【数学 II】軌跡と領域

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 軌跡と方程式

平面上の点 P にある条件が与えられたとき、その条件を満たす点 P が動いてできる図形を、その条件を満たす点 P の**軌跡**といいます。

この軌跡を求めるための基本手順は、次のようになります。

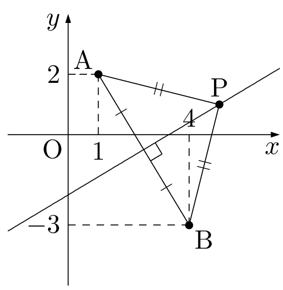
(i) 軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
(ii) 与えられた条件を $x,\ y$ についての方程式で表す。
(iii) 式を整理して、その方程式が表す図形を読み取る。
(iv) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する）。

1.1 2 定点から等距離にある点の軌跡

【例題 1 − 1】

A$(1,\ 2)$, B$(4,\ -3)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めなさい。

＜解説＞



(i) 軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
点 P の座標を $(x,\ y)$ とします。

(ii) 与えられた条件を $x,\ y$ についての方程式で表す。
点 P は 2 点 A, B から等距離にあるので AP = BP が成り立ちます。この両辺を 2 乗すると、

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

(iii) 式を整理して、その方程式が表す図形を読み取る。
①の両辺を展開して整理すると、

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9$$
$$6x - 10y - 20 = 0$$
$$3x - 5y - 10 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

となり、点 P は直線 $3x - 5y - 10 = 0$ 上にあります。

(iv) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる。
点 P は②の直線上にあることがわかりましたが、その直線すべてが点 P の軌跡かどうかはわかりません。つまり、求める軌跡は②の表す図形全体ではなく、その一部分である可能性があるので、②の直線上のすべての点が条件を満たすかどうかを確かめる必要があります。
②の式は、

$$y = \frac{3}{5}x - 2$$

と変形できるので、この直線上の任意の点 P を $\left(t,\ \dfrac{3}{5}t-2\right)$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(t-1)^2+\left\{\left(\frac{3}{5}t-2\right)-2\right\}^2\\&=t^2-2t+1+\frac{9}{25}t^2-\frac{24}{5}t+16\\&=\frac{34}{25}t^2-\frac{34}{5}t+17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2&=(t-4)^2+\left\{\left(\frac{3}{5}t-2\right)+3\right\}^2\\&=t^2-8t+16+\frac{9}{25}t^2+\frac{6}{5}t+1\\&=\frac{34}{25}t^2-\frac{34}{5}t+17\end{aligned}$$

となるので、$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$。つまり、

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$$

が成り立ち、確かに直線 $3x-5y-10=0$ 上の点 P は条件を満たします。

以上より、点 P の軌跡は

直線 $3x-5y-10=0$

となります。

軌跡は「どのような図形であるか」を求める作業であるので、その答えには

$$3x-5y-10=0$$

のように図形の方程式のみを書くのではなく、答えのように「直線」などの図形を示す言葉も添えることが大切です。

また、軌跡を求める手順の (iv) は、逆が成り立つかどうかの確認のために行いますが、成り立つことが明らかであるような場合には、

「逆に、この直線上の任意の点 P は、与えられた条件を満たす」

程度に示してもらえればいいです。場合によっては、この手順は省略されることがあります。

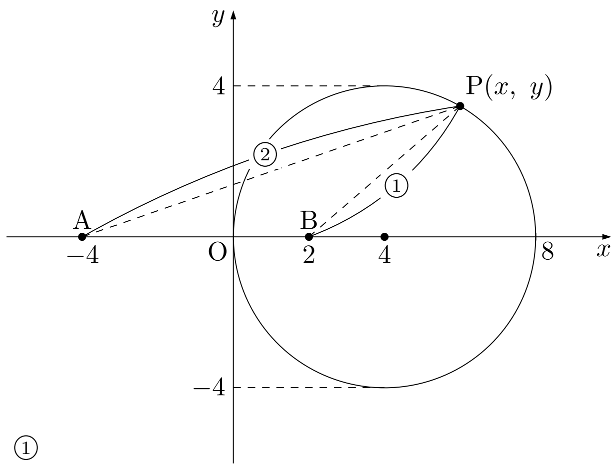
1.2　2 定点からの距離の比が一定な点の軌跡

2 定点 A, B に対し、AP : PB $= m : n$ を満たすような点 P の軌跡を考えます。ただし、$m = n$ のとき、AP = PB となり、2 定点から等距離にある点の軌跡を表すので、すでに学習している通り、線分 AB の垂直二等分線になります。そこで、ここでは、$m \fallingdotseq n$ の場合について考えますが、このとき、点 P の軌跡は、線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になり、この円を**アポロニウスの円**といいます。

【例題 1 − 2】

2 定点 A$(-4,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ に対して、AP : PB = 2 : 1 であるような点 P の軌跡を求めなさい。

＜解説＞



(i) 軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
点 P の座標を $(x,\ y)$ とします。

(ii) 与えられた条件を $x,\ y$ についての方程式で表す。
AP : PB = 2 : 1 より、AP = 2PB が成り立つので、両辺を 2 乗して

$$\mathrm{AP}^2 = 4\mathrm{PB}^2$$
$$(x+4)^2 + y^2 = 4\{(x-2)^2 + y^2\} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(iii) 式を整理して、その方程式が表す図形を読み取る。
①の両辺を展開して整理すると、

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x + 16 + y^2 &= 4(x^2 - 4x + 4 + y^2)\\
x^2 + 8x + 16 + y^2 &= 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2\\
3x^2 - 24x + 3y^2 &= 0\\
x^2 - 8x + y^2 &= 0\\
(x^2 - 8x + 4^2) + y^2 &= 4^2\\
(x-4)^2 + y^2 &= 16
\end{aligned}$$

となり、点 P は円 $(x-4)^2 + y^2 = 16$ 上にあります。

(iv) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する）。
点 P が円 $(x-4)^2 + y^2 = 16$ 上にあることがわかりましたが、円上のすべての点が条件を満たすのかどうかがわかりません。そこで、確認を行いますが、軌跡を求めた手順を逆にたどることが可能なので、この円上の任意の点 P は、与えられた条件を満たします。

以上より、点 P の軌跡は

中心 $(4,\ 0)$、半径 4 の円

になります。

このとき、点 P の軌跡は図からわかるように、線分 AB を $2:1$ に内分する点 $(0,\ 0)$ と外分する点 $(8,\ 0)$ を直径の両端とする円になっています。

1.3 直線上の動点に連動する点の軌跡

「直線上の動点」と「連動する点」というように動点が 2 つある場合、基本的な軌跡の求め方は同じですが、条件が「動点」であるため、条件式の立て方が今までと異なります。

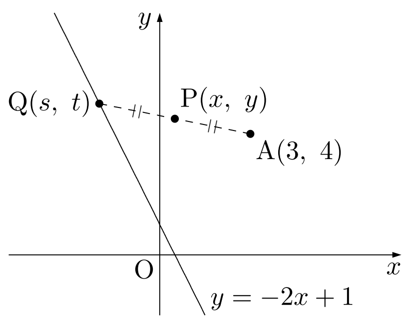
動点に連動する点の軌跡を求めるときの基本手順は以下のようになります。

(i) 動点 Q を Q$(s,\ t)$、軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
(ii) Q の条件を $s,\ t$ についての方程式で表す。
(iii) P, Q の関係から、$s,\ t$ を $x,\ y$ で表す。
(iv) $s,\ t$ を消去して得られた $x,\ y$ についての方程式が表す図形を読み取る。
(v) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する）。

【例題 1 − 3】

点 Q が $y=-2x+1$ 上を動くとき、点 A$(3,\ 4)$ と点Qとを結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めなさい。

＜解説＞



(i) 動点 Q を Q$(s,\ t)$、軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
直線上の動点 Q の座標を $(s,\ t)$、求める軌跡上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおきます。

(ii) Q の条件を $s,\ t$ についての方程式で表す。
点 Q は直線 $y=-2x+1$ 上の点なので、

$$t=-2s+1 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

(iii) P, Q の関係から、$s,\ t$ を $x,\ y$ で表す。
点 P は線分 AQ の中点なので、

$$x=\frac{s+3}{2},\quad 2x=s+3,\quad s=2x-3$$

$$y=\frac{t+4}{2},\quad 2y=t+4,\quad t=2y-4$$

(iv) $s,\ t$ を消去して得られた $x,\ y$ についての方程式が表す図形を読み取る。
(iii) で得られた条件式を①に代入すると、

$$\begin{aligned}2y-4&=-2(2x-3)+1\\2y&=-4x+6+1+4\\&=-4x+11\\y&=-2x+\frac{11}{2}\end{aligned}$$

（または、$4x+2y-11=0$ という形で表すこともできます。）

となり、点 P は直線 $y=-2x+\frac{11}{2}$ 上にあります。

(v) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する）。
点 P が直線 $y = -2x + \dfrac{11}{2}$ 上にあることがわかりましたが、直線上のすべての点が条件を満たすのかどうかがわかりません。そこで、確認を行いますが、軌跡を求めた手順を逆にたどることが可能なので、この直線上の任意の点 P は、与えられた条件を満たします。

以上のことから、求める軌跡は、

$$\text{直線}\quad y = -2x + \frac{11}{2} \quad (4x + 2y - 11 = 0)$$

1.4　曲線上の動点に連動する点の軌跡

直線上の動点に連動する点の軌跡の求め方と同じように、曲線上の動点でも、動点に連動する点の軌跡を求めるときの基本手順は以下のとおりです。

(ｉ) 動点 Q を Q$(s,\ t)$、軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。
(ii) Q の条件を $s,\ t$ についての方程式で表す。
(iii) P, Q の関係から、$s,\ t$ を $x,\ y$ で表す。
(iv) $s,\ t$ を消去して得られた $x,\ y$ についての方程式が表す図形を読み取る。
(ｖ) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する）。

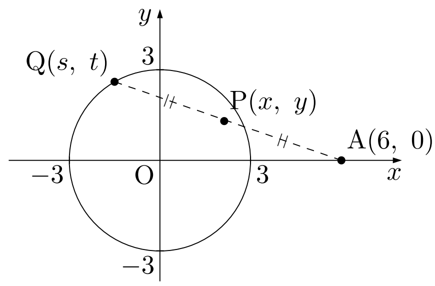
【例題 1 − 4】

点 Q が円 $x^2+y^2=9$ の周上を動くとき、点 A$(6,\ 0)$ と点 Q とを結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めなさい。

＜解説＞

ある点を基準に、図形上のすべての点を 2 倍、3 倍、$\cdots$ とすると拡大図、$\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\cdots$ とすると縮図になります。

この例題でも、点 A を基準に、円上のすべての点 Q を $\frac{1}{2}$ 倍する（点 P）と考えることができるので、$x^2+y^2=9$ の $\frac{1}{2}$ 倍に縮小した図（円）が得られます。



(ｉ) 動点 Q を Q$(s,\ t)$、軌跡上の任意の点 P の座標を P$(x,\ y)$ とおく。

円上の動点 Q の座標を $(s,\ t)$、求める軌跡上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおきます。

(ii) Q の条件を $s,\ t$ についての方程式で表す。

点 Q は円 $x^2+y^2=9$ 上の点なので、

$$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

(iii) P, Q の関係から、$s,\ t$ を $x,\ y$ で表す。

点 P は線分 AQ の中点なので、

$$x=\frac{s+6}{2} \qquad\qquad y=\frac{t+0}{2}$$
$$2x=s+6 \qquad\qquad 2y=t$$
$$s=2x-6 \qquad\qquad t=2y$$

(iv) $s,\ t$ を消去して得られた $x,\ y$ についての方程式が表す図形を読み取る。

(iii) で得られた条件式を①に代入すると、

$$(2x-6)^2+(2y)^2=9$$
$$(x-3)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

となり、点 P は円 $(x-3)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ 上にあります。

(v) 図形上のすべての点が条件を満たすことを確かめる（逆が成り立つことを確認する)。

点 P が円 $(x-3)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$ 上にあることがわかりましたが、円上のすべての点が条件を満たすのかどうかがわかりません。そこで、確認を行いますが、軌跡を求めた手順を逆にたどることが可能なので、この円上の任意の点 P は、与えられた条件を満たします。

以上のことから、求める軌跡は、

円　$(x-3)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$　(または、中心 $(3,\ 0)$、半径 $\dfrac{3}{2}$ の円)

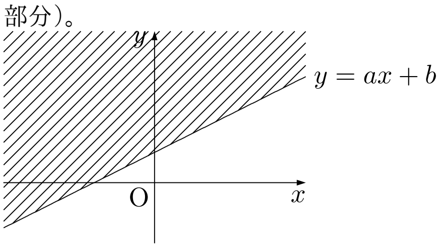
2 不等式の表す領域

2.1 関数のグラフと不等式の表す領域

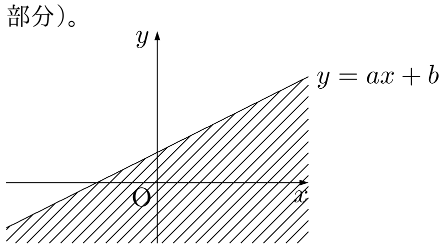
座標平面において、x、y の不等式を満足する点 (x, y) の集合を、この**不等式の表す領域**といいます。

例として、$y > ax + b$ と $y < ax + b$ のような不等式の表す領域について考えてみると、

① $y > ax + b$ の表す領域
$y = ax + b$ よりも y の値が大きい点を表すので、$y = ax + b$ よりも上側にある点の集合（図の斜線部分）。



② $y < ax + b$ の表す領域
$y = ax + b$ よりも y の値が小さい点を表すので、$y = ax + b$ よりも下側にある点の集合（図の斜線部分）。



となり、一般に、
① $y > f(x)$ の表す領域：曲線 $y = f(x)$ の上側　　② $y < f(x)$ の表す領域：曲線 $y = f(x)$ の下側
という関係が成り立ちます。

このことから、不等式の表す領域を求める手順は次のようになります。

(ｉ) 不等号を等号に置き換え、$y = f(x)$（境界線）をかく。
(ii) 不等式の表す領域に斜線を入れる。
　① $y > f(x)$ の表す領域：曲線 $y = f(x)$ の上側　　② $y < f(x)$ の表す領域：曲線 $y = f(x)$ の下側
(iii) 境界線の断りを入れる。
「$y \geqq f(x)$」、「$y \leqq f(x)$」のように、不等号に等号が含まれている場合、

「$y > f(x)$ または $y = f(x)$」、「$y < f(x)$ または $y = f(x)$」

ということを表すので、

「$y = f(x)$ の上側 または $y = f(x)$」、「$y = f(x)$ の下側 または $y = f(x)$」

のように、曲線 $y = f(x)$（境界線）が含まれることになり、次のように区別されます。
① $\geqq$, $\leqq$: 境界線を含む　　② $>$, $<$: 境界線を含まない

【例題 2 − 1】

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

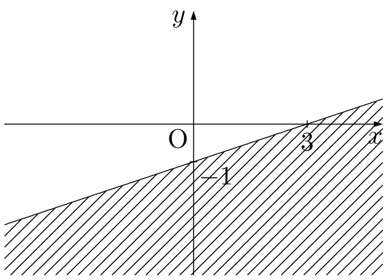
(1) $y < \dfrac{1}{3}x - 1$　　(2) $2x + y - 7 \leqq 0$　　(3) $x - 5 < 0$　　(4) $y \geqq -3$

＜解説＞

(1) 不等号を等号に変えると、

$$y = \frac{1}{3}x - 1$$

となるので、この直線を図に表します。次に、不等号の向きから、その直線の下側が不等式の表す領域になるので、その部分に斜線を入れます。また、不等号に等号が含まれていないので、境界線を含みません。

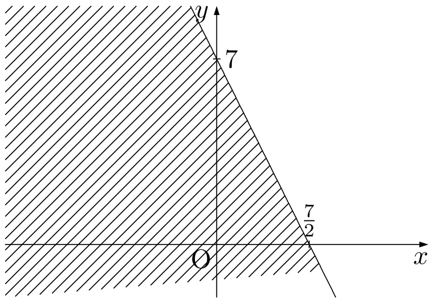


(2) まずは、$y \leqq f(x)$ のような形に不等式を変形します。

$$2x + y - 7 \leqq 0$$
$$y \leqq -2x + 7$$

そして、不等号を等号に変えると

$$y = -2x + 7$$



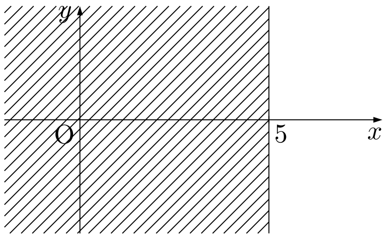
となるので、この直線を図に表します。次に、不等号の向きから、その直線の下側が不等式の表す領域になるので、その部分に斜線を入れます。また、不等号に等号が含まれているので、境界線を含みます。

(3) まずは、$y \leqq f(x)$ のような形に不等式を変形しますが、式に y が含まれていないので、x を左辺に、数を右辺に移します。

$$x - 5 < 0$$
$$x < 5$$

そして、不等号を等号に変えると

$$x = 5$$

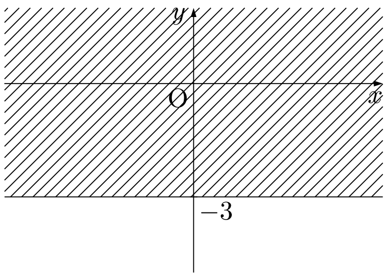


となるので、この直線を図に表します。次に、不等号の向きから、x が 5 よりも小さくなるのは、y の値に関わらず、直線の左側になるので、その部分に斜線を入れます。また、不等号に等号が含まれていないので、境界線を含みません。

(4) 不等号を等号に変えると

$$y = -3$$

となるので、この直線を図に表します。次に、不等号の向きから、y が -3 よりも大きくなるのは、x の値に関わらず、直線の上側になるので、その部分に斜線を入れます。また、不等号に等号が含まれているので、境界線を含みます。



2.2 円と不等式の表す領域

ここでは、次のような不等式の表す領域を考えます。

① $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$　　② $(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$

不等式の表す領域を求める手順は、

(i) 不等号を等号に置き換え、$y=f(x)$（境界線）をかく。
(ii) 不等式の表す領域に斜線を入れる。
(iii) 境界線の断りを入れる。

であったので、まずは、不等号を等号に置き換えると、次のように中心 $\mathrm{C}(p,\ q)$、半径 r の円になります。

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

また、座標平面上の任意の点を、$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、

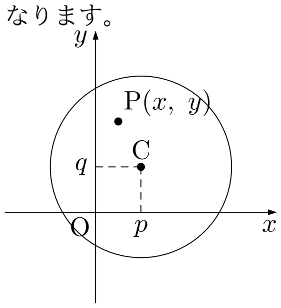
$$\mathrm{CP}^2=(x-p)^2+(y-q)^2$$

となるので、$\mathrm{CP}>0,\ r>0$ となることから、

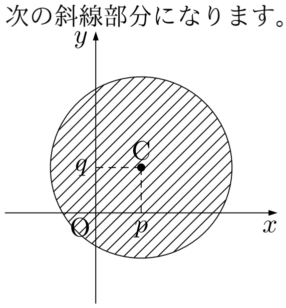
① $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$

$$\begin{aligned}&(x-p)^2+(y-q)^2<r^2\\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{CP}^2<r^2\\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{CP}<r\end{aligned}$$

よって、不等式を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円の内部になります。



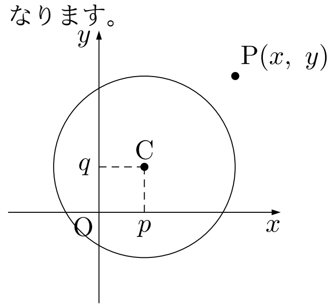
不等式の表す領域は、不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合であるので、この不等式の表す領域は、次の斜線部分になります。



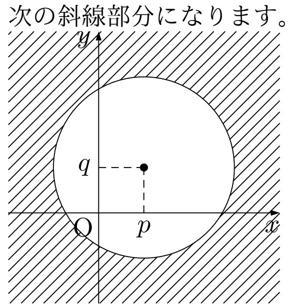
② $(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$

$$\begin{aligned}&(x-p)^2+(y-q)^2>r^2\\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{CP}^2>r^2\\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{CP}>r\end{aligned}$$

よって、不等式を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円の外部になります。



不等式の表す領域は、不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合であるので、この不等式の表す領域は、次の斜線部分になります。



以上のことから、円が境界線となる不等式の表す領域を求める手順は次のようになります。

(ｉ) 不等号を等号に置き換え、方程式の表す円（境界線）をかく。

(ii) 不等式の表す領域に斜線を入れる。

① $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$ の表す領域：中心 $(p,\ q)$、半径 r の円の内側

② $(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$ の表す領域：中心 $(p,\ q)$、半径 r の円の外側

(iii) 境界線の断りを入れる。

① $\geqq,\ \leqq$: 境界線を含む　　② $>,\ <$: 境界線を含まない

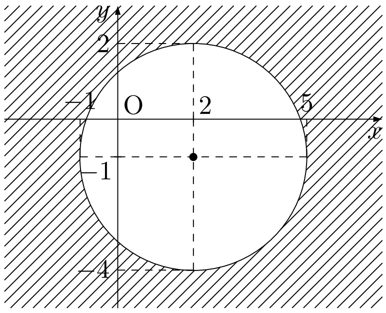
【例題 2 − 2】

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $(x-2)^2+(y+1)^2>9$　　(2) $x^2+y^2-2x+4y-11\leqq 0$

＜解説＞

(1)



(ｉ) 不等号を等号に置き換え、方程式の表す円（境界線）をかく。

不等号を等号に置き換えると、

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

となり、中心 $(2,\ -1)$、半径 3 の円を表します。

(ii) 不等式の表す領域に斜線を入れる。

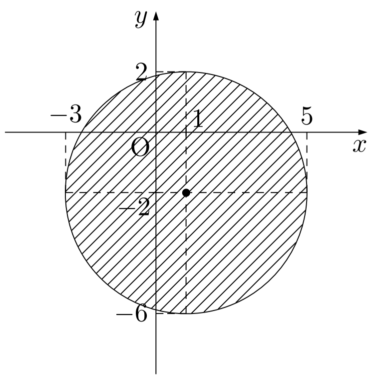
不等号の向きから、不等式の表す領域は円の外側です。

(iii) 境界線の断りを入れる。

不等号に等号が含まれていないので、境界線は含みません。

以上のことから、求める領域は図の斜線部分で、境界線を含みません。

(2)



(ｉ) 不等号を等号に置き換え、方程式の表す円（境界線）をかく。

不等号を等号に置き換える前に、円の方程式は、基本形でないと円の中心や半径を読み取ることができないので、不等式の左辺を平方完成しておきます。

$$x^2+y^2-2x+4y-11\leqq 0$$
$$(x^2-2x+1^2)+(y^2+4y+2^2)\leqq 11+1^2+2^2$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2\leqq 16$$

この不等式の不等号を等号に置き換えると、

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16$$

となるので、中心 $(1,\ -2)$、半径 4 の円であることがわかります。

(ii) 不等式の表す領域に斜線を入れる。

不等号の向きから、不等式の表す領域は円の内側です。

(iii) 境界線の断りを入れる。

　　不等号に等号が含まれているので、境界線は含みます。

以上のことから、求める領域は図の斜線部分で、境界線を含みます。

2.3 連立不等式の表す領域

連立方程式や不等式の解を求めることは、連立させた複数の方程式や不等式を同時に満たす共通解を求めることなので、連立不等式の表す領域についても同じように、それぞれの不等式の共通な領域を求めることになります。

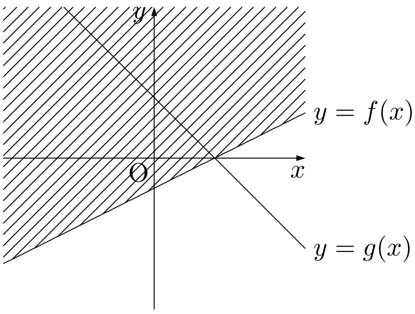
例えば、次のような連立不等式の領域を求める場合について考えてみます。

$$\begin{cases} y > f(x) \\ y \leqq g(x) \end{cases}$$

(i) それぞれの不等式の表す領域を求める。

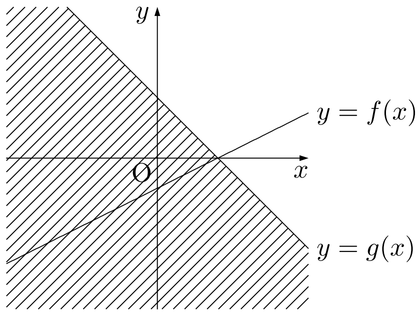
まずは、共通部分を求める前に、それぞれの不等式の表す領域を求めます。

① $y > f(x) \longrightarrow y = f(x)$ の上側



図の斜線部分で、境界線を含まない。

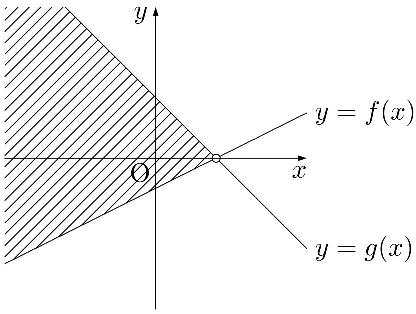
② $y \leqq g(x) \longrightarrow y = g(x)$ の下側



図の斜線部分で、境界線を含む。

(ii) 2 つの領域の共通部分を図示する（斜線を入れる）。

(i) で求めた 2 つの領域①，②の共通部分に斜線を入れます。



(iii) 境界線の断りを入れる。

連立不等式の表す領域を求める場合、境界線が複数存在する場合があります。すべての境界線を含む場合や、すべての境界線を含まない場合については特に問題ありませんが、境界線の一部のみを含む（境界線の一部を含まない）場合は、そのことがわかるように明記する必要があります。

この例では、

$y = f(x)$ は含まないで、$y = g(x)$ は含む。

などのように示します。

また、境界線の交点も含むのか含まないのかまぎらわしいので、含まないことを明確に示すために、白丸「○」などで表すと親切です。

【例題 2 − 3】

次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

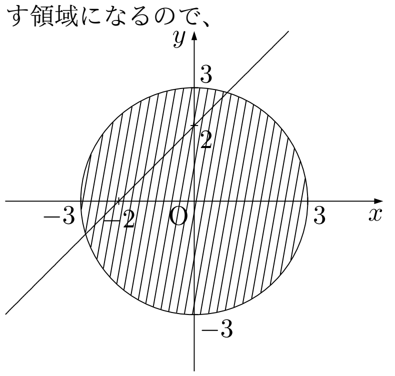
(1) $\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ y>x+2 \end{cases}$　　(2) $4<x^2+y^2 \leqq 9$

<解説>

(1) (ｉ) それぞれの不等式の表す領域を求める。

① $x^2+y^2<9$

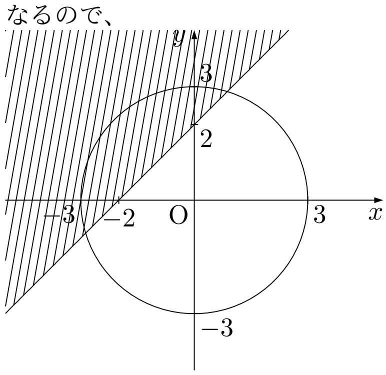
中心 (0, 0)、半径 3 の円の内側が不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含まない。

② $y>x+2$

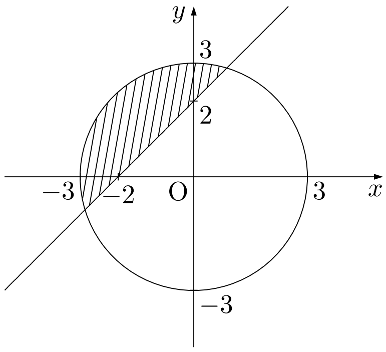
直線 $y=x+2$ の上側が不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含まない。

(ii) 2 つの領域の共通部分を図示する（斜線を入れる）。

(i) で求めた 2 つの領域①, ②の共通部分に斜線を入れます。



(iii) 境界線の断りを入れる。

どちらの不等式の不等号にも等号が含まれていないので、境界線を含みません。

(2) 与えられた不等式は、

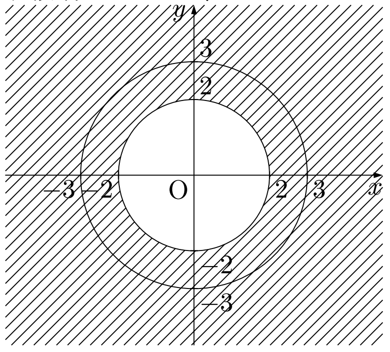
$$\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x^2+y^2 \leqq 9 \end{cases}$$

にょうに、2 つの不等式が連立されたものだと考えることができます。

(i) それぞれの不等式の表す領域を求める。

① $x^2+y^2>4$

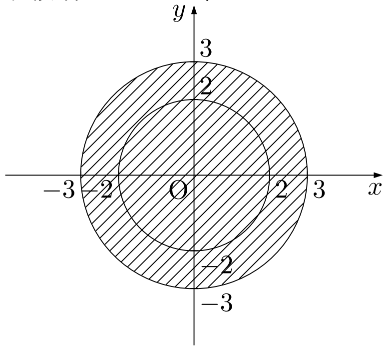
中心 (0, 0)、半径 2 の円の外側が不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含まない。

② $x^2+y^2 \leqq 9$

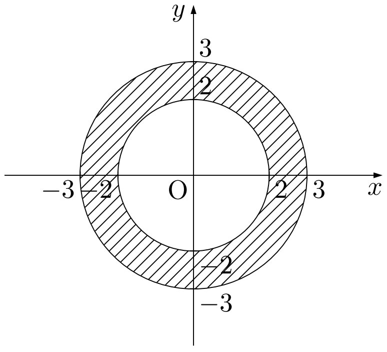
中心 (0, 0)、半径 3 の円の内側が不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含む。

(ii) 2 つの領域の共通部分を図示する（斜線を入れる）。

(i) で求めた 2 つの領域①, ②の共通部分に斜線を入れます。



(iii) 境界線の断りを入れる。

中心 (0, 0)、半径 2 の円の境界線は含みませんが、中心 (0, 0)、半径 3 の円の境界線は含みます。そのことがわかるように、

「境界線は、円 $x^2+y^2=4$ の周は含まないで、他は含む。」

であったり、

「境界線は、円 $x^2+y^2=9$ の周は含み、他は含まない。」

などのように記しておきます。

2.4 不等式の表す領域

左辺が整式の積の形（A, B は整式）で表されるような不等式では、次のような関係が成り立ちます。

① $AB > 0$

2 数の積が 0 よりも大きくなる、つまり、正の値になるときは、

$$\text{正の数} \times \text{正の数}, \qquad \text{負の数} \times \text{負の数}$$

のように同符号の 2 数の積になります。
整式についても同様にして、2 つの整式の積が 0 よりも大きくなるときは、次のような関係が成り立ちます。

$$AB > 0 \iff \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

② $AB < 0$

2 数の積が 0 よりも小さくなる、つまり、負の値になるときは、

$$\text{正の数} \times \text{負の数}, \qquad \text{負の数} \times \text{正の数}$$

のように異符号の 2 数の積になります。
整式についても同様にして、2 つの整式の積が 0 よりも小さくなるときは、次のような関係が成り立ちます。

$$AB < 0 \iff \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

このように、左辺が整式の積の形で表される不等式は、2 組の連立不等式で表すことできるので、それぞれの連立不等式の表す領域を求めることで、与えられた不等式の領域を求めることができます。

【例題 2 − 4】

次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $(y-1)(x-y-1) > 0$ (2) $(x-y+1)(x^2+y^2-9) < 0$

<解説>

(1) 2 つの整式の積が正になっているので、2 つの整式は同符号。つまり、次のように 2 組の連立不等式で表すことができます。

$$\begin{cases} y-1 > 0 \\ x-y-1 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y-1 < 0 \\ x-y-1 < 0 \end{cases}$$

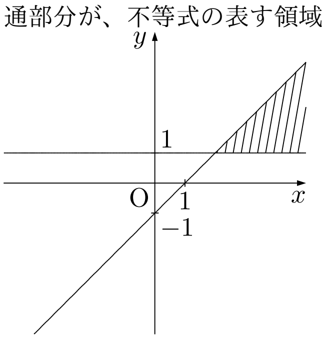
すべての不等式を $y > f(x)$, $y < f(x)$ となるように式変形を行うと、次のようになります。

$$\begin{cases} y > 1 \\ y < x-1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y < 1 \\ y > x-1 \end{cases}$$

このことから、それぞれの連立不等式の表す領域を求めていきます。

① $\begin{cases} y > 1 \\ y < x - 1 \end{cases}$

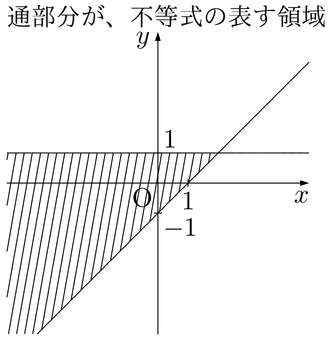
直線 $y = 1$ の上側、直線 $y = x - 1$ の下側の共通部分が、不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含みません。

② $\begin{cases} y < 1 \\ y > x - 1 \end{cases}$

直線 $y = 1$ の下側、直線 $y = x - 1$ の上側の共通部分が、不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含みません。

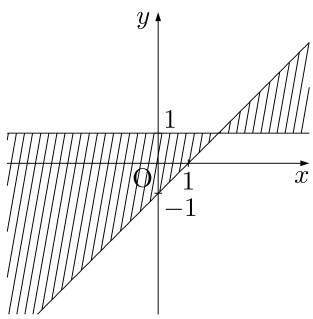
求める領域は、

①の領域　または　②の領域　（2 つの領域の和集合）

です。つまり、

①の領域,　②の領域,　2 つの領域の共通部分

になります。この場合は、2 つの領域の共通部分はないので、①の領域と②の領域を合わせたものになります。



以上より、求める領域は、右の図の斜線部分で、境界線を含みません。

(2) 2 つの整式の積が負になっているので、2 つの整式は異符号。つまり、次のように 2 組の連立不等式で表すことができます。

$$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 9 < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ x^2 + y^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

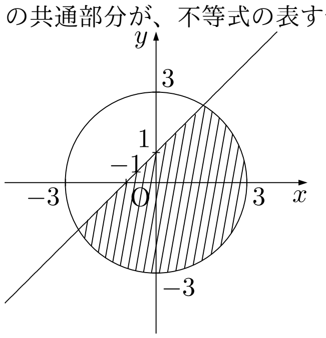
すべての不等式の不等号を等号に置き換えたとき、直線や円を表すように式変形を行うと、次のようになります。

$$\begin{cases} y < x + 1 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y > x + 1 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$$

このことから、それぞれの連立不等式の表す領域を求めていきます。

① $\begin{cases} y < x + 1 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

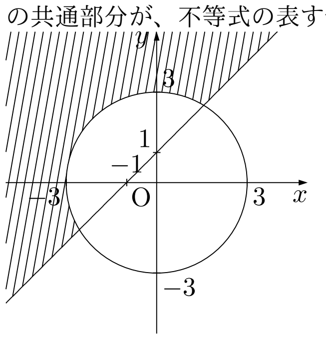
直線 $y = x + 1$ の下側、円 $x^2 + y^2 = 9$ の内側の共通部分が、不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含みません。

② $\begin{cases} y > x + 1 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

直線 $y = x + 1$ の上側、円 $x^2 + y^2 = 9$ の外側の共通部分が、不等式の表す領域になるので、



図の斜線部分で、境界線を含みません。

求める領域は、

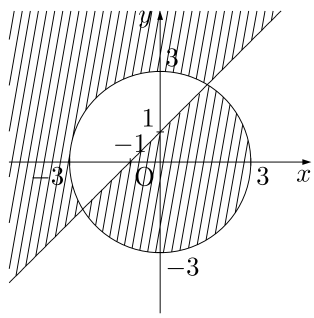
①の領域　または　②の領域　　（2 つの領域の和集合）

です。つまり、

①の領域,　②の領域,　2 つの領域の共通部分

になります。この場合は、2 つの領域の共通部分はないので、①の領域と②の領域を合わせたものになります。

以上より、求める領域は、右の図の斜線部分で、境界線を含みません。



2.5　領域と最大・最小

領域に関する最大・最小問題は、主に、次のような手順で考えます。

(i) 不等式の表す領域 D（領域を表す英単語「dominant」の頭文字）を図示する。
問題に条件として与えられた連立不等式の表す領域を図示し、その領域を説明しやすいように、「領域 D」などのように記号を用いて表します。

(ii) 最大・最小を求める $x,\ y$ の関係式を k とおく。
最大・最小を求める $x,\ y$ の関係式を、定数 k を用いて、

$x,\ y$ の関係式 $= k$ ……· ②

とおきます。$x,\ y$ の関係式は、基本的に 1 次式で与えられるので、①の式を y について解くと、直線の式になります。

(iii) 領域 D において、①がとり得る値の範囲を調べる。
①の式が表す直線は、k の値によって上下に動くことになります。k の値の最大・最小を求めればよいので、この直線を領域 D と共有点を持つように上下に動かしたとき、どこで最大・最小になるのかを読み取ります。

【例題 2 − 5】

$x,\ y$ が 4 つの不等式

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad x+y-7 \leqq 0, \qquad 3x+y-15 \leqq 0$$

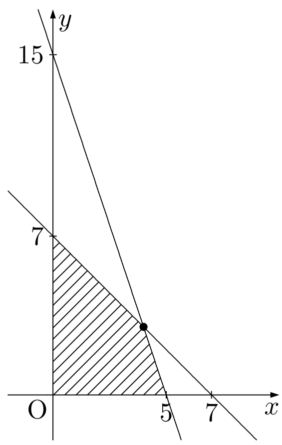
を満たすとき、$2x+y$ のとる値の最大値、最小値を求めなさい。

<解説>

(i) 不等式の表す領域 D（領域を表す英単語「dominant」の頭文字）を図示する。
$x,\ y$ が 4 つの不等式すべて満たすので、4 つの不等式の連立不等式の表す領域を求めます。

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -x+7 \\ y \leqq -3x+15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{直線 } x=0\ (y \text{ 軸}) \text{ の右側} \\ \text{直線 } y=0\ (x \text{ 軸}) \text{ の上側} \\ \text{直線 } y=-x+7 \text{ の下側} \\ \text{直線 } y=-3x+15 \text{ の下側} \end{cases}$$

与えられた不等式の表す領域を D とすると、領域 D は、右図の斜線部分で境界線を含みます。



(ii) 最大・最小を求める $x,\ y$ の関係式を k とおく。
$2x+y$ のとる値の最大値、最小値を求めるので、

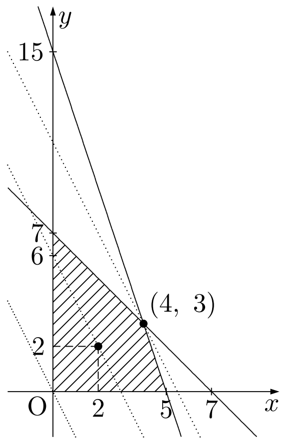
$2x+y=k$ ……· ①

とおきます。この①の式は、

$y=-2x+k$ ……· ②

と変形することができるので、傾き -2、y 切片 k の直線を表します。この直線は、傾き -2 を保ったまま、k の値により上下に平行移動します。

(iii) 領域 D において、①がとり得る値の範囲を調べる。



点 $(2,\ 2)$ のように、領域 D 内の点を 1 つ決めると、そのときの $2x+y$ の値は、

$$2\times 2+2=6$$

となります。この値が①の k の値になるので、②より、

$$y=-2x+6$$

とすれば、傾き -2、y 切片 6 の直線になります。このように、領域内の点を決めれば、その点を通る傾き -2 の直線の y 切片を読み取ることで、$2x+y$ の値を考えることができます。

領域 D と共有点を持つように傾き -2 の直線を上下に動かしたとき、y 切片 k の値が最大になるのは、直線 $y=-x+7$ と直線 $y=-3x+15$ の交点 $(4,\ 3)$ を通るとき、そして、最小となるのは、原点 $(0,\ 0)$ を通る時なので、

$$x=4,\ y=3 \text{ のとき、最大値：} 2\times 4+3=11$$

$$x=0,\ y=0 \text{ のとき、最小値：} 2\times 0+0=0$$

となります。

領域の最大・最小になるような $(x,\ y)$ の候補は、領域を表す図形の頂点になることが多いので、その点を求めておくようにしましょう。