【数学 II】三角関数

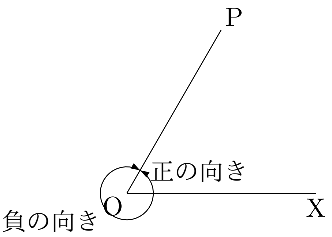
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

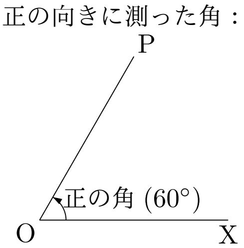
1　角の拡張

1.1　一般角

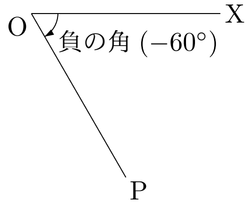


平面上で、固定した点 O から出た、基準となる半直線 OX のことを**始線**といい、通常、点 O から右向きにかきます。また、点 O を中心に回転する半直線 OP を**動径**といい、反時計回り（左回り）の回転を**正の向きの回転**、時計回り（右回り）の回転を**負の向きの回転**といいます。そして、始線 OX から、正の向きに測った角を**正の角**、負の向きに測った角を**負の角**といいます。

① 正の向きに測った角：正の角



② 負の向きに測った角：負の角



このようにして、動径 OP の回転角を定めると、その回転の向きと大きさには制限がありません。このような範囲の制限がない角を**一般角**といい、一般角 θ を定めると、動径は始線から角 θ だけ回転した位置に定まります。この動径を **θ の動径**といいます。

しかし、これとは逆に、動径の位置を定めると、その表す角は無数に存在し 1 通りには定まりません。そのため、動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると、動径 OP の表す一般角 θ は、

$$\theta = \alpha + 360^\circ \quad \times n \quad (n \text{ は整数})$$

となります。

【例題 1 − 1】

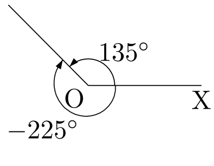
次の角の動径を図示しなさい。

(1) -225°　　(2) 390°

＜解説＞

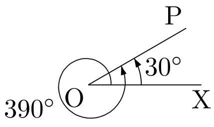
(1) 始線 OX から時計回り（右回り）に 225° だけ回転した位置に動径 OP を図示します。また、このとき、

$$-225^\circ = 135^\circ - 360^\circ$$



となるので、始線 OX から反時計回り（左回り）に 135° だけ回転した位置に動径があることになります。

(2) 始線 OX から反時計回り（左回り）に 390° だけ回転した位置に動径 OP を図示しますが、

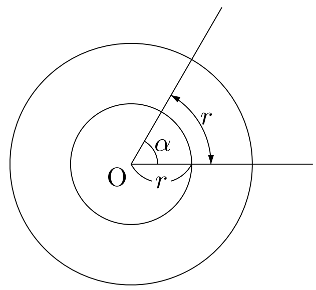


$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$$

となるので、始線 OX から反時計回り（左回り）に 30° だけ回転した位置に動径はあります。ただし、390° であることを示す必要があるので、1 周と 30° 分の角を表す螺旋を描きます。

1.2 弧度法

直角の $\dfrac{1}{90}$ である 1 度を単位とする角の表し方（通常の $30°$, $45°$ という単位に度を用いた角の表し方）を**度数法**といいますが、ここでは角の大きさを円弧の長さと関連づけた**弧度法**について考えます。



右の図のような半径 r の円において、長さが r の弧に対する中心角の大きさを 1 ラジアン（1 弧度）と定め、1 ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**といいます。

角の大きさを円弧の長さと対応させるのですが、角の大きさを変えなくても、円の半径の大きさが変わると、それに応じて円弧の長さは変わります。しかし、角の大きさは円の半径にはよらないので、半径 1 の円（これを**単位円**といいます）における角の大きさと円弧の長さを対応させることを考えます。（今後、弧度法を用いるときは、単位円を利用します。）すると、

$$360° = 2\pi \ (\mathrm{rad}), \qquad 180° = \pi \ (\mathrm{rad})$$

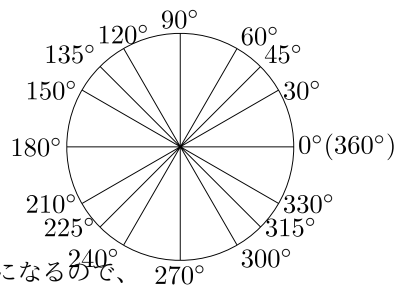
のようにして表すことができます。しかし、通常は単位となるラジアンは省略されます。

【例題 1 − 2】

次の表を完成させなさい。

度数法	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
弧度法									
度数法	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	
弧度法									

＜解説＞



右の図のような単位円（半径 1 の円）を利用して、角の大きさを弧の長さに対応させます。このとき、$360°$ の角の大きさに対応する単位円の弧の長さは、単位円の周の長さになるので、

$$360° = 2\pi$$

となり、この大きさを基準にして考えていきます。

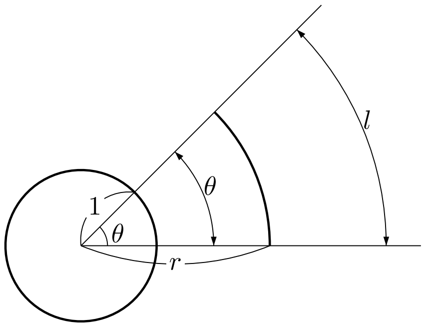
$30°$, $45°$, $60°$ は、それぞれ円を $\dfrac{1}{12}\left(=\dfrac{30°}{360°}\right)$, $\dfrac{1}{8}\left(=\dfrac{45°}{360°}\right)$ したものになるので、

- $30° : 2\pi \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi}{6}$
- $45° : 2\pi \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

となります。残りの角は、この倍数の関係になるので、次のように表を完成させることができます。

度数法	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
度数法	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	
弧度法	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	

1.3　扇形の弧の長さと面積



弧度法を用いると、半径 r、中心角 θ (rad) の扇形の弧の長さ l は、

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$$

と表されます。弧度法では、角の大きさを、半径 1 の円の弧の長さで表したものであるので、半径 r、中心角 θ の扇形の弧の長さは、相似の関係から、

$$\begin{aligned} 1 : \theta &= r : l \\ l &= r\theta \end{aligned}$$

になると考えることができます。

また、このときの扇形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} r^2 \theta \quad \left(= \frac{1}{2} r \cdot r\theta\right) \\ &= \frac{1}{2} rl \end{aligned}$$

のように表すことができ、これらを公式として利用します。

【例題 1 − 3】

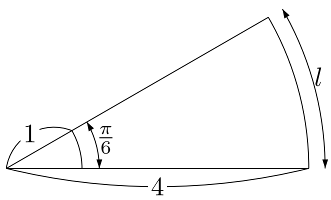
半径 4 cm、中心角 $\frac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

＜解説＞

公式を利用して、

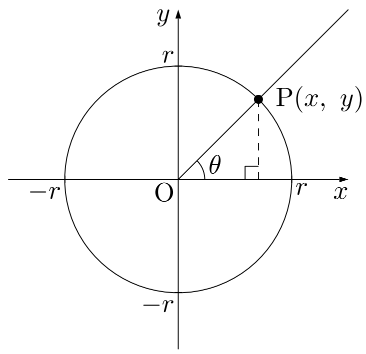
$$l = \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2}{3}\pi \text{ (cm)}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi \times 4 = \frac{4}{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



2　三角関数

2.1　三角関数の値



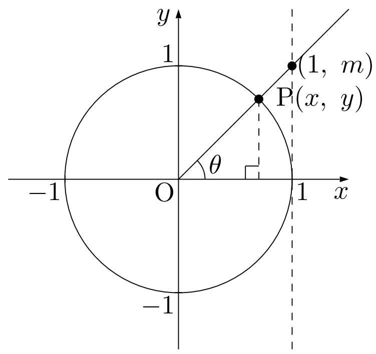
xy 平面上で原点 O を基準点とし、x 軸の正の部分を始線として一般角 θ の動径をかき、単位円との交点を P$(x,\ y)$ とします。このとき、三角比の定義と同様にして、θ が一般角であっても、

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定義します。これらは、θ の関数（θ の値を決めればそれぞれの値がただ 1 つに決まる）となるので、3 つまとめて θ の**三角関数**といい、それぞれ、

- $\sin\theta$: θ の正弦関数、または、サイン関数
- $\cos\theta$: θ の余弦関数、または、コサイン関数
- $\tan\theta$: θ の正接関数、または、タンジェント関数

といいます。



しかし、三角比の値を考えたときと同じように、三角関数においても半径が 1（$r=1$）となる円（単位円）で考えると、

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x$$

と表すことができます。また、三角関数では角の大きさを弧度法で考えるので、単位円との相性は抜群です。そのため、三角関数の値を考えるときも単位円を利用します。また、$\tan\theta$ については、分母の x を 1 にするために、右図のように動径と $x=1$ との交点を用いることで、

$$\tan\theta = m$$

と表すことができます。

このとき、単位円周上の x, y の値は

$$-1 \leqq x \leqq 1, \qquad -1 \leqq y \leqq 1$$

であるので、

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

となり、m の値は、直線 $x=1$ 上のすべての値をとることができるので、

$\tan\theta$: すべての実数

となります。

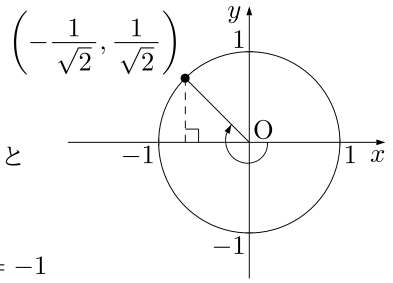
【例題 2 − 1】

次の θ について、$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値をそれぞれ求めなさい。

(1) $\theta = -\dfrac{5}{4}\pi$　　　(2) $\theta = \dfrac{13}{6}\pi$

＜解説＞

(1) 右の図のような単位円を利用します。このとき、



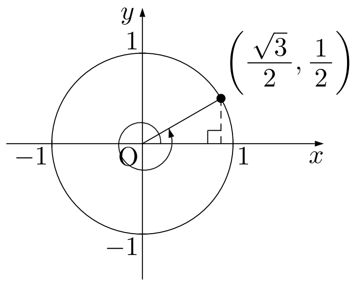
$$\theta = -\frac{5}{4}\pi = -1\frac{1}{4}\pi$$

となるので、動径は時計回り（右回り）に半周と半円の $\frac{1}{4}$ だけ進んだところにあります。そこで、動径と円周との交点を求めると、

$$\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -1$$

となることがわかります。

(2) 右の図のような単位円を利用します。このとき、



$$\theta = \frac{13}{6}\pi = 2\frac{1}{6}\pi$$

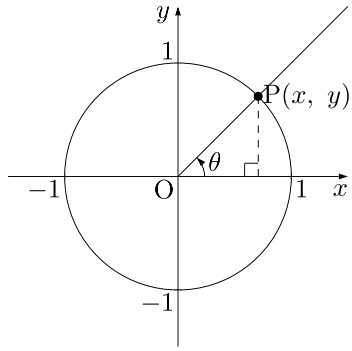
となるので、動径は反時計回り（左回り）に 1 周と半円の $\frac{1}{6}$ だけ進んだところにあります。そこで、動径と円周との交点を求めると、

$$\sin\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となることがわかります。

2.2 三角関数の相互関係

単位円を利用することで、三角関数は次のように定義することができました。



$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

このことから、

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

また、

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}^2 &= x^2 + y^2 \\ 1^2 &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ 1 + \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

となるので、三角関数においても三角比で成り立った相互関係が成り立ちます。

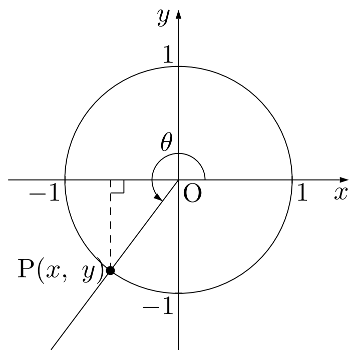
【例題 2 − 2】

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のうち、1 つが次のように与えられているとき、ほかの 2 つの値を求めなさい。ただし、[ ] 内は θ の動径が属する象限を示します。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ [第 3 象限]　　(2) $\tan\theta = -2$ [第 4 象限]

<解説>

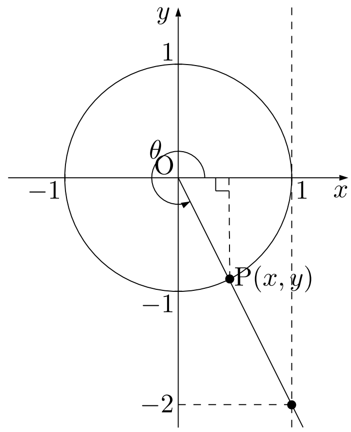
(1) 第 3 象限であるので、$\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$ となります。このことから、



$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\ &= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \sin\theta &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) 第 4 象限であるので、$\sin\theta < 0,\ \cos\theta > 0,\ \tan\theta < 0$ となります。このことから、



$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\theta} &= 1+\tan^2\theta \\ &= 1+(-2)^2 = 5 \\ \cos^2\theta &= \frac{1}{5} \\ \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \sin\theta &= \tan\theta\cos\theta \\ &= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.3 三角関数の対称式

x と y を入れかえてももとの式と同じになる式を x と y の**対称式**といいました。ここでは、三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ を用いた対称式について学習しますが、三角関数を用いた対称式においても、「対称式は、基本対称式のみで表すことができる」という性質は変わりません。また、三角関数には、

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

という隠れた条件式を利用できるので、必要に応じて利用します。

【例題 2 − 3】

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

＜解説＞

(1) $\sin\theta\cos\theta$ という形を作るために、$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ の両辺を 2 乗します。

$$\begin{aligned}
(\sin\theta+\cos\theta)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2\\
\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta &= \frac{9}{4}\\
1+2\sin\theta\cos\theta &= \frac{9}{4}\\
2\sin\theta\cos\theta &= \frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}\\
\sin\theta\cos\theta &= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ は、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式になっているので、基本対称式 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ のみで表すことができます。

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta+\cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}\\
&= \frac{27}{8}-\frac{45}{16}=\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

もしくは、因数分解することができるので、次のようにして求めることもできます。

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta+\cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\
&= \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

3　三角関数のグラフ

3.1　三角関数のグラフ

ここでは、

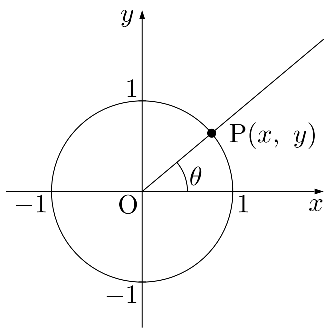
① $y = \sin\theta$　　② $y = \cos\theta$　　③ $y = \tan\theta$

という三角関数のグラフについて考えます。
グラフをかくときは、

(i) (θ と y の) 対応表を作る
(ii) 対応する点を座標平面上にかき入れる
(iii) かき入れた点をなめらかに結ぶ

という手順で行いましたが、三角関数のグラフも同様の手順でかくことができます。

しかし、xy 平面上で原点 O を基準点とし、x 軸の正の部分を始線として一般角 θ の動径をかき、単位円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、



$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

であるので、単位円を利用することで θ と三角関数の値との関係を求めることができます。そこで、三角関数のグラフをかくときには、

(i) 単位円を利用して、θ と y の対応関係を調べる
(ii) 対応する点を座標平面上にかき入れる
(iii) かき入れた点をなめらかに結ぶ

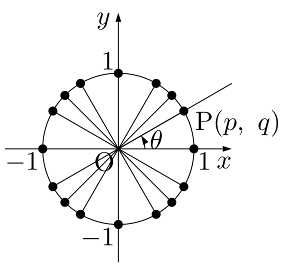
という手順で行います。

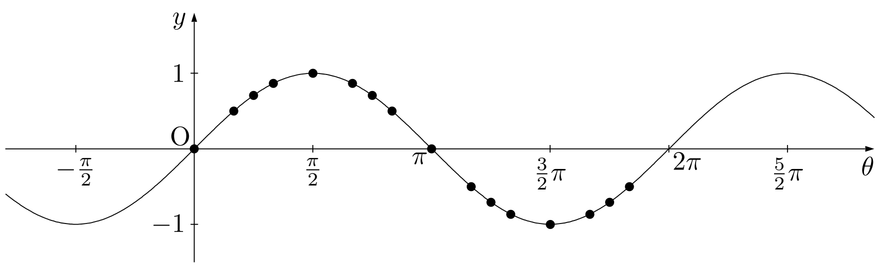
3.1.1　$y = \sin\theta$ のグラフ

単位円を利用して、θ と $\sin\theta$ の対応関係を調べます。

$$q = \sin\theta$$

となるので、横軸に θ、縦軸に点 P の y 座標の値をとってなめらかに結ぶと、次のようになります。





この $y = \sin\theta$ のグラフを**正弦曲線（サインカーブ）**といい、2π の間隔で同じ形の繰り返しになっているので、**周期**が 2π であるといいます。また、原点に関して対称なグラフで、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ という特徴があ

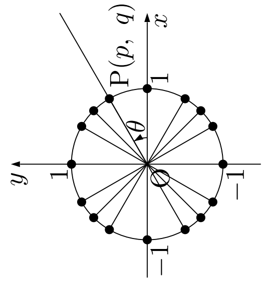
ります。

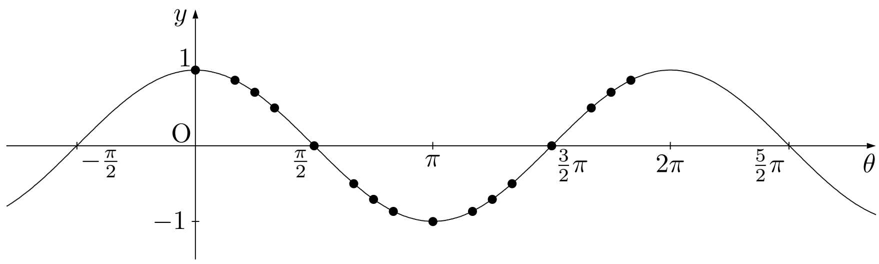
3.1.2 $y = \cos\theta$ のグラフ

単位円を利用して、θ と $\cos\theta$ の対応関係を調べます。

$$p = \cos\theta$$

となるので、横軸に θ、縦軸に点 P の x 座標の値をとってなめらかに結ぶと、次のようになります。
($p = \cos\theta$ の値を $y = \cos\theta$ と対応させるため、単位円を反時計回りに 90° 回転してあります。)





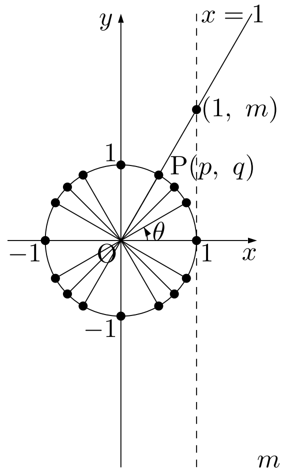
この $y = \cos\theta$ のグラフは、$y = \sin\theta$ のグラフと同じ形になっているので正弦曲線といい、2π の間隔で同じ形の繰り返しになっているので、周期は 2π です。また、y 軸に関して対称なグラフで、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ という特徴があります。

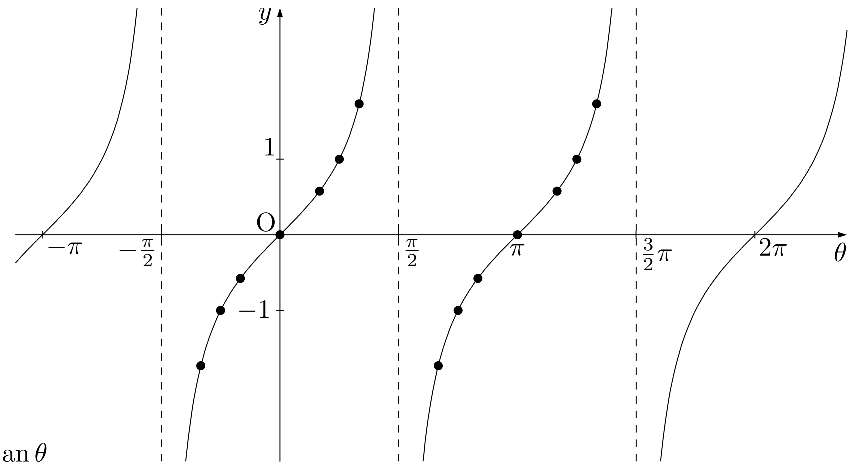
3.1.3 $y = \tan\theta$ のグラフ

$\tan\theta$ の値は単位円周上の点ではなく、動径と直線 $x = 1$ との交点により求めることができたので、グラフを考えるときもそれを利用します。動径と直線 $x = 1$ との交点の座標を $(1,\ m)$ とすると、

$$m = \tan\theta$$

となるので、横軸に θ、動径と直線 $x = 1$ との交点の y 座標の値をとってグラフにすると、次のようになります。





$m = \tan\theta$

この $y = \tan\theta$ のグラフは、π の間隔で同じ形の繰り返しになっているので、周期は π なります。また、原点に関して対称なグラフで、値域は実数全体になります。そして、直線 $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ や $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ にグラフが限り

なく近づき、そのような直線を**漸近線**といいます。

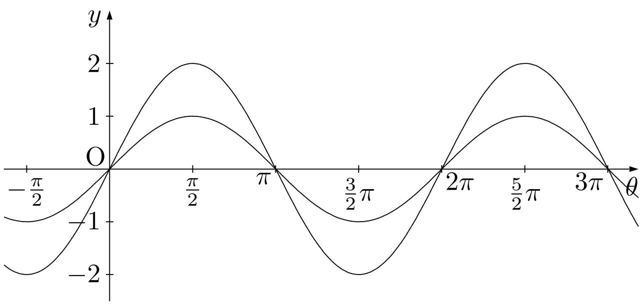
3.2　$y = a\sin b\theta$ のグラフ

3.2.1　$y = a\sin\theta$ のグラフ

$y = 2\sin\theta$ について、θ と y の対応表を作成すると次のようになります。

θ	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\cdots$
$\sin\theta$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$
$2\sin\theta$	$\cdots$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	$\cdots$

表のように $y = 2\sin\theta$ のグラフは、$y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものとなるので、次のようなグラフになります。



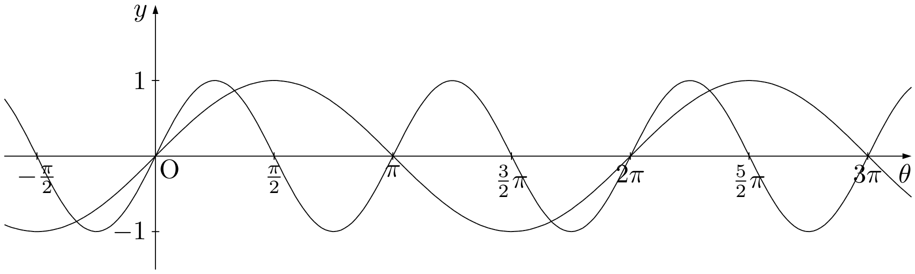
このことから、一般に $y = a\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に $|a|$ 倍したものになります。

3.2.2　$y = \sin b\theta$ のグラフ

$y = \sin 2\theta$ について、θ と y の対応表を作成すると次のようになります。

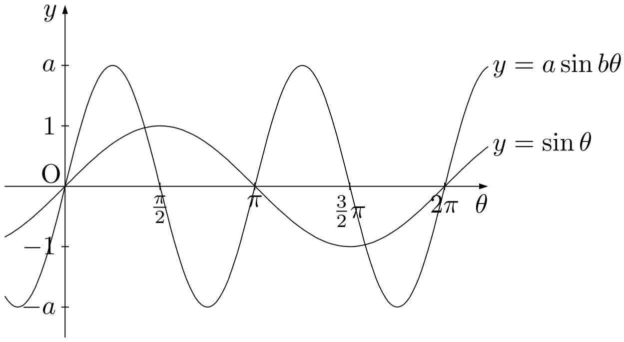
θ	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\cdots$
$\sin\theta$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$
$\sin 2\theta$	$\cdots$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\cdots$

表のように $y = \sin 2\theta$ のグラフは、$y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したものとなるので、次のようなグラフになります。



このことから、一般に $y=\sin b\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{|b|}$ 倍したものになります。

3.2.3　$y=a\sin b\theta$ のグラフ



$y=a\sin b\theta$ のグラフは、$y=\sin\theta$ のグラフを、

$$y \text{ 軸方向に } |a| \text{ 倍}$$

されるので、その値域は、

$$\text{値域}：-|a| \leqq y \leqq |a|$$

となり、また、

$$\theta \text{ 軸方向に } \frac{1}{|b|} \text{倍}$$

したものになるので、周期は、

$$\text{周期}：\frac{2\pi}{|b|}$$

となります。$y=a\cos b\theta,\ y=a\tan b\theta$ のグラフも同様の関係が成り立ちます。

【例題 3 − 4】

次の関数のグラフをかき、周期と値域を答えなさい。

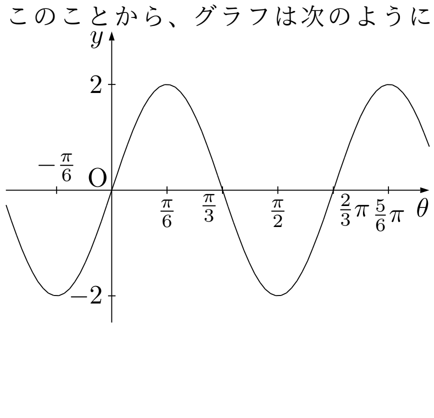
(1) $y=2\sin 3\theta$　　(2) $y=4\cos\dfrac{1}{2}\theta$　　(3) $y=\dfrac{1}{2}\tan 2\theta$

＜解説＞

(1) y 軸方向に 2 倍、θ 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍されるので、

$$-2 \leqq y \leqq 2, \qquad \text{周期}：\frac{2\pi}{3}$$

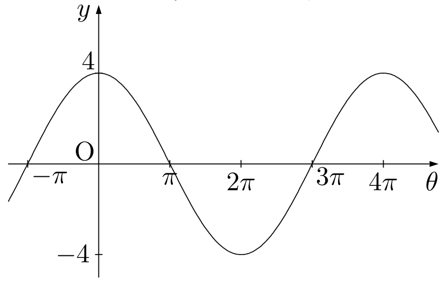
このことから、グラフは次のようになります。



(2) y 軸方向に 4 倍、θ 軸方向に 4 倍されるので、

$$-4 \leqq y \leqq 4, \qquad \text{周期}：4\pi$$

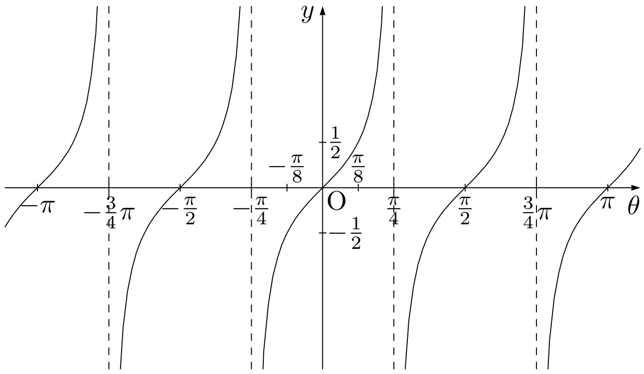
このことから、グラフは次のようになります。



(3) y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍、θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍されるので、

値域：実数全体,　　周期：$\dfrac{\pi}{2}$

このことから、グラフは右のようになります。



3.3 $y = \sin(\theta - p) + q$ のグラフ

$y = f(x)$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した関数の式は、

$$y - q = f(x - p)$$

という形で表されます。

$y = \sin(\theta - p) + q$ という式は、

$$y - q = \sin(\theta - p)$$

と変形できるので、$y = \sin\theta$ の式を、

$$\theta \longrightarrow \theta - p, \qquad y \longrightarrow y - q$$

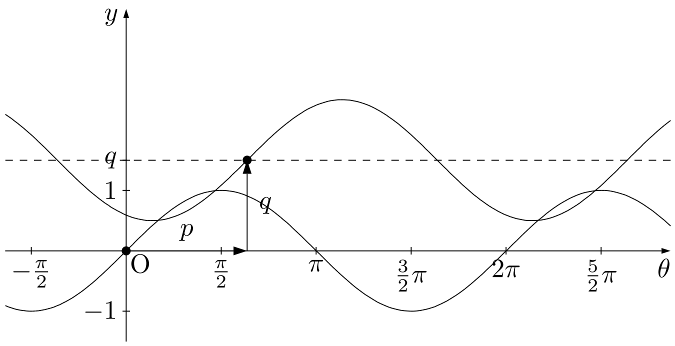
に置き換えたものとなります。このことから、$y = \sin\theta$ のグラフを、

θ軸方向に p,　　y 軸方向に q

だけ平行移動したグラフが $y = \sin(\theta - p) + q$ のグラフということになります。平行移動することで値域は、

$$q - 1 \leqq y \leqq q + 1$$

のようになりますが、平行移動しただけではグラフの形は変わらないので、周期は変わりません。



また、$y = \cos(\theta - p) + q$, $y = \tan(\theta - p) + q$ のグラフも同様の関係が成り立ちます。

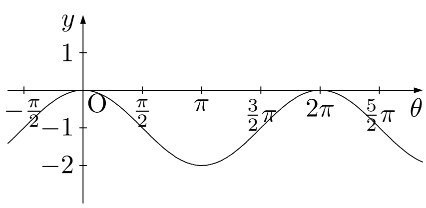
【例題 3 − 3】

次の関数のグラフをかき、周期と値域を答えなさい。

(1) $y = \cos\theta - 1$　　　　(2) $y = \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$

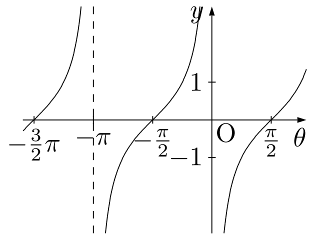
＜解説＞

(1) $y - (-1) = \cos\theta$ と表すことができるので、$y = \cos\theta$ のグラフを、$y = \cos\theta$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動グラフになります。よって、そのグラフは右図のようになり、値域と周期は、



値域：$-2 \leqq y \leqq 0$,　　周期：2π

(2) $y = \tan\left\{\theta - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ と変形できるので、$y = \tan\theta$ のグラフを、θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフになります。よって、そのグラフは右図のようになり、値域と周期は、

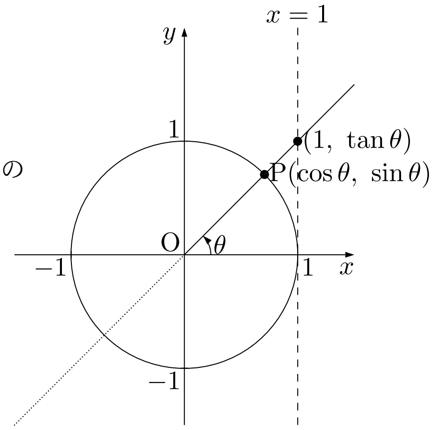


値域 : 実数全体,　　周期 : π

4　三角方程式・不等式

4.1　三角関数で成り立つ種々の等式

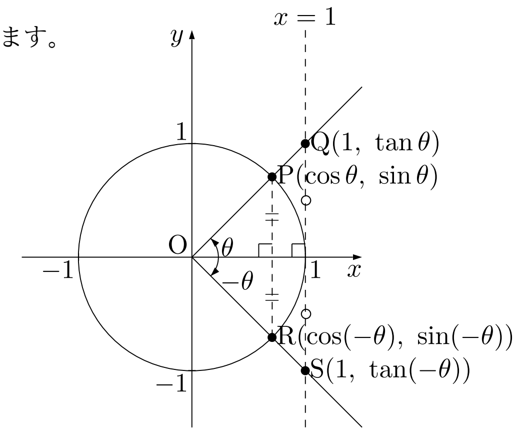
4.1.1　三角関数の周期性



$\sin\theta$, $\cos\theta$ は周期 2π の周期関数で、$\tan\theta$ は周期 π の周期関数であるので、整数 n を用いて、次の関係が成り立ちます。

- $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$
- $\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$
- $\tan(\theta+n\pi)=\tan\theta$

4.1.2　$-\theta$ の三角関数



右図のように点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$ をおくと、次の関係が成り立ちます。

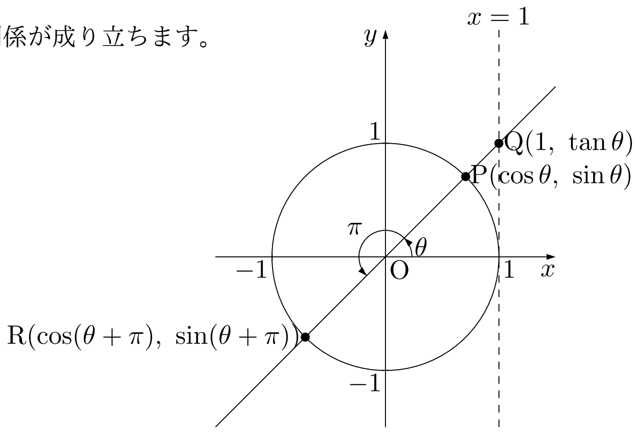
- $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
- $\cos(-\theta)=\cos\theta$
- $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

また、$\tan(-\theta)$ は、

$$\begin{aligned}\tan(-\theta)&=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}\\&=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta\end{aligned}$$

と式変形することでも等式が成り立つことがわかります。

4.1.3　$\theta+\pi$ の三角関数



図のように点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をおくと、次の関係が成り立ちます。

- $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$
- $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$
- $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

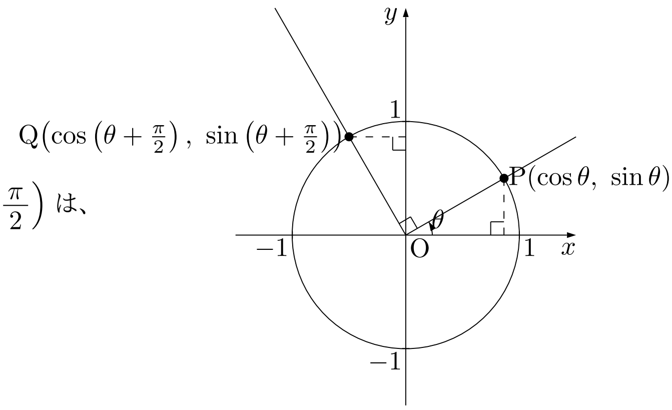
また、$\tan(\theta+\pi)$ は、

$$\begin{aligned}\tan(\theta+\pi)&=\frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)}\\&=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta\end{aligned}$$

と式変形することでも等式が成り立つことが分かります。

4.1.4 $\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

図のように点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと、



- $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

という関係が成り立ちます。また、$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ は、

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

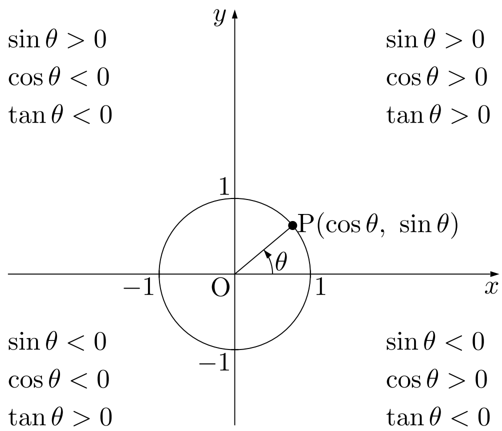
という関係が成り立つことがわかります。

4.1.5 三角関数で成り立つ種々の等式

タンジェントの値はコサインとサインの比によって求めることができるので特に覚える必要はありませんが、数学 I のときの等式を含めると、これらの等式は非常に多くあります。そこで、これらの等式を覚えなくてすむようにルール化することを考えます。

- $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta,\quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta,\quad \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta,\quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta,\quad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta,\quad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
- $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,\quad \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta,\quad \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta,\quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta,\quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

まず、θ はどのような値でもかまわないのですが、単純化するために、第 1 象限の角であると仮定して考えます。次に、各象限における三角関数の符号をチェックします。そして、θ に $+\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$ をすると、先程考えたように三角形の縦と横が入れ替わります。つまり、サインとコサインの値が入れ替わることになります。このことから、先程の等式は覚えることなく次の手順で導出できることになります。



(i) θ は第 1 象限の角とする。
(ii) 各象限の三角関数の符号をチェック。
(iii) $\pm\dfrac{\pi}{2}$ のときは、sin, cos を入れかえる。

【例題 4 − 1】

次の式を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を用いて表しなさい。

(1) $\sin(\theta-\pi)$　(2) $\cos(\theta-\pi)$　(3) $\tan(\theta-\pi)$

(4) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(5) $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(6) $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

＜解説＞

導出した公式を利用すると、次のように求めることができますが、この公式を利用するのは、公式を覚えるのも式変形も面倒です。

θ を第 1 象限の角であるとすると、$\theta-\pi$ は第 3 象限、$\theta-\dfrac{\pi}{2}$ は第 4 象限の角になります。また、$\pm\dfrac{\pi}{2}$ のときは sin と cos が入れ替わることに気を付ければ一発でそれぞれの式を導出することができます。

(1)

$$\begin{aligned}\sin\{-(\pi-\theta)\} &= -\sin(\pi-\theta)\\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos\{-(\pi-\theta)\} &= \cos(\pi-\theta)\\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan\{-(\pi-\theta)\} &= -\tan(\pi-\theta)\\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

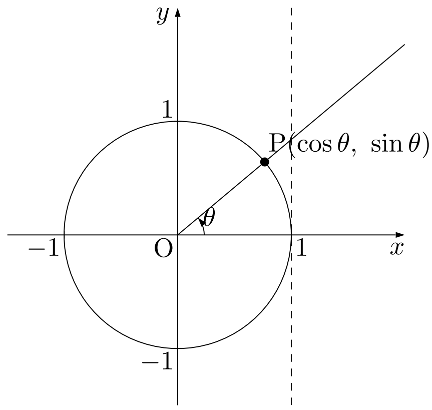
(6)

$$\begin{aligned}\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} &= -\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= -\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

4.2　三角方程式の基本

三角関数を含む方程式を、**三角方程式**といいます。

三角方程式を解く場合、単位円や三角関数のグラフを用いるのですが、三角関数のグラフを用いる場合、グラフをかくのに手間取ってしまうのであまりお勧めしません。そこで、数学 I のときと同様にして、



(i) 原点 O を中心として半径 1 の円（単位円）をかく。
(ii) その円周上（もしくは、直線 $x = 1$）に三角関数の値を満足する点 (P) をとる。
(iii) 動径 OP の表す角を求める。

という手順により求めます。

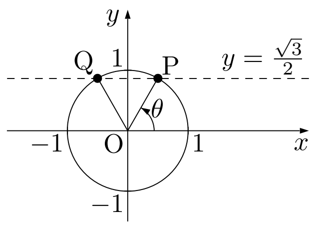
【例題 4 − 2】

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解きなさい。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

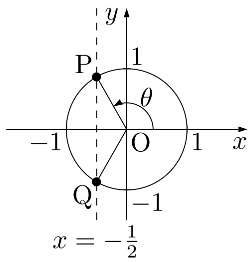
＜解説＞

(1) $\sin\theta$ の値は、単位円周上の y 座標を表すので、直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円との交点を P, Q とすると、右図のようになります。この動径 OP, OQ の表す角が求める θ になるので、$0 \leqq \theta < 2\pi$ において、求める θ の値は、



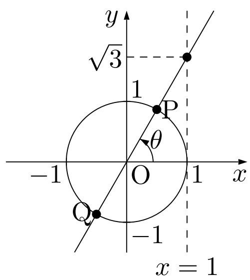
$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{2}{3}\pi$$

(2) $\cos\theta$ の値は単位円周上の x 座標を表すので、直線 $x = -\dfrac{1}{2}$ と単位円との交点を P, Q とすると、右図のようになります。この動径 OP, OQ の表す角が求める θ になるので、$0 \leqq \theta < 2\pi$ において、求める θ の値は、



$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi$$

(3) $\tan\theta$ の値は、直線 $x = 1$ 上の y 座標の値になるので、$(1,\ \sqrt{3})$ となる点と原点とを結んだ直線と、単位円との交点を P, Q とすると、右図のようになります。この動径 OP, OQ の表す角が求める θ になるので、$0 \leqq \theta < 2\pi$ において、求める θ の値は、



$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$

4.3 三角方程式

【例題 4 − 3】

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解きなさい。

$$2\sin^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$$

＜解説＞

$\sin\theta$, $\cos\theta$ という 2 つの三角関数（2 つの文字）が含まれている方程式なので、1 つの三角関数（1 つの文字）にそろえます。このとき、

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

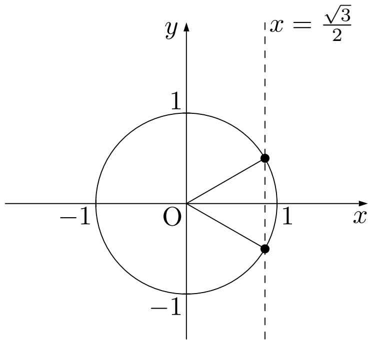
という条件式を利用することができます。このことから、与えられた方程式は、次のように変形することができます。

$$\begin{aligned} 2(1-\cos^2\theta) - \sqrt{3}\cos\theta + 1 &= 0 \\ 2 - 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 1 &= 0 \\ -2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3 &= 0 \\ 2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta - 3 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、$\cos\theta = c\ (-1 \leqq c \leqq 1)$ とおけば、

$$\begin{aligned} 2c^2 + \sqrt{3}c - 3 &= 0 \\ (2c - \sqrt{3})(c + \sqrt{3}) &= 0 \end{aligned}$$

$-1 \leqq c \leqq 1$ より　$c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ~~$-\sqrt{3}$~~



となるので、

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$

4.4 三角不等式の基本

三角関数を含む不等式を**三角不等式**といいます。

三角不等式は、基本的には三角方程式の同様にして解くことができ、次のような解法手順になります。

(i) 原点 O を中心として半径 1 の円（単位円）をかく。

(ii) 不等号を等号に変え、単位円周上（もしくは、直線 $x=1$）に三角関数の値を満足する点 (P) をとる。

(iii) 動径 OP の表す角を求め、不等式を満たす θ の値の範囲を求める。

【例題 4 − 4】

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めなさい。

(1) $\sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\cos\theta < \dfrac{1}{2}$　　(3) $\tan\theta > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

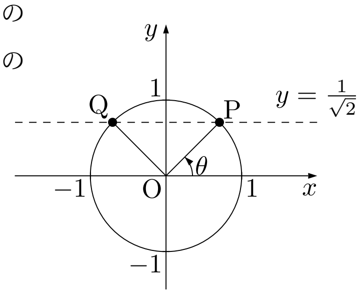
<解説>

(1) 不等号を等号に変えた、$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ という三角方程式を考えます。この三角方程式を満たす単位円周上の点は、右図のように P, Q があり、この θ の値は、

$$\theta = \frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi$$

になります。このことから、三角不等式を満たす θ の値の範囲は、

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$$

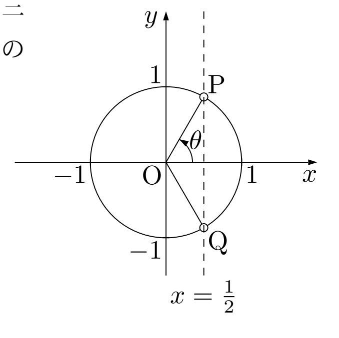


(2) 不等号を等号に変えた、$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ という三角方程式を考えます。この三角方程式を満たす単位円周上の点は、右の図のように P, Q があり、この θ の値は、

$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{5}{3}\pi$$

になります。このことから、三角不等式を満たす θ の範囲は、

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

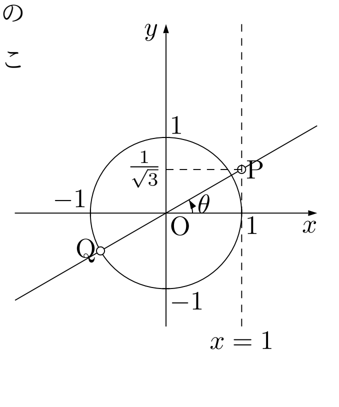


(3) 不等号を等号に変えた、$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ という三角方程式を考えます。この三角方程式を満たす単位円周上の点は、右の図のように P, Q があり、この θ の値は、

$$\theta = \frac{\pi}{6},\quad \frac{7}{6}\pi$$

になります。このことから、三角不等式を満たす θ の範囲は、

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



4.5 三角不等式

【例題 4 − 5】

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解きなさい。

$$4\cos^2\theta - 1 \geqq 4\sin\theta$$

＜解説＞

$\sin\theta, \cos\theta$ という 2 つの三角関数（2 つの文字）が含まれている不等式は、三角方程式と同じように、1 つの三角関数（1 つの文字）にそろえます。このとき、

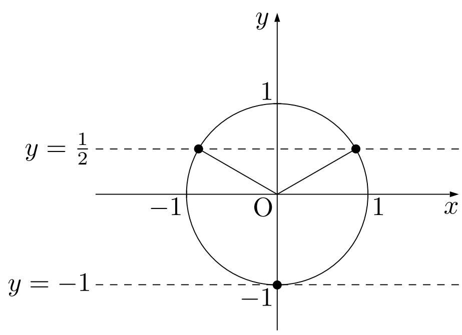
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

という条件式を利用することができます。このことから、与えられた方程式は、次のように変形することができます。

$$\begin{aligned} 4(1-\sin^2\theta) - 1 - 4\sin\theta &\geqq 0 \\ 4 - 4\sin^2\theta - 1 - 4\sin\theta &\geqq 0 \\ -4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 4 - 1 &\leqq 0 \\ 4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 &\leqq 0 \end{aligned}$$

ここで、$\sin\theta = s\ (-1 \leqq s \leqq 1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} 4s^2 + 4s - 3 &\leqq 0 \\ (2s-1)(2s+3) &\leqq 0 \\ -\frac{3}{2} \leqq s &\leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$



となるので、$-1 \leqq s \leqq 1$ であることから、

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq \frac{1}{2}$$

よって、求める θ の値の範囲は、

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$$

5　三角関数の加法定理

5.1　三角関数の加法定理

2 つの角 α、β の和 $\alpha+\beta$ と、差 $\alpha-\beta$ の三角関数は、α、β のそれぞれの三角関数を用いて、

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

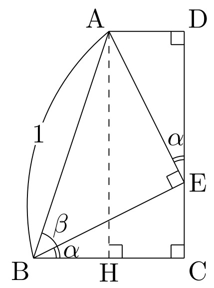
③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　⑥ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

と表すことができ、これを**三角関数の加法定理**といいます。

5.1.1　sin の加法定理の証明

図のような $\mathrm{AB}=1$ となる台形 ABCD を考えます。



直角三角形 ABE に着目すると、

$$\mathrm{AE}=\sin\beta,\quad \mathrm{BE}=\cos\beta$$

となります。また、$\triangle\mathrm{AED}\backsim\triangle\mathrm{EBC}$ であるので、直角三角形 AED に着目すると、

$$\mathrm{ED}=\mathrm{AE}\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$$

となり、直角三角形 EBC に着目すると、

$$\mathrm{EC}=\mathrm{BE}\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$$

となります。ここで、A から BC に垂線を下ろして、その交点を H とすると、

$$\sin(\alpha+\beta)=\mathrm{AH}$$

です。また、四角形 AHCD は長方形になるので、

$$\mathrm{AH}=\mathrm{DC}$$

つまり、

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\mathrm{AH}=\mathrm{DC}\\&=\mathrm{DE}+\mathrm{EC}\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

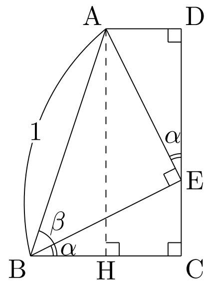
となります。また、$\beta\longrightarrow-\beta$ とすることにより、

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

となります。

5.1.2　cos の加法定理の証明

sin の加法定理と同様にして導出します。



$\triangle$ABE より、

$$\mathrm{AE} = \sin\beta, \quad \mathrm{BE} = \cos\beta$$

$\triangle$AED より、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AE}\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha$$

$\triangle$EBC より、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BE}\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$$

$\triangle$ABH より、

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{BH}$$

となり、四角形 AHCD は長方形なので、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{HC}$$

よって、

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \mathrm{BH} = \mathrm{BC} - \mathrm{HC}\\ &= \mathrm{BC} - \mathrm{AD}\\ &= cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

となります。また、$\beta \longrightarrow -\beta$ とすることにより、

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\{\alpha+(-\beta)\}\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

5.1.3 tan の加法定理の証明

sin と cos の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

となります。また、$\beta \longrightarrow -\beta$ とすることにより、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \tan(\alpha+(-\beta))\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

【例題 5 − 3】

加法定理を利用して、次の値を求めなさい。

(1) $\sin 105^\circ$ (2) $\cos 105^\circ$ (3) $\tan 105^\circ$

<解説>

(1)

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ)\\&= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ\\&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

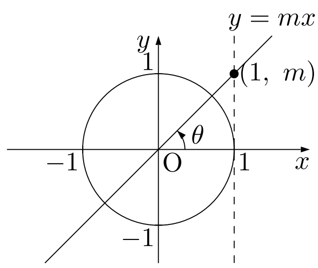
(2)

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(45^\circ + 60^\circ)\\&= \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ\\&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(45^\circ + 60^\circ)\\&= \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ}\\&= \frac{1+\sqrt{3}}{1 - 1\cdot\sqrt{3}}\\&= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}\\&= \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}\\&= -\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\\&= -2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

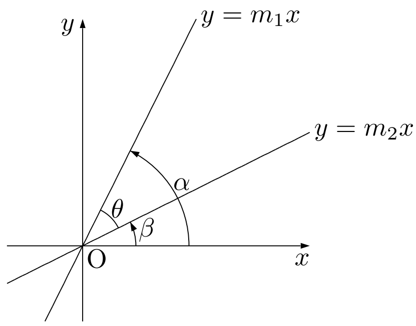
5.2　2 直線のなす角



図のように単位円と、原点を通り傾き m である直線 $y = mx$ について考えます。直線 $y = mx$ と x 軸の正の部分とのなす角を θ とするとき、

$$\tan\theta = m$$

という関係が成り立ち、tan の値は直線の傾きと同じ値になることがわかります。そして、この関係と加法定理を用いることにより、2 直線のなす角を求めることができます。



そこで右図のように、原点を通り傾き m_1, m_2 となる 2 つの直線を考えます。このとき、2 直線の x 軸の正の部分とのなす角をそれぞれ α, β とすると、

$$\tan\alpha = m_1, \quad \tan\beta = m_2$$

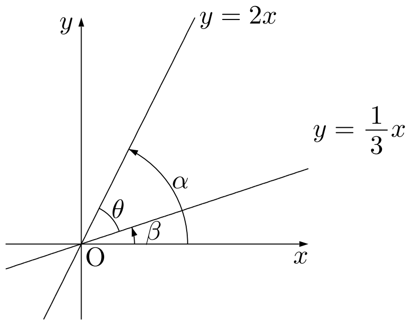
と表すことができます。よって、2 直線のなす角を θ とするとき、三角関数の加法定理から、

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha - \beta)\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\end{aligned}$$

【例題 5 − 2】

2 直線 $y = 2x,\ y = \dfrac{1}{3}x$ の作る角 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めなさい。

＜解説＞



右図のように、2 直線 $y = 2x$, $y = \dfrac{1}{3}x$ と x 軸の正の部分とのなす角をそれぞれ α, β とすると、

$$\tan\alpha = 2, \qquad \tan\beta = \frac{1}{3}$$

このことから、三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha - \beta)\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{2 - \dfrac{1}{3}}{1 + 2\cdot\dfrac{1}{3}}\\ &= \frac{6 - 1}{3 + 2} = 1\end{aligned}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より、

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

5.3　2 倍角の公式

三角関数の加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ において、$\alpha=\theta,\ \beta=\theta$ とすると、

$$\begin{aligned}\sin(\theta+\theta)&=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\\ \sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

と表すことができます。

同じようにして、$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ において、$\alpha=\theta,\ \beta=\theta$ とすると、

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\theta)&=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta\\ \cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\end{aligned}$$

さらに、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\cos^2\theta-\sin^2\theta&=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta\\ &=1-2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\theta-\sin^2\theta&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\\ &=2\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

となり、$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ において、$\alpha=\theta,\ \beta=\theta$ とすると、

$$\begin{aligned}\tan(\theta+\theta)&=\frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}\\ \tan 2\theta&=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

このように、三角関数の加法定理を用いると、θ の 2 倍の角である 2θ に関する公式を導出することができ、これらの公式を **2 倍角の公式**といいます。

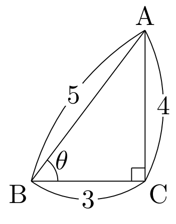
【例題 5 − 3】

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で、$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $\sin 2\theta$　　(2) $\cos 2\theta$　　(3) $\tan 2\theta$

<解説>

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき、$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$ になるので、右図のような $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ を満たす直角三角形から、



$$\cos\theta=-\frac{3}{5},\quad \tan\theta=-\frac{4}{3}$$

となります。このことから、

(1)

$$\begin{aligned}\sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta\\ &=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\ &=\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2\\ &=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\
&= \frac{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{16}{9}} \\
&= \frac{2\cdot(-4)\cdot 3}{9-16} = \frac{24}{7}
\end{aligned}
$$

5.4 半角の公式

ここでは、θ の半分の角の大きさである $\dfrac{\theta}{2}$ に関する公式（**半角の公式**）の導出を行います。

θ の 2 倍の角である 2θ に関する 2 倍角の公式を導出することができました。逆から見ると、2θ の半分の角が θ であると考えることができます。cos の 2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ から、

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\sin^2\alpha &= 1 - \cos 2\alpha \\ \sin^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

ここで、$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ とすると、

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

となります。同様にすれば、

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ 2\cos^2\alpha &= \cos 2\alpha + 1 \\ \cos^2\alpha &= \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \\ \cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

また、tan については、sin と cos の半角の公式を用いることで、

$$\begin{aligned} \tan^2\frac{\theta}{2} &= \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \end{aligned}$$

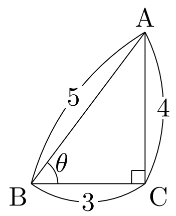
【例題 5 − 4】

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ で、$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}$ (2) $\cos\dfrac{\theta}{2}$ (3) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

＜解説＞

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、$\sin\theta > 0,\ \cos\theta < 0,\ \tan\theta < 0$ になるので、右図のような $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ を満たす直角三角形から、



$$\cos\theta = -\frac{3}{5},\quad \tan\theta = -\frac{4}{3}$$

となります。このことから、半角の公式を用いると、

(1)

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{2}\\ &= \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}\\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より、$\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるので、

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2}\\ &= \frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}\\ &= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より、$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるので、

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) 半角の公式を利用して求めることもできますが、(1), (2) の結果から、

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2\end{aligned}$$

5.5　3 倍角の公式

ここでは、θ の 3 倍の角である 3θ についての公式（**3 倍角の公式**）を導出します。
三角関数の加法定理や 2 倍角の公式を用いることで、

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

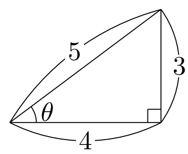
【例題 5 − 5】

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ で $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ であるとき、次の値を求めなさい。

(1) $\sin 3\theta$　　(2) $\cos 3\theta$

<解説>

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、$\sin\theta > 0,\ \cos\theta < 0,\ \tan\theta < 0$ になるので、右図のような $\cos\theta = \frac{4}{5}$ を満たす直角三角形から、



$$\sin\theta = \frac{3}{5},\quad \tan\theta = -\frac{3}{4}$$

このことから、3 倍角の公式を利用すると、

(1)

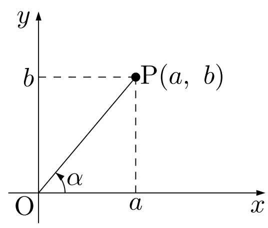
$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\\ &= 3\cdot\frac{3}{5} - 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\\ &= \frac{9}{5} - 4\cdot\frac{27}{125}\\ &= \frac{225-108}{125} = \frac{117}{125}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ &= 4\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= 4\cdot\left(-\frac{64}{125}\right) + \frac{12}{5}\\ &= \frac{-256+300}{125} = \frac{44}{125}\end{aligned}$$

6　三角関数の合成

6.1　三角関数の合成



右の図のように、座標平面上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があります。このとき、OP の長さは、2 点間の距離の公式（三平方の定理）より、

$$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$$

となります。OP と x 軸の正の部分とのなす角を α $(0 \leqq \alpha < 2\pi$ または $-\pi < \alpha \leqq \pi)$ とすると、

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha \qquad a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$$

と表すことができます。

このことから、三角関数の加法定理を用いると、

$$\begin{aligned}
a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha\sin\theta + \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\cos\theta \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \\
a\cos\theta + b\sin\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha\cos\theta + \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\sin\theta \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)
\end{aligned}$$

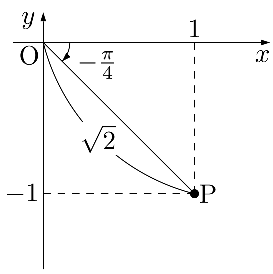
のようにして、複数の三角関数を 1 つの三角関数のみで表すことができ、このことを**三角関数の合成**といいます。

【例題 6 − 1】

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形しなさい。ただし、$r > 0,\ -\pi < \alpha \leqq \pi$ とします。

(1) $\sin\theta - \cos\theta$　　　(2) $-\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

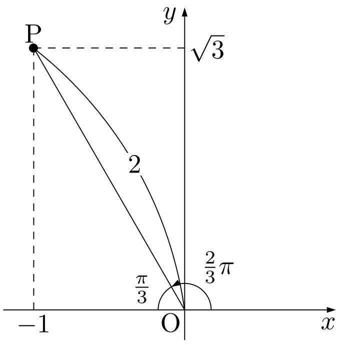
<解説>



(1) まずは、合成して sin のみで表すので、sin, cos の順に並べます。この式から、それぞれの係数を読み取ると、1, −1 になるので、点 $(1,\ -1)$ を座標平面上にとります。この点を P とすると、$\mathrm{OP} = r$、OP と x 軸の正の部分とのなす角が α になるので、図より、

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

(2) まずは、合成して sin のみで表すので、sin, cos の順に並べます。この式から、それぞれの係数を読み取ると、$-1,\ \sqrt{3}$ になるので、点 $(-1,\ \sqrt{3})$ を座標平面上にとります。この点を P とすると、$\mathrm{OP}=r$、OP と x 軸の正の部分とのなす角が α になるので、図より、

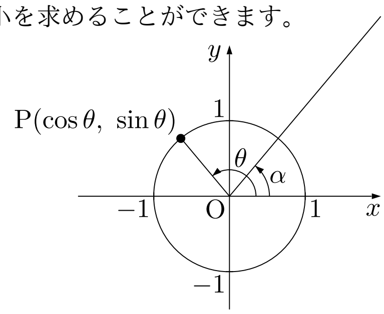


$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

6.2 三角関数の最大・最小

ここでは、$y = a\sin\theta + b\cos\theta$ のように表される三角関数の最大・最小について考えます。

$y = a\sin\theta,\ y = a\cos\theta$ のような三角関数であれば、その最大・最小を求めることは難しくありませんが、$y = a\sin\theta + b\cos\theta$ のように、1 つの式に複数の三角関数が含まれる場合、その最大・最小を求めるのは簡単ではありません。それは、θ の値に応じて、$\sin\theta$ や $\cos\theta$ の値がそれぞれ変化してしまうからです。このことは、複数の文字を含む式と同じようなことになります。複数の文字が含まれていたら文字を減らす（1 つにする）ことを考えるように、複数の三角関数が含まれていたら三角関数を減らす（1 つにする）ことを考えます。そこで、三角関数の合成を利用し、次のような手順で三角関数の最大・最小を求めることができます。



(i) $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する（三角関数の合成）。

(ii) $\sin(\theta+\alpha)$ の取り得る値の範囲を調べる。

θ がすべての実数をとるとき、

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

であるので、

$$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$$

(iii) $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の取り得る値の範囲を求める。

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \leqq \sqrt{a^2+b^2}$$

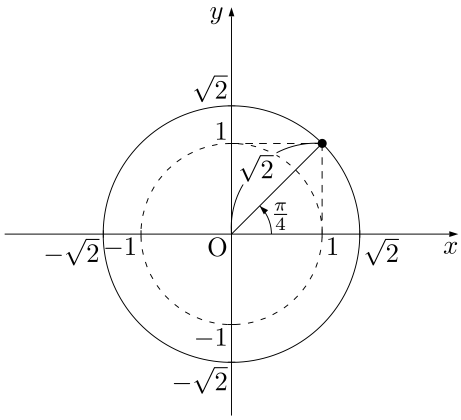
【例題 6 − 2】

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = \sin\theta + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ (2) $y = 3\sin\theta - 4\cos\theta$

<解説>

(1) 三角関数の合成を利用し、sin のみの式で表します。



$$\begin{aligned} y &= \sin\theta + \cos\theta \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

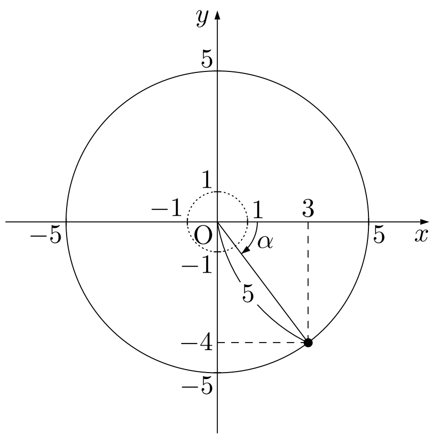
また、$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

となるので、右図より、$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$、つまり、$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、最大値 $\sqrt{2}$。

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$、つまり、$\theta = \frac{5}{4}$ のとき、最小値 $-\sqrt{2}$。

(2) 三角関数の合成を利用し、sin のみの式で表します。



$$
\begin{aligned}
y &= 3\sin\theta - 4\cos\theta \\
&= 5\sin(\theta+\alpha)
\end{aligned}
$$

ただし、α は、

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5},\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ を満たす角}$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
-1 &\leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1 \\
-5 &\leqq 5\sin(\theta+\alpha) \leqq 5
\end{aligned}
$$

となるので、

最大値：5,　　最小値：-5

6.3　三角方程式・不等式（合成の利用）

ここでは、次のような複数の三角関数を含む三角方程式や三角不等式の解き方について考えます。

- 三角方程式：

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \boxed{}$$

- 三角不等式：

$$a\sin\theta + b\cos\theta < \boxed{}, \qquad a\sin\theta + b\cos\theta > \boxed{}$$

複数の三角関数を含むような式では、複数の文字が含まれている式を扱うことと同じであるので、文字を減らす、つまり、1 つの三角関数で表さなければ解くことのは大変です。そこで、次のように三角関数の合成を利用し、sin のみで方程式や不等式を表すことで解いていきます。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

【例題 6 − 3】

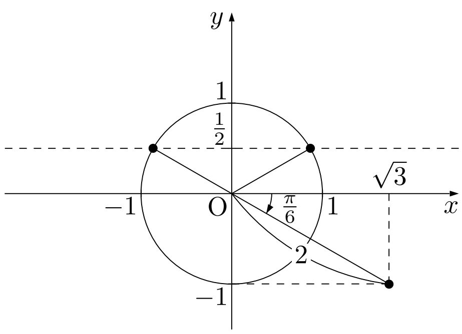
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 1$　　(2) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < -\sqrt{2}$

＜解説＞

(1) 三角関数の合成を利用すると、与えられた方程式は次のように変形することができます。

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 1$$
$$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$
$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$



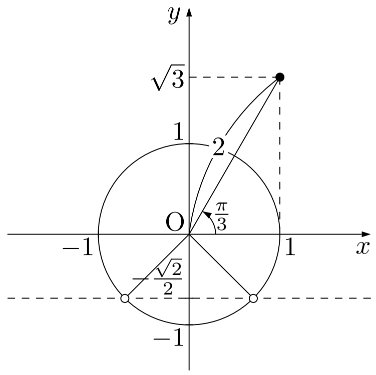
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

となるので、この範囲において、単位円周上の y 座標が $\frac{1}{2}$ になるところを探せば、

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi$$

(2) 三角関数の合成を利用すると、与えられた方程式は次のように変形することができます。



$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < -\sqrt{2}$$
$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < -\sqrt{2}$$
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

となるので、この範囲において、単位円周上の y 座標が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 未満になるところを探せば、

$$\frac{5}{4}\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{4}\pi$$
$$\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{3}$$
$$\frac{11}{12}\pi < \theta < \frac{17}{12}\pi$$