$ となることから、

$$\sqrt{ax+b} \geqq 0$$
$$\sqrt{ax+b}+c \geqq c$$

より、その値域は $y \geqq c$ となります。

関数の値域（定義域）を求める問題では、グラフを利用して考えることが基本になります。そのことは無理関数においても例外ではありません。また、定義域に制限のある関数の値域を求める場合には、端点が重要になるので、その値を求めておくと、値域を求めたりグラフをかいたりするのに役立ちます。

【例題 2 − 4】

次の関数の値域を求めなさい。

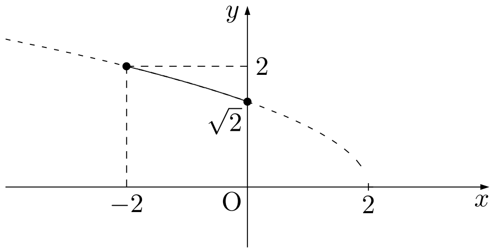
(1) $y = \sqrt{2-x} \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$ (2) $y = \sqrt{2x+4}+1 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

<解説>

定義域に制限のある関数のグラフをかくとき、まずはグラフ全体を点線でかき、その後で、定義域に対応した部分の点線をなぞるようにして実線にします。

(1) $y = \sqrt{2-x} \ (-2 \leqq x \leqq 0)$ のグラフは、

$$x = -2 \text{ のとき}: y = \sqrt{2-(-2)} = 2$$
$$x = 0 \text{ のとき}: y = \sqrt{2-0} = \sqrt{2}$$

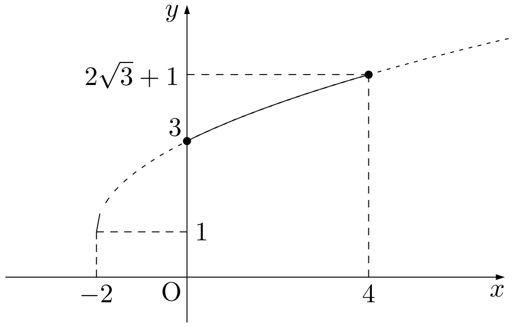


となるので、右図の実線部分になります。このことから、求める値域は、

$$\sqrt{2} \leqq y \leqq 2$$

(2) $y = \sqrt{2x+4}+1 \ (0 \leqq x \leqq 4)$ のグラフは、

$$x = 0 \text{ のとき}: y = \sqrt{2\cdot 0+4}+1 = 3$$
$$x = 4 \text{ のとき}: y = \sqrt{2\cdot 4+4}+1 = 2\sqrt{3}+1$$



となるので、右図の実線部分になります。このことから、求める値域は、

$$3 \leqq y \leqq 2\sqrt{3}+1$$

【演習 2 − 4】

次の関数の値域を求めなさい。

(1) $y = \sqrt{3x+6} \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$

(2) $y = \sqrt{4-2x}+1 \quad (-4 \leqq x \leqq 0)$

2.5 無理関数のグラフと方程式

2 つの関数のグラフの共有点の座標は、y（または x）を消去して得られる方程式を解くことにより求めることができます。

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \longrightarrow f(x) = g(x)$$

【例題 2 − 5】

次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めなさい。

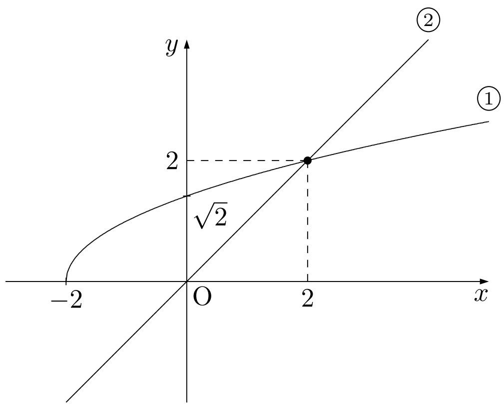
(1) $y = \sqrt{x+2},\ \ y = x$　　(2) $y = \sqrt{3-x},\ \ y = x-1$

＜解説＞

(1) それぞれの関数を、

$$y = \sqrt{x+2}\ \cdots\cdots\ ①,\qquad y = x\ \cdots\cdots\ ②$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、両辺を 2 乗して整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= x \\ x+2 &= x^2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2,\ -1 \end{aligned}$$

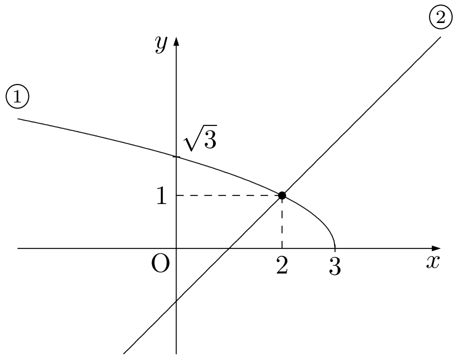
グラフより $x = -1$ は不適当であるので、求める座標は、

$(2,\ 2)$

(2) それぞれの関数を、

$$y = \sqrt{3-x}\ \cdots\cdots\ ①,\qquad y = x-1\ \cdots\cdots\ ②$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、両辺を 2 乗して整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &= x-1 \\ 3-x &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2,\ -1 \end{aligned}$$

グラフより $x = -1$ は不適当であるので、求める座標は、

$(2,\ 1)$

【演習 2 − 5】

次の 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めなさい。

(1) $y = \sqrt{x-2},\ \ y = 8 - x$ (2) $y = \sqrt{4-2x},\ \ y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

2.6 無理方程式

無理式を含む方程式を**無理方程式**といいます。
無理方程式を解くとき、

$$\sqrt{A} = B \ \cdots\cdots \ ①$$

のような無理方程式では、根号をなくすために両辺 2 乗して、

$$A = B^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

とします。このとき、① $\Longrightarrow$ ② は成り立ちますが、② $\Longrightarrow$ ① は、

$$\pm\sqrt{A} = B$$

となり、成り立つとは限りません。そのため、②を解いて得られた解が①の解でもあるとは限らないことになります。

そこで、無理方程式の両辺に対応する関数（$y = \sqrt{A}$ と $y = B$）のグラフを考え、その共有点の x 座標を求めると考えれば、適切な解をグラフで確認することができます。

また、$B \geqq 0$ という条件があれば ② $\Longrightarrow$ ① を成り立つので、次の同値関係を利用して無理不等式を解くこともできます。

$$\sqrt{A} = B \Longleftrightarrow B \geqq 0, \quad A = B^2$$

このとき、根号の中は 0 以上になるため、$A \geqq 0$ という条件も必要になりますが、「$B \geqq 0$ かつ $A = B^2$」であれば、

$$A = B^2 \geqq 0$$

となり $A \geqq 0$ も成り立つため、この条件は特に必要ありません。

【例題 2 − 6】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\sqrt{x+2} = x$　　(2) $\sqrt{3-x} = x - 1$

＜解説＞

(1) 無理方程式 $\sqrt{x+2} = x$ の解は、

$$x \geqq 0 \ \cdots\cdots \ ①, \qquad x + 2 = x^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

を同時に満たす x の値になります。②より、

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2, \ -1 \end{aligned}$$

となるので、①を満たすのは、

$$x = 2$$

(2) 無理方程式 $\sqrt{3-x}=x-1$ の解は、

$$x-1 \geqq 0 \ \cdots\cdots \ ①, \qquad 3-x=(x-1)^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

を同時に満たす x の値になります。②より、

$$\begin{aligned} x^2-2x+1&=3-x \\ x^2-x-2&=0 \\ (x-2)(x+1)&=0 \\ x&=2,\ -1 \end{aligned}$$

となるので、①の $x \geqq 1$ を満たすのは、

$$x=2$$

【演習 2 − 6】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\sqrt{x-2}+x-8=0$

(2) $\sqrt{4-2x}+\dfrac{1}{2}x=1$

2.7 無理方程式の実数解の個数

2 つの関数のグラフの共有点の x 座標は、y を消去して得られる x の方程式を解くことにより求めることができます。

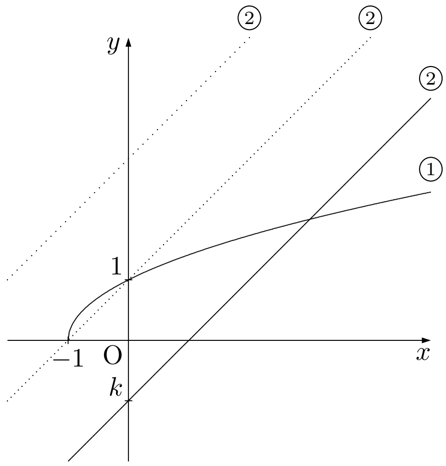
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \longrightarrow f(x) = g(x)$$

このとき、方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解の個数は、2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数と一致するので、無理方程式の実数解の個数も、無理関数と別の関数との共有点の個数から判断することができます。

【例題 2 − 7】

k を定数とするとき、x についての方程式 $\sqrt{x+1} = x + k$ の異なる実数解の個数を求めなさい。

＜解説＞



方程式の両辺に対応する関数をそれぞれ、

$$y = \sqrt{x+1} \ \cdots\cdots \ ①, \qquad y = x + k \ \cdots\cdots \ ②$$

とすると、与えられた方程式の異なる実数解の個数は、①と②のグラフの共有点の個数に一致します。

②のグラフは、傾き 1、切片 k の直線になるので、k の値に応じて平行移動し、①と②の共有点の個数も変化することになります。

方程式 $\sqrt{x+1} = x + k$ の両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x+k)^2 \\ x^2 + 2kx + k^2 &= x + 1 \\ x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

この判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (2k-1)^2 - 4(k^2-1) \\ &= 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 = -4k + 5 \end{aligned}$$

$D = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} -4k + 5 &= 0 \\ k &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となり、このとき、①と②のグラフは接することになります。

また、直線②が点 $(-1,\ 0)$ を通るとき、$0 = -1 + k$ より、

$$k = 1$$

となります。以上のことから、求める実数解の個数はグラフより、

- $1 \leqq k < \dfrac{5}{4}$ のとき：2 個
- $k < 1,\ k = \dfrac{5}{4}$ のとき：1 個
- $k > \dfrac{5}{4}$ のとき：0 個

【演習 2 − 7】

k を定数とするとき、x についての方程式 $\sqrt{2x-1} = x + k$ の異なる実数解の個数を求めなさい。

2.8 無理関数のグラフと不等式

無理式を含む不等式を**無理不等式**といいます。

$f(x) > g(x)$ ($f(x)$ または $g(x)$ が無理式) のような無理不等式では、不等式の両辺に対応する関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの上下関係から、不等式の解を求めることができます。

【例題 2 − 8】

グラフを利用して次の不等式を解きなさい。

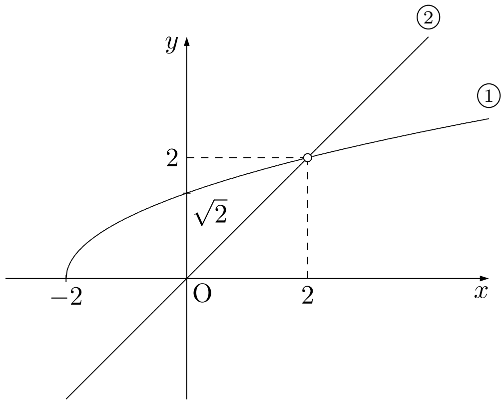
(1) $\sqrt{x+2} > x$　　(2) $\sqrt{3-x} < x-1$

<解説>

(1) 不等式の両辺に対応する関数をそれぞれ、

$$y = \sqrt{x+2} \ \cdots\cdots \ ①, \qquad y = x \ \cdots\cdots \ ②$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、両辺を 2 乗して整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= x \\ x+2 &= x^2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2,\ -1 \end{aligned}$$

グラフより $x = -1$ は不適当であるので、共有点の x 座標は $x = 2$ となります。

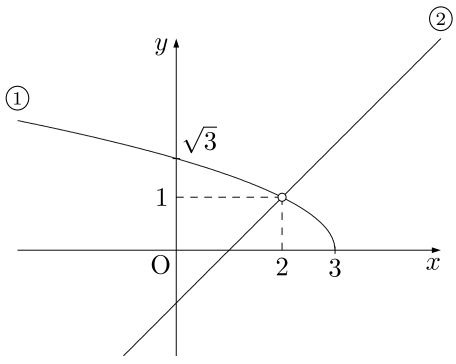
求める不等式の解は、①のグラフが②のグラフより上側にある x の値の範囲であるので、図から、

$$-2 \leqq x < 2$$

(2) 不等式の両辺に対応する関数をそれぞれ、

$$y = \sqrt{3-x} \ \cdots\cdots \ ①, \qquad y = x-1 \ \cdots\cdots \ ②$$

とすると、そのグラフは右図のようになります。①, ②より y を消去し、両辺を 2 乗して整理した方程式を解くと、



$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &= x-1 \\ 3-x &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2,\ -1 \end{aligned}$$

グラフより $x = -1$ は不適当であるので、共有点の x 座標は $x = 2$ となります。

求める不等式の解は、①のグラフが②のグラフより下側にある x の値の範囲であるので、図から、

$$2 < x \leqq 3$$

【演習 2 − 8】

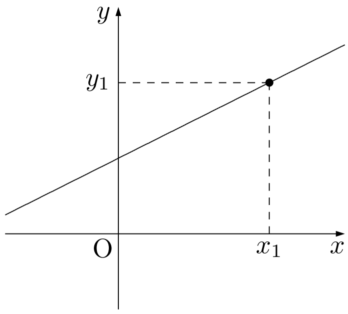
グラフを利用して次の不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{x-2}+x \leqq 8$

(2) $\sqrt{4-2x} \geqq -\dfrac{1}{2}x+1$

3　逆関数

3.1　逆関数



y が x の関数であるとき、x の値を決めると y の値がただ 1 つに決まります。

（例）$x = x_1$のとき $\longrightarrow y = y_1$

また、関数 $y = f(x)$ が増加関数（または減少関数）であるときは、y の値を決めるとそれに応じて x の値もただ 1 つに決まるため、x は y の関数であるということができます。

（例）$y = y_1$のとき $\longrightarrow x = x_1$

この関数が $x = g(y)$ のように表されるとき、この x と y を入れかえた関数 $g(x)$ を、もとの関数 $f(x)$ の**逆関数**といい、$f^{-1}(x)$（「f インバース x」と読みます）と表します。

このことから、逆関数は次のような手順で求めることができます。

(ｉ) 関数 $y = f(x)$ を x について解き、$x = g(y)$ という形に変形する。
(ii) x と y を入れかえ、$y = g(x)$ という形にする。

【例題 3 − 1】

次の逆関数を求めなさい。

(1) $y = 2x + 1$　　(2) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$　　(3) $y = 4^{x+1}$

＜解説＞

(1) x について解くと、

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 2x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

となるので、求める逆関数は x と y を入れかえて、

$$y = \frac{x-1}{2}$$

(2) x について解くと、

$$\begin{aligned} (x+1)y &= 2x - 1 \\ xy + y &= 2x - 1 \\ (y-2)x &= -y - 1 \\ x &= -\frac{y+1}{y-2} \end{aligned}$$

となるので、求める逆関数は x と y を入れかえて、

$$y = -\frac{x+1}{x-2}$$

(3) x について解くと、

$$\begin{aligned} x+1 &= \log_4 y \\ x &= \log_4 y - 1 \end{aligned}$$

となるので、求める逆関数は x と y を入れかえて、

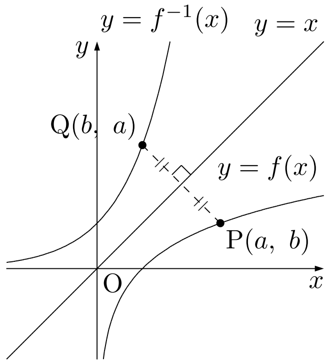
$$y = \log_4 x - 1$$

【演習 3 − 1】

次の逆関数を求めなさい。

(1) $y = 3x - 2$　(2) $y = \log_2(x+1)$　(3) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

3.2 逆関数のグラフ



右の図のように、関数 $y = f(x)$ のグラフ上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があるとき、$b = f(a)$ が成り立ちます。また、逆関数は、もとの関数の x と y を入れかえることにより得られる関数なので、$a = f^{-1}(b)$ という関係が成り立ちます。このことから、点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点であることがわかります。

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と点 $\mathrm{Q}(b,\ a)$ は、x 座標と y 座標を入れかえた関係になっているので、直線 $y = x$ に関して対称になります。そのため、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフともとの関数 $y = f(x)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称になります。

【例題 3 − 2】

次の関数の逆関数を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y = 4x + 3$　　(2) $y = 2^x$

<解説>

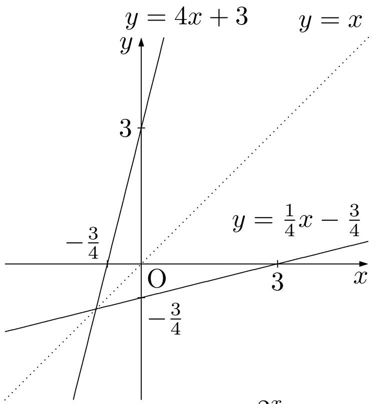
(1) x について解くと、

$$4x + 3 = y$$
$$4x = y - 3$$
$$x = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}$$

となるので、求める逆関数は x と y を入れかえて、

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

また、このグラフは右図の直線になります。



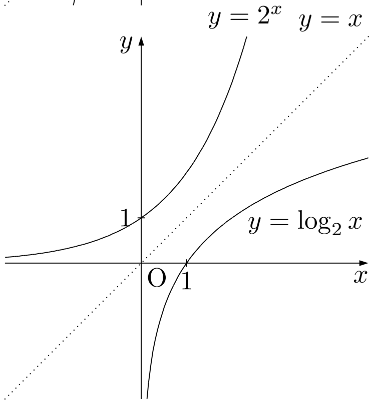
(2) x について解くと、

$$x = \log_2 y$$

となるので、求める逆関数は x と y を入れかえて、

$$y = \log_2 x$$

また、このグラフは右図の曲線になります。



【演習 3 − 2】

次の関数の逆関数を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$　　(2) $y = \log_4 x - 1$

3.3 逆関数の定義域・値域

逆関数は、もとの関数の x と y を入れかえることにより得られる関数なので、逆関数ともとの関数では、定義域（x の変域）と値域（y の変域）が入れかわります。つまり、$f(x)$ の定義域と $f^{-1}(x)$ の値域、$f(x)$ の値域と $f^{-1}(x)$ の定義域がそれぞれ一致します。

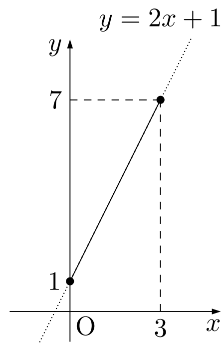
【例題 3 − 3】

次の関数の逆関数を求めなさい。また、その関数の定義域を求めなさい。

(1) $y = 2x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = \sqrt{x-1}$

(3) $y = x^2 - 2x \quad (x \geqq 1)$　　(4) $y = \dfrac{2x+1}{x-1} \quad (x \leqq 0)$

<解説>



(1) 関数 $y = 2x + 1 \ (0 \leqq x \leqq 3)$ は、

$$x = 0 \text{ のとき：} y = 2 \cdot 0 + 1 = 1, \qquad x = 3 \text{ のとき：} y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

その値域は右図より、

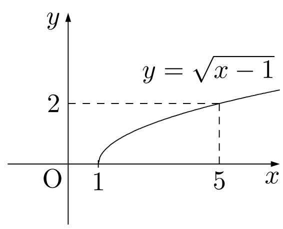
$$1 \leqq y \leqq 7$$

となり、この y を x に置き換えたものが、逆関数の定義域になります。また、$y = 2x + 1$ を x について解くと、

$$x = \frac{y-1}{2}$$

となるので、x と y を入れかえれば、求める逆関数は次のようになります。

$$y = \frac{x-1}{2} \quad (1 \leqq x \leqq 7)$$



(2) 関数 $y = \sqrt{x-1}$ の値域は、

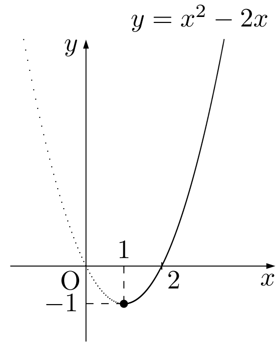
$$y \geqq 0$$

となり、この y を x に置き換えたものが、逆関数の定義域になります。また、$y = \sqrt{x-1}$ を x について解くと、

$$x = y^2 + 1$$

となるので、x と y を入れかえれば、求める逆関数は次のようになります。

$$y = x^2 + 1 \quad (x \geqq 0)$$



(3) 関数 $y = x^2 - 2x$ $(x \geqq 1)$ は、

$$y = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geqq 1)$$

と変形でき、

$x = 1$ のとき：$y = (1-1)^2 - 1 = -1$

となるので、その値域は右図より、

$$y \geqq -1$$

この y を x に置き換えたものが、逆関数の定義域になります。また、$y = x^2 - 2x$ を x について解くと、

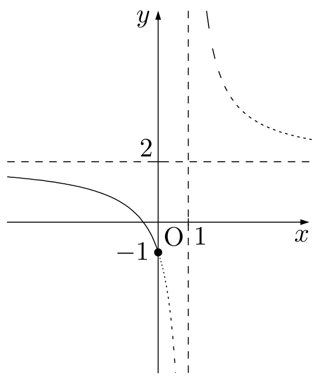
$$(x-1)^2 = y + 1$$

$x \geqq 1$ より　$x - 1 = \sqrt{y+1}$

$$x = \sqrt{y+1} + 1$$

となるので、x と y を入れかえれば、求める逆関数は次のようになります。

$$y = \sqrt{x+1} + 1 \quad (x \geqq -1)$$



$y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(4) 関数 $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ $(x \leqq 0)$ は、

$$y = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$$

と変形でき、

$x = 0$ のとき：$y = \dfrac{3}{0-1} + 2 = -1$

となるので、その値域は右図より、

$$-1 \leqq y < 2 \ \cdots\cdots \text{①}$$

この y を x に置き換えたものが、逆関数の定義域になります。また、$y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ を x について解くと、

$$xy - y = 2x + 1$$

$$(y-2)x = y + 1$$

①より $y \fallingdotseq 2$ であるので　$x = \dfrac{y+1}{y-2}$

となるので、x と y を入れかえれば、求める逆関数は次のようになります。

$$y = \frac{x+1}{x-2} \quad (-1 \leqq x < 2)$$

【演習 3 − 3】

次の関数の逆関数を求めなさい。また、その関数の定義域を求めなさい。

(1) $y = 3x - 2$ $(0 \leqq x \leqq 4)$

(2) $y = \sqrt{3x+5}$

(3) $y = x^2 + 2x + 2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

(4) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ $(x \geqq 0)$

3.4 逆関数の性質

逆関数は、もとの関数の x と y を入れかえることにより得られる関数なので、次の関係が成り立ちます。

$$b = f(a) \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

このことを利用して、ある関数の条件をその逆関数の条件に、また、逆関数の条件をもとの関数の条件に変更することができます。

【例題 3 − 4】

関数 $f(x) = \dfrac{ax+1}{2x+b}$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、$f(2) = 9,\ f^{-1}(1) = -2$ のとき、定数 a, b の値を求めなさい。

＜解説＞

逆関数についての条件が与えられているので、関数 $f(x)$ の逆関数を求めてもいいのですが、分数関数で、さらに文字も含まれているため、逆関数を求めるのが面倒です。そこで、逆関数の条件 $f^{-1}(1) = -2$ を、逆関数の性質を利用して、$f(-2) = 1$ のようにもとの関数の条件に変更してしまいます。

このことから、

(i) $f(2) = 9$ より、

$$\begin{aligned} f(2) = \frac{2a+1}{2\cdot 2+b} &= 9 \\ 2a+1 &= 9b+36 \\ 2a-9b &= 35 \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

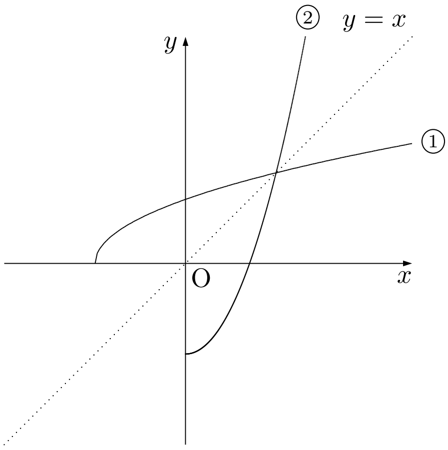
(ii) $f(-2) = 1$ より、

$$\begin{aligned} f(-2) = \frac{-2a+1}{2\cdot(-2)+b} &= 1 \\ -2a+1 &= b-4 \\ 2a+b &= 5 \ \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

①, ②より、

$$a = 4, \quad b = -3$$

3.5 逆関数の性質の利用



右の図のように、関数 $y = f(x)$ のグラフ（①）とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ（②）が共有点をもつとき、その共有点の x 座標は、2 つの式から y を消去して得られる方程式

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

を解くことで求めることができますが、逆関数を求めることも手間ですし、また、この方程式を解くことも難しい場合があります。

$y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称であるので、この 2 つのグラフの共有点を直線 $y = x$ が通ります。（ある曲線とそれを鏡に映した曲線は線対称な関係です。この 2 つの曲線は鏡（対称軸）にぶつかるようにかかない限り交わることはありません。つまり、その交点は対称軸上に存在することになります。）このことから、共有点の x 座標は、$y = f(x)$（または、$y = f^{-1}(x)$）と $y = x$ との共有点の x 座標を求めればよいので、

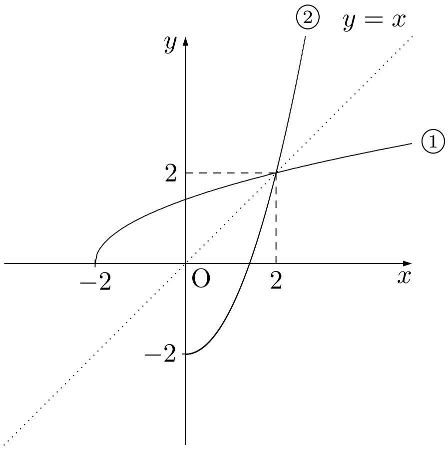
$$f(x) = x$$

という方程式を解けばよいことになります。

【例題 3 − 5】

関数 $f(x) = \sqrt{x+2}$ について、
(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフと、その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフをかきなさい。
(2) 方程式 $f(x) = f^{-1}(x)$ を解きなさい。

<解説>



(1) 根号の中は 0 以上なので、$y = \sqrt{x+2}\quad (x \geqq -2)$ …… ① とすると、この関数の値域は、

$$y \geqq 0$$

となります。また、①を x について解くと、

$$x + 2 = y^2$$
$$x = y^2 - 2$$

x と y を入れかえると、逆関数は、

$$y = x^2 - 2 \quad (x \geqq 0) \ \cdots\cdots \ ②$$

よって、①, ②のグラフは右図のようになります。

(2) ①, ②のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称なので、①, ②の共有点の x 座標は、①のグラフと直線 $y = x$、または、②のグラフと直線 $y = x$ のグラフとの共有点の x 座標と等しくなります。そのため、

$f(x)=f^{-1}(x)$ の解は、$f(x)=x,\ f^{-1}(x)=x$ の解と一致するので、

$$\begin{aligned} x^2-2&=x \\ x^2-x-2&=0 \\ (x-2)(x+1)&=0 \\ x \geqq 0 \text{ より}\quad x&=2 \end{aligned}$$

【演習 3 − 5】

$f(x)=x^2-2x\ (x \geqq 1)$ とするとき、不等式 $f^{-1}(x) \geqq f(x)$ を満たす x の範囲を求めなさい。

3.6 関数の相等

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が一致するには、次の条件が成り立つときです。

(i) 2 つの関数の定義域は一致する

(ii) 定義域のすべての x に対し、$f(x)=g(x)$ (x の恒等式)

【例題 3 − 6】

関数 $y=\dfrac{ax-1}{x+1}$ について、次の問いに答えなさい。

(1) 逆関数をもつための条件を求めなさい。

(2) 逆関数が $y=\dfrac{2x+c}{bx+1}$ となるとき、定数 a, b, c の値を求めなさい。

＜解説＞

(1) $y=\dfrac{ax-1}{x+1}$ $\cdots\cdots$ ① とすると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{a(x+1)-a-1}{x+1} \\ &= -\frac{a+1}{x+1}+a \quad \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

と変形できます。$a+1=0$ とすると、関数①は $y=a$ となり逆関数をもちません。このことから、逆関数をもつための条件は、

$$a+1 \fallingdotseq 0$$

(2) 関数①の値域は、②より、

$$y \fallingdotseq a$$

①を x について解くと、

$$\begin{aligned} (x+1)y &= ax-1 \\ xy+y &= ax-1 \\ (y-a)x &= -y-1 \end{aligned}$$

$y \fallingdotseq a$ より　$x=\dfrac{-y-1}{y-a}$

この x と y を入れかえると、①の逆関数は、

$$y=\frac{-x-1}{x-a}$$

この関数と $y=\dfrac{2x+c}{bx+1}$ が一致するとき、

$$\frac{-x-1}{x-a}=\frac{2x+c}{bx+1} \longrightarrow \text{左辺の分子・分母に} \ (-2) \ \text{をかける} \longrightarrow \frac{2x+2}{-2x+2a}=\frac{2x+c}{bx+1}$$

が x について恒等式になるので、

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=-2, \quad c=2$$

4 合成関数

4.1 合成関数

y が t の関数で $y=g(t)$ と表され、t が x の関数で $t=f(x)$ と表されるとき、y は x の関数となり、

$$y=g(f(x))$$

と表され、この関数を f と g の**合成関数**といいます。また、$g(f(x))$ は $(g\circ f)(x)$ と表すこともあります。

一般に、$(f\circ g)(x)\fallingdotseq(g\circ f)(x)$ となり交換法則は成り立たないため、合成の順序に気をつける必要があります。（f, g, x はどちらの合成関数の表し方でも同じ順）

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\qquad (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

ただし、結合法則は常に成り立ちます。

$$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$$

【例題 4 − 1】

$f(x)=2x+3,\ g(x)=-x^2+1$ のとき、次の合成関数を求めなさい。

(1) $(f\circ g)(x)$ (2) $(g\circ f)(x)$ (3) $(f\circ f)(x)$ (4) $(g\circ g)(x)$

＜解説＞

(1)
$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=2(-x^2+1)+3\\&=-2x^2+2+3\\&=-2x^2+5\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=-(2x+3)^2+1\\&=-(4x^2+12x+9)+1\\&=-4x^2-12x-8\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=2(2x+3)+3\\&=4x+6+3\\&=4x+9\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(g\circ g)(x)&=g(g(x))\\&=-(-x^2+1)^2+1\\&=-(x^4-2x^2+1)+1\\&=-x^4+2x^2\end{aligned}$$

【演習 4 − 1】

$f(x)=1-2x,\ g(x)=\dfrac{1}{1-x},\ h(x)=x(1-x)$ のとき、次の合成関数を求めなさい。

(1) $(f\circ g)(x)$ (2) $(g\circ h)(x)$ (3) $((g\circ f)\circ h)(x)$ (4) $(g\circ(f\circ h))(x)$

4.2 合成関数と関数の決定

関数 $y = 2x + 3$ について逆関数を求めてみると、

$$y = 2x + 3 \ \cdots\cdots \ ① \qquad (f(x) = 2x + 3)$$

x について解く
$$x = \frac{y-3}{2} \ \cdots\cdots \ ②$$

x と y をいれかえる
$$y = \frac{x-3}{2} \qquad \left(f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}\right)$$

このとき、②を①の右辺に代入し、x と y を入れかえると、

$$2 \cdot \frac{y-3}{2} + 3 = y \longrightarrow x$$

となり、この計算は $f(f^{-1}(x))$ と同じことを表します。

一般に、関数 $f(x)$ に逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとき、

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

という関係が成り立ちます。

【例題 4 − 2】

$f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 6x - 2$ のとき、$h(f(x)) = g(x)$ を満たす関数 $h(x)$ を求めなさい。

<解説>

$y = 3x + 1$ とし、x について解き x と y を入れかえると、

$$x = \frac{y-1}{3} \longrightarrow y = \frac{x-1}{3} \quad (= f^{-1}(x))$$

となるので、関数 $f(x)$ には逆関数が存在します。このことから、

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= g(x) \\ h(f(f^{-1}(x))) &= g(f^{-1}(x)) \\ h(x) &= 6 \cdot \frac{x-1}{3} - 2 = 2x - 4 \end{aligned}$$

【演習 4 − 2】

$f(x) = \dfrac{x}{1+x},\ g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) $g(f(x))$ を求めなさい。

(2) $h(g(x)) = f(x)$ を満たす関数 $h(x)$ を求めなさい。