# 【数学 II】積分法

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

# 目次

# 1　不定積分

## 1.1　不定積分

$x$ の関数 $f(x)$ が与えられたとき、微分すると $f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**といいます。例えば、

$$(x^2+x+1)'=2x+1$$
$$(x^2+x+2)'=2x+1$$
$$(x^2+x+3)'=2x+1$$

となるので、$x^2+x+1$、$x^2+x+2$、$x^2+x+3$ のどれも、$2x+1$ の原始関数となります。このように、ある関数の原始関数は無数に存在しますが、定数部分が異なるのみです。そこで、関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると、一般に $f(x)$ の原始関数は $C$ を任意の定数として、

$$F(x)+C$$

と表すことができます。これを記号を用いて、

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

と表し、$F(x)+C$ を**不定積分**、$C$ を**積分定数**といい、このように関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを**積分する**といいます。

積分することは微分することの逆の操作なので、

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{n}x^n\right)'=x^{n-1}$$

$n=m+1$ とすると、

$$\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'=x^m$$

とできるので、$C$ を積分定数とすると、

$$\int x^m\,dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+C$$

という関係になり、微分が「指数を前に出して、次数を 1 つ下げる」という操作なので、積分は「次数を 1 つ上げて、指数の逆数を前に出す」という操作だと考えることができます。

【例題 1 − 1】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int x\,dx$　(2) $\displaystyle\int x^3\,dx$　(3) $\displaystyle\int 1\,dx$　(4) $\displaystyle\int x^2\,dx$

<解説>

$C$ を積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

(2) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(3) $\displaystyle\int 1\,dx \quad (= \int dx)$

$$\begin{aligned}\int 1\,dx &= \int x^0\,dx \\ &= \frac{1}{1}x^1 + C \\ &= x + C\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

### 1.2 不定積分の公式

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ とすると、積分は微分の逆の演算であるので、微分の公式と同様に、積分でも次のような関係が成り立ちます。

(i) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad (k：\text{定数})$

$$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$$

となるので、$C_1$ を積分定数として、

$$\int kf(x)\,dx = kF(x)+C_1 \ \cdots\cdots \ ①$$

また、$C_2$ を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} k\int f(x)\,dx &= k\{F(x)+C_2\} \\ &= kF(x)+kC_2 \ \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

①, ②より、$\displaystyle\int kf(x)\,dx$ と $\displaystyle k\int f(x)\,dx$ は、

$$kF(x) + (\text{定数})$$

という同じ形で表されるので、

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

(ii) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$$

となるので、$C$ を積分定数として、

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x)+C \ \cdots\cdots \ ③$$

また、$C_1$, $C_2$ を積分定数とすると、

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C_1, \qquad \int g(x)\,dx = G(x)+C_2$$

となるので、

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x)+G(x)+C_1+C_2 \ \cdots\cdots \ ④$$

③, ④より、$\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\,dx$ と $\displaystyle\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ は、

$$F(x)+g(x)+(\text{定数})$$

という同じ形で表されるので、

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

【例題１－２】

次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int (x-6)\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x^2+x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int (3x^2+2x+1)\,dx$　(4) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{4}x^3+x-1\right)\,dx$

＜解説＞

$C$ を積分定数とします。

(1)

$$\begin{aligned}\int (x-6)\,dx &= \int x\,dx - 6\int dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 6x + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\,dx &= \int x^2\,dx + \int x\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int (3x^2+2x+1)\,dx &= 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + \int dx \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C \\ &= x^3 + x^2 + x + C\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \left(-\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{4}x^3+x-1\right)\,dx &= -\frac{1}{5}\int x^4\,dx + \frac{1}{4}\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int dx \\ &= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C \\ &= -\frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C\end{aligned}$$

## 1.3 導関数が与えられた積分

【例題 1 − 3】

次の条件を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

(1) $f'(x) = 6x^2 - 1,\ f(1) = 5$

(2) $f'(x) = -x^2 + x + 1,\ f(0) = 3$

＜解説＞

$C$ を積分定数とします。

(1) $f'(x) = 6x^2 - 1$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int (6x^2 - 1)\,dx \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 - x + C \\ &= 2x^3 - x + C \end{aligned}$$

$f(1) = 5$ であるので、

$$\begin{aligned} f(1) = 2 - 1 + C &= 5 \\ C &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

よって、

$$f(x) = 2x^3 - x + 4$$

(2) $f'(x) = -x^2 + x + 1$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int (-x^2 + x + 1)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

$f(0) = 3$ であるので、

$$f(0) = C = 3$$

よって、

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 3$$

# 2　定積分

## 2.1　定積分

$F(x)$ を区間 $a \leqq x \leqq b$（または、$b \leqq x \leqq a$）において連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つとするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

を $f(x)$ の $a$ から $b$ までの**定積分**といい、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値を求めることを、関数 $f(x)$ を $a$ から $b$ まで**積分する**といいます。また、このときの $f(x)$ を**被積分関数**、$a$ を**下端**、$b$ を**上端**、$x$ を**積分変数**、区間 $a \leqq x \leqq b$（または、$b \leqq x \leqq a$）を**積分区間**といいます。

不定積分のところで学習したように、関数 $f(x)$ の原始関数は一般に、$F(x) + C$ という形で表すことができました。このとき、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

となり、積分定数 $C$ は定積分の値に影響しないので、定積分では積分定数 $C$ を考える必要はありません。

また、定積分の値は、被積分関数の形と上端、下端の値で決まり、積分変数を表す文字には無関係になります。つまり、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

となります。

【例題 2 − 1】

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^3\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{1}^{2} x^2\,dx$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} 2\,dx &= \Big[2x\Big]_{-1}^{2} \\ &= 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 4 + 2 = 6\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} x^3\,dx &= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 \\ &= 0 - 4 = -4\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} x\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2\\ &= \frac{1}{2}(1-4) = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2} x^2\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\\ &= \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

## 2.2 定積分の公式

$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$ とすると、不定積分のときと同様にして、定積分のときにも次のような関係が成り立ちます。

(ｉ) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k:\text{定数})$

$$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$$

となるので、$kf(x)$ の原始関数の 1 つが $kF(x)$。このことから、

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,dx &= \Big[kF(x)\Big]_a^b \\ &= kF(b)-kF(a) \\ &= k\{F(b)-F(a)\} \\ &= k\Big[F(x)\Big]_a^b \\ &= k\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$$

となるので、$f(x)+g(x)$ の原始関数の 1 つが $F(x)+G(x)$。このことから、

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx &= \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b \\ &= \{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\} \\ &= \{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\} \\ &= \Big[F(x)\Big]_a^b + \Big[G(x)\Big]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

【例題 2 − 2】

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 (-3x^2+2x+1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^2+x)\,dx$

＜解説＞

(1) 被積分関数の原始関数を考えると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\,dx &= \Big[x^2+x\Big]_0^1 \\ &= (1^2+1)-(0^2+0)=2\end{aligned}$$

または、定積分の公式を利用すると次のように解くこともできます。

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\,dx &= 2\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\Big[x\Big]_0^1 \\ &= 2\cdot\frac{1^2-0^2}{2}+(1-0) \\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

(2) 被積分関数の原始関数を考えると、

$$\begin{aligned}\int_0^2 (-3x^2+2x+1)\,dx &= \Big[-x^3+x^2+x\Big]_0^2 \\ &= (-2^3+2^2+2)-(-0^3+0^2+0) \\ &= -8+4+2=-2\end{aligned}$$

または、定積分の公式を利用すると次のように解くこともできます。

$$\begin{aligned}\int_0^2 (-3x^2+2x+1)\,dx &= -3\int_0^2 x^2\,dx+2\int_0^2 x\,dx+\int_0^2 dx \\ &= -3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\Big[x\Big]_0^2 \\ &= -3\cdot\frac{2^3-0^3}{3}+2\cdot\frac{2^2-0^2}{2}+(2-0) \\ &= -8+4+2=-2\end{aligned}$$

(3) 被積分関数の原始関数を考えると、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+2\right)-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-1\right\} \\ &= \frac{8}{3}-\frac{12}{2}+2+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

または、定積分の公式を利用すると次のように解くこともできます。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)\,dx &= \int_{-1}^2 x^2\,dx-3\int_{-1}^2 x\,dx+\int_{-1}^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2+\Big[x\Big]_{-1}^2 \\ &= \frac{2^3-(-1)^3}{3}-3\frac{2^2-(-1)^2}{2}+\{2-(-1)\} \\ &= 3-\frac{9}{2}+3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(4) 被積分関数の原始関数を考えると、

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}(x^2+x)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}\\ &= \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right\}-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+\frac{1}{2}\cdot(-2)^2\right\}\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

または、定積分の公式を利用すると次のように解くこともできます。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}(x^2+x)\,dx &= \int_{-2}^{-1}x^2\,dx+\int_{-2}^{-1}x\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}\\ &= \frac{(-1)^3-(-2)^3}{3}+\frac{(-1)^2-(-2)^2}{2}\\ &= \frac{7}{3}+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

## 2.3 定積分の性質

$F'(x) = f(x)$ とすると、定積分には次のような性質があります。

( i ) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Big[F(x)\Big]_a^a \\
&= F(a) - F(a) = 0
\end{aligned}
$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -\Big[F(x)\Big]_b^a \\
&= -\{F(a) - F(b)\} \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \Big[F(x)\Big]_a^b \\
&= \int_a^b f(x)\,dx = (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b \\
&= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \Big[F(x)\Big]_a^b \\
&= \int_a^b f(x)\,dx = (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

【例題 2 − 3】

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} x^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)\,dx + \int_{2}^{1} (2x+1)\,dx$

<解説>

(1)

$$\int_{-1}^{-1} x^2\,dx = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(2x+1)\,dx-\int_{1}^{2}(2x+1)\,dx &= \int_{-1}^{2}(2x+1)\,dx+\int_{2}^{1}(2x+1)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx = \Big[x^2+x\Big]_{-1}^{1} \\ &= (1^2+1)-\{(-1)^2+(-1)\} = 2\end{aligned}$$

## 2.4 上端が変数の定積分

$a$ を定数とし、関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とします。このとき、定積分の上端が変数になるような $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は、

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt &= \Big[F(t)\Big]_a^x \\ &= F(x) - F(a)\end{aligned}$$

のように、その変数の関数になります。これを $x$ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} \\ &= F'(x) = f(x)\end{aligned}$$

という関係が導かれます。つまり、定積分の上端が変数（$x$）である場合、その変数（$x$）で微分すると、その文字（$x$）を変数とした被積分関数（$f(x)$）を取り出すことができます。

【例題 2 − 4】

次の等式を満たす $f(x)$、および定数 $a$ の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = 2x^2 - x - a$　　(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 - 3x + 1$

＜解説＞

(1) 両辺を $x$ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt &= (2x^2 - x - a)' \\ f(x) &= 4x - 1\end{aligned}$$

また、$x = 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_1^1 f(t)\,dt = 2\cdot 1^2 - 1 - a &= 0 \\ a &= 1\end{aligned}$$

(2) 両辺を $x$ で微分すると、

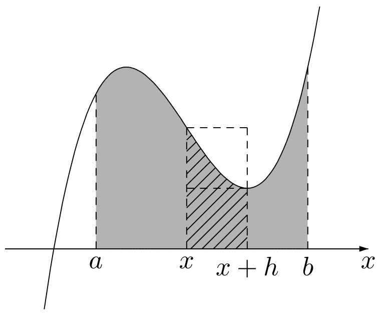
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= (2x^2 - 3x + 1)' \\ f(x) &= 4x - 3\end{aligned}$$

また、$x = a$ のとき、

$$\begin{aligned}2a^2 - 3a + 1 &= \int_a^a f(t)\,dt \\ (2a-1)(a-1) &= 0 \\ a &= \frac{1}{2},\ 1\end{aligned}$$

# 3　定積分と面積

## 3.1　定積分と面積の関係




右の図のように、区間 $a \leqq x \leqq b$ において、$f(x) \geqq 0$ であるような曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸、$x=a$、$x=b$ で囲まれる部分の面積 $S$ とし、区間内の任意の $x$ に対し、$a$ から $x$ までの部分に対応する面積を $S(x)$ とします。

このとき、右図の斜線部分の面積は、

$$S(x+h)-S(x)$$

と表すことができます。また、図のようにその部分の面積に囲まれるものと、その部分の面積を囲む 2 つの長方形を考えると、その面積はそれぞれ、

斜線部分に囲まれる長方形：$f(x+h)\cdot h$,　　斜線部分を囲む長方形：$f(x)\cdot h$

と表すことができます。すると、3 つの面積には次のような関係が成り立つことになります。

$$f(x+h)\cdot h \leqq S(x+h)-S(x) \leqq f(x)\cdot h$$

すべての辺を $h$ で割ると、

$$f(x+h) \leqq \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leqq f(x)$$

と変形できます。ここで、$h \to 0$ とする極限を考えると、

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x+h) \leqq \lim_{h\to 0} &\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leqq \lim_{h\to 0} f(x)\\ f(x) \leqq S'(x) &\leqq f(x)\end{aligned}$$

となり、

$$S'(x)=f(x)$$

という関係が導かれます。この式から、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであることがわかるので、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \Big[S(x)\Big]_a^b\\ &= S(b)-S(a)=S\end{aligned}$$

となり、$x$ 軸、$x=a$、$x=b$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる面積 $S$ は、

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

という定積分によって求めることができます。

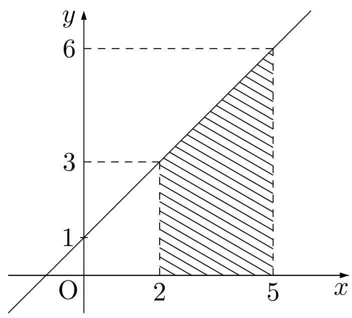
【例題 3 − 1】

(1) 直線 $y=x+1$ と $x=2$, $x=5$ および $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めなさい。

(2) 放物線 $y=-x^2+4$ と $x=-1$, $x=1$ および $x$ 軸とで囲まれた図形の面積 $S$ を求めなさい。

＜解説＞

(1) 求める面積は右図の斜線部分（台形）になるので、

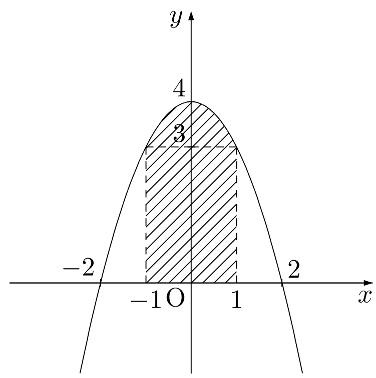



$$S = (3+6) \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$$

また、定積分を用いて次のように求めることもできます。

$$\begin{aligned} S &= \int_2^5 (x+1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^5 \\ &= \frac{5^2 - 2^2}{2} + (5-2) \\ &= \frac{21}{2} - 3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(2) 求める面積は右図の斜線部分になるので、定積分を用いて次のように求めることができます。




$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (-x^2+4)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1^3 - (-1)^3}{3} + 4\{1-(-1)\} \\ &= -\frac{2}{3} + 8 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

## 3.2 放物線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積

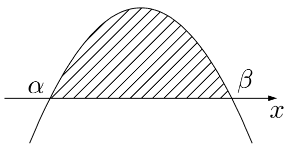
放物線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めるには、次のような手順で求めることができます。

( i ) 放物線をかく。

(ii) 放物線 $y = f(x)$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標を求める。
　$f(x) = 0$ として 2 次方程式の解（$\alpha$ と $\beta$）を求めます。

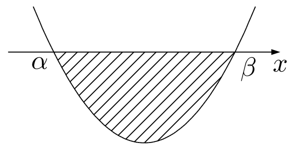
(iii) 定積分を計算して面積 $S$ を求める。

① $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $f(x) \geqq 0$




$$S = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

② $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $f(x) \leqq 0$




$$S = \int_\alpha^\beta \{-f(x)\}\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

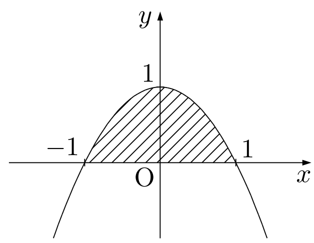
【例題 3 − 2】

次の放物線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めなさい。

(1) $y = -x^2 + 1$　　(2) $y = x(x - 4)$

＜解説＞

(1) $y = -x^2 + 1$ のグラフは右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分になります。このとき、$x$ 軸との交点の $x$ 座標は、

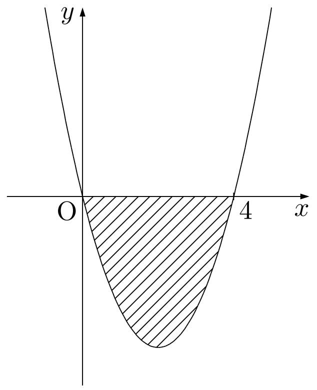



$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1^3 - (-1)^3}{3} + \{1 - (-1)\} \\ &= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(2) $y = x(x-4)$ のグラフは右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分になります。このとき、$x$ 軸との交点の $x$ 座標は、

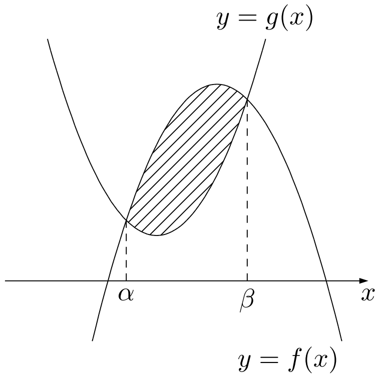



$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0,\ 4$$

となるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^4 x(x-4)\,dx = -\int_0^4 (x^2-4x)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 \\ &= -\left\{\frac{4^3-0^3}{3} - 2(4^2-0^2)\right\} \\ &= -\left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

## 3.3　2 曲線間の面積




右の図のような $y=f(x)$ と $y=g(x)$ という 2 つの曲線に囲まれた部分の面積（図の斜線部分）を求めるには、次のような手順で求めることができます。

(i) 2 曲線のグラフをかく。

(ii) 2 曲線の交点の $x$ 座標を求める。
$f(x)=g(x)$ として $x$ についての方程式を作り、その解 $x=\alpha,\ \beta$ を求めます。

(iii) 定積分を計算して面積 $S$ を求める。
$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $f(x) \geqq g(x)$

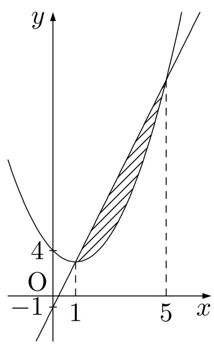
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

【例題 3 − 3】

次の曲線または直線によって囲まれる部分の面積を求めなさい。

(1) $y=x^2-2x+4,\ y=4x-1$　　(2) $y=x^2-x+1,\ y=-x^2+5x-3$

<解説>



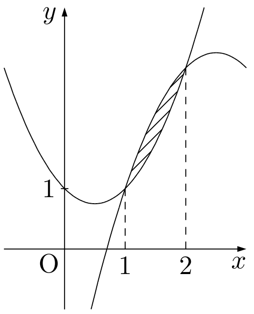

(1) $y=x^2-2x+4$ と $y=4x-1$ のグラフは右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分になります。このとき、2 曲線の交点の $x$ 座標は、

$$\begin{aligned} x^2-2x+4&=4x-1\\ x^2-6x+5&=0\\ (x-1)(x-5)&=0\\ x&=1,\ 5 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^5\{(4x-1)-(x^2-2x+4)\}\,dx &= -\int_1^5(x^2-6x+5)\,dx\\ &=-\left[\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+5x\right]_1^5\\ &=-\left\{\frac{5^3-1^3}{3}-3(5^2-1^2)+5(5-1)\right\}\\ &=-\left(\frac{124}{3}-72+20\right)=\frac{32}{3} \end{aligned}$$

(2) $y = x^2 - x + 1$ と $y = -x^2 + 5x - 3$ のグラフは右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分になります。このとき、2 曲線の交点の $x$ 座標は、




$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= -x^2 + 5x - 3 \\ 2x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x &= 1,\ 2 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{(-x^2 + 5x - 3) - (x^2 - x + 1)\}\,dx &= -2\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx \\ &= -2\left[\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 \\ &= -2\left\{\frac{2^3 - 1^3}{3} - \frac{3(2^2 - 1^2)}{2} + 2(2-1)\right\} \\ &= -2\left(\frac{7}{3} - \frac{9}{2} + 2\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## 3.4 1/6 公式

定積分や面積を求めるときによく使われる、

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

という公式は次のように導出することができます。

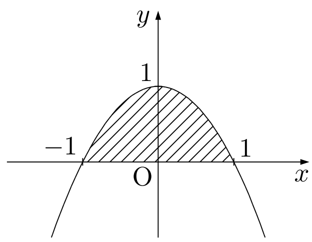
$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{x^2}{2}+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)}{3}-\frac{(\alpha+\beta)^2(\beta-\alpha)}{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2)\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

【例題 3 − 4】

1. 次の放物線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めなさい。
   (1) $y=-x^2+1$ (2) $y=x(x-4)$
2. 次の曲線または直線によって囲まれる部分の面積を求めなさい。
   (1) $y=x^2-2x+4,\ y=4x-1$ (2) $y=x^2-x+1,\ y=-x^2+5x-3$

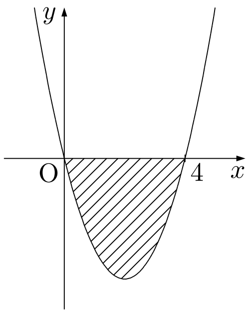
＜解説＞

1. (1) $y=-x^2+1$ のグラフをかくと右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分。このことから、



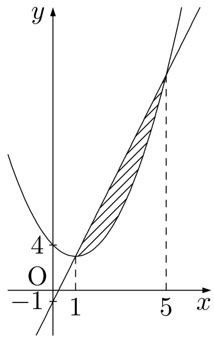

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx\\&=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx\\&=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx\\&=-\frac{-1}{6}\{1-(-1)\}^3\\&=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(2) $y = x(x-4)$ のグラフをかくと右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分。このことから、




$$\begin{aligned} S &= -\int_0^4 x(x-4)\,dx \\ &= -\frac{-1}{6}(4-0)^3 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 4^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

2. (1) $y = x^2 - 2x + 4$ と $y = 4x - 1$ のグラフをかくと右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分。また、2 曲線の交点の $x$ 座標は、

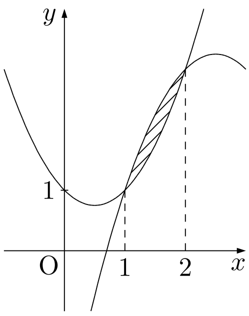



$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4 &= 4x - 1 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-1)(x-5) &= 0 \\ x &= 1,\ 5 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^5 \{(4x-1)-(x^2-2x+4)\}\,dx &= -\int_1^5 (x-1)(x-5)\,dx \\ &= -\frac{-1}{6}(5-1)^3 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 4^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(2) $y = x^2 - x + 1$ と $y = -x^2 + 5x - 3$ のグラフをかくと右図のようになるので、求める面積は図の斜線部分。また、2 曲線の交点の $x$ 座標は、




$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= -x^2 + 5x - 3 \\ 2x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x &= 1,\ 2 \end{aligned}$$

となるので、求める面積は、

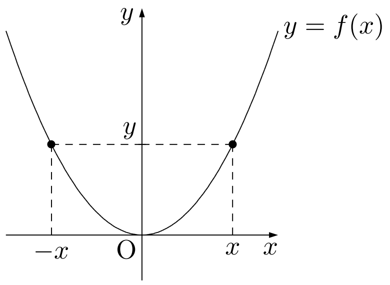
$$\begin{aligned} \int_1^2 \{(-x^2+5x-3)-(x^2-x+1)\}\,dx &= -2\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx \\ &= -2\cdot\frac{-1}{6}(2-1)^2 \\ &= \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## 3.5　偶関数・奇関数と定積分

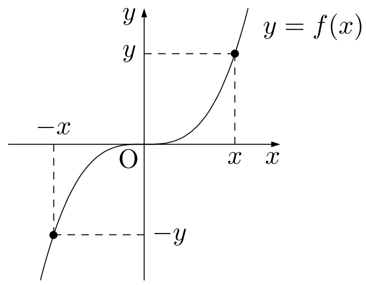
$y = x^2$, $y = x^4$, $\cdots$, $y = x^{2n}$, $y = \cos\theta$ のように、$f(-x) = f(x)$ が成り立つ関数を偶関数といい、偶関数のグラフは $y$ 軸に関して対称になります。

また、$y = x$, $y = x^3$, $\cdots$, $y = x^{2n-1}$, $y = \sin\theta$, $y = \tan\theta$ のように、$f(-x) = -f(x)$ が成り立つ関数を奇関数といい、奇関数のグラフは原点に関して対称になります。

(i) 偶関数 $f(x)$




(ii) 奇関数 $f(x)$

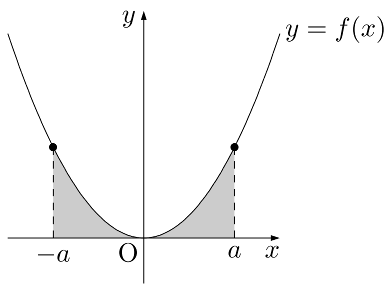



$f(x)$ が偶関数であるとき、偶関数のグラフは $y$ 軸に関して対称になるので、

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

となります。このことから、次の関係が成り立ちます。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

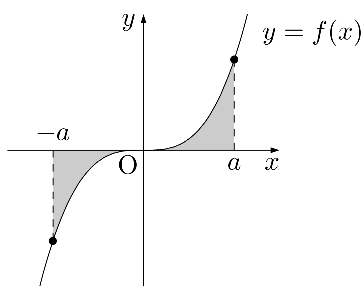



また、$f(x)$ が奇関数であるとき、奇関数のグラフは原点に関して対称になるので、

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

となります。このことから、次の関係が成り立ちます。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$




【例題 3 − 5】

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x - 3)\,dx$

<解説>

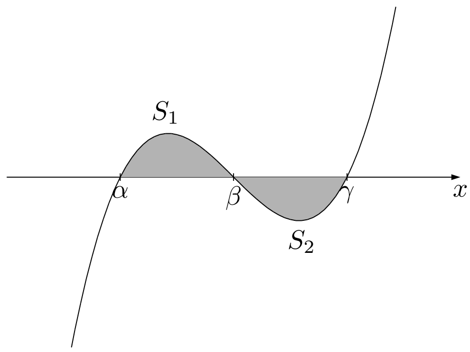
(1)

$$\int_{-2}^{2} x^5\,dx = 0$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(x^2-2x-3)\,dx &= \int_{-1}^{1}x^2\,dx - 2\int_{-1}^{1}x\,dx - 3\int_{-1}^{1}dx \\
&= 2\int_{0}^{1}x^2\,dx - 3\cdot 2\int_{0}^{1}dx \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[x\right]_0^1 \\
&= 2\cdot\frac{1^3-0^3}{3} - 6(1-0) \\
&= \frac{2}{3} - 6 = -\frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

## 3.6　3 次曲線と $x$ 軸の間の面積




右の図のような 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフ（3 次曲線）と $x$ 軸の間の面積を求めるには、次のような手順で求めることができます。

( i ) 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフ（3 次曲線）をかく。
(ii) $f(x)=0$ として、3 次曲線と $x$ 軸の交点の $x$ 座標（$x=\alpha$, $\beta$, $\gamma$）を求める。
(iii) 定積分を計算して面積 $S$ を求める。

$$
\begin{aligned}
S &= S_1+S_2 \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} \{-f(x)\}\,dx
\end{aligned}
$$

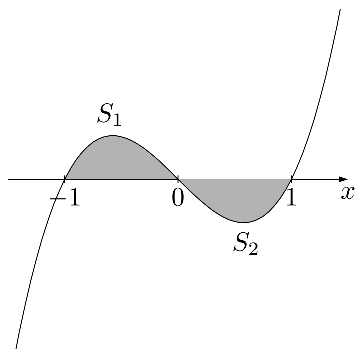
【例題 3 − 6】

次の曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

(1) $y=x(x+1)(x-1)$　　　(2) $y=x^2(x-2)$

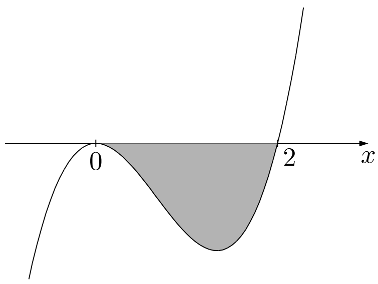
＜解説＞

(1) 求める面積 $S$ は右図の色のついた部分になるので、




$$
\begin{aligned}
S &= S_1+S_2 \\
&= \int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx + \int_{0}^{1} \{-(x^3-x)\}\,dx \\
&= -\int_{0}^{-1} (x^3-x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3-x)\,dx \\
&= -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{-1} - \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{1} \\
&= -\left\{\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right\} - \left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

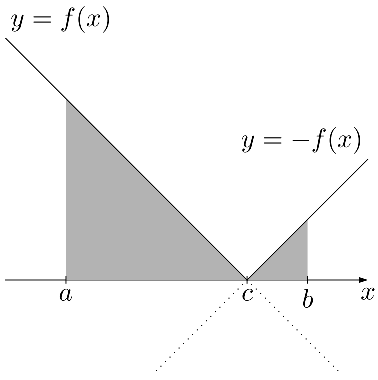
(2) 求める面積 $S$ は右図の色のついた部分になるので、




$$
\begin{aligned}
S &= -\int_{0}^{2} (x^3-2x^2)\,dx \\
&= -\left[\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{2} \\
&= -\left(\frac{2^4}{4}-2\cdot\frac{2^3}{3}\right) \\
&= -16\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) \\
&= -16\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

## 3.7　絶対値のついた関数の定積分

定積分においても絶対値記号がついたままでは計算できないので、絶対値記号の中身が正か負かによって次のように絶対値記号をはずすことになります。




$$|\,f(x)\,| = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x) \leqq 0) \end{cases}$$

このとき、$f(x) = 0$ となる $x$ で正・負が変わることになるので、その値（$x = c$）を求めることで次のように定積分を行います。

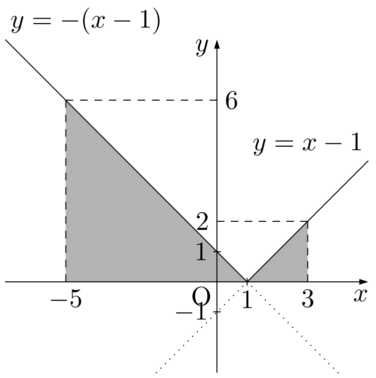
$$\begin{aligned} \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx &= \int_a^c |\,f(x)\,|\,dx + \int_c^b |\,f(x)\,|\,dx \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \{-f(x)\}\,dx \end{aligned}$$

【例題 3 − 7】

次の定積分の値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-5}^{3} |\,x-1\,|\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |\,x^2-4\,|\,dx$

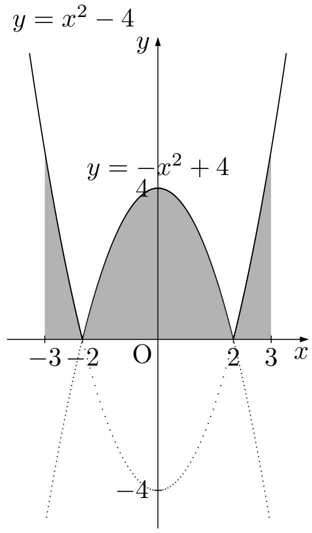
<解説>




(1) $x - 1 = 0$ より、$x = 1$ において $x - 1$ の値の正・負が入れ替わることになるので、

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{3} |\,x-1\,|\,dx &= \int_{-5}^{1} |\,x-1\,|\,dx + \int_{1}^{3} |\,x-1\,|\,dx \\ &= -\int_{-5}^{1} (x-1)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-5}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} \\ &= -\left(\frac{-24}{2} - 6\right) + \left(\frac{8}{2} - 2\right) \\ &= 18 + 2 = 20 \end{aligned}$$

(2) $x^2-4=0$ より、$x=\pm 2$ のとき $x^2-4$ の値の正・負が入れ替わることになります。さらに、求める定積分の値は右図の色のついた部分の面積を求めることになりますが、求める面積は $y$ 軸に関して対称になっているので、$x \geqq 0$ の部分の面積を求め、それを 2 倍すればよいことになります。




$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}|\,x^2-4\,|\,dx &= 2\int_0^2(-x^2+4)\,dx+2\int_2^3(x^2-4)\,dx\\ &= 2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2+2\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3\\ &= 2\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right)+2\left\{\frac{3^3-2^3}{3}-4(3-2)\right\}\\ &= 2\left(-\frac{8}{3}+8+\frac{19}{3}-4\right)=\frac{46}{3}\end{aligned}$$