【数学 II】指数関数と対数関数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　指数の拡張

1.1　指数法則（整数）

n を自然数とするとき、a を n 個掛け合わせたものを a の n 乗といい、a^n と表します。このとき、n を指数といい、a を底といいます。m, n が自然数のとき、

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　② $(a^m)^n = a^{mn}$　　③ $(ab)^n = a^n b^n$

という指数法則が成り立つことをすでに学習していますが、m, n が 0 や負の整数であっても成り立つように、次のように定めます。

(i) $n = 0$ のとき

$$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$$

より、$a^0 = 1$

(ii) $n = -m$ のとき

$$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$$

より、$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

これにより、

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= a^m \times \frac{1}{a^n} \\ &= a^m \times a^{-n} \\ &= a^{m+(-n)} = a^{m-n} \end{aligned}$$

という法則も成り立ちます。

【例題 1 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $2^3 \times 2^5 \div 2^6$　　(2) $10^4 \div 5^2 \times 2^{-3}$　　(3) $(a^2b)^3 \times (a^3b^{-1})^{-2}$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^5 \div 2^6 &= 2^3 \times 2^5 \times 2^{-6} \\ &= 2^{3+5-6} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

(2) 底をそろえて指数法則を利用します。

$$\begin{aligned} & 10^4 \div 5^2 \times 2^{-3} \\ =& (2 \times 5)^4 \times 5^{-2} \times 2^{-3} \\ =& 2^4 \times 5^4 \times 5^{-2} \times 2^{-3} \\ =& 2^{4-3} \times 5^{4-2} \\ =& 2 \times 5^2 = 50 \end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(a^2b)^3 \times (a^3b^{-1})^{-2} &= a^{2\times 3}b^3 \times a^{3\times(-2)}b^{(-1)\times(-2)} \\
&= a^6b^3 \times a^{-6}b^2 \\
&= (a^6 \times a^{-6}) \times (b^3 \times b^2) \\
&= a^{6+(-6)} \times b^{3+2} \\
&= a^0b^5 = b^5
\end{aligned}
$$

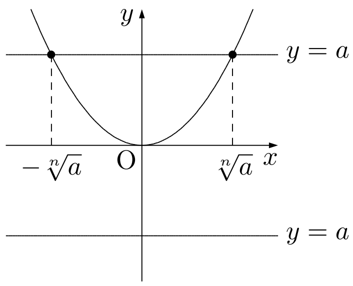
1.2　累乗根

2 乗すると a になる数のことを a の 2 乗根（平方根）といい、$\sqrt{a}$（ルート a、平方根 a）で表します。同様に、3 乗すると a になる数のことを a の 3 乗根（立方根）といい、$\sqrt[3]{a}$（3 乗根 a、立方根 a）で表します。このようにして、n を自然数とするとき、n 乗して a になる数を a の n **乗根**といい、$\sqrt[n]{a}$（n 乗根 a）で表します。そして、2 乗根、3 乗根などいろいろな自然数 n についての n 乗根をまとめて**累乗根**といいます。

実数 a の n 乗根は、方程式 $x^n = a$ の解になります。方程式 $x^n = a$ の解を図（グラフ）で考えると、曲線 $y = x^n$ と直線 $y = a$ の共有点の x 座標になります。曲線 $y = x^n$ のグラフは n によって、次のような形になるので、直線 $y = a$ の共有点の x 座標から、a の n 乗根は次のように考えることができます。

(i) n が偶数のとき　$(y = x^2, y = x^4, \cdots)$

曲線 $y = x^n$ は y 軸について対称なグラフになります。



① $a > 0$ のとき

曲線 $y = x^n$ と直線 $y = a$ とは 2 つの共有点を持つので、a の n 乗根は 2 つあることになり、正のものを $\sqrt[n]{a}$、負のものを $-\sqrt[n]{a}$ で表します。

② $a = 0$ のとき

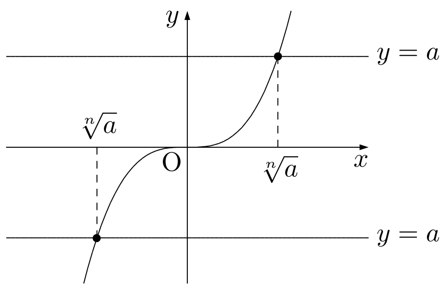
曲線 $y = x^n$ と直線 $y = a$ は 1 つの共有点を持つ（接する）ので、a の n 乗根は 1 つで、$\sqrt[n]{0} = 0$ と表さます。

③ $a < 0$ のとき

曲線 $y = x^n$ と直線 $y = a$ は共有点を持ちません。そのため、a の n 乗根は存在しません。

(ii) n が奇数のとき　$(y = x, y = x^3, \cdots)$

曲線 $y = x^n$ は、原点に関して対称なグラフになります。そのため、曲線 $y = x^n$ と直線 $y = a$ は必ず 1 つの共有点を持つので、a の符号に関係なく、a の n 乗根はただ 1 つだけ存在し、$\sqrt[n]{a}$ で表します。



【例題 1 − 2】

次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt[3]{216}$　　(2) $\sqrt[3]{-216}$　　(3) $\sqrt[3]{-27}$　　(4) $\sqrt[4]{16}$

＜解説＞

(1) 3 乗して 216 になる数を考えるので、$6^3 = 216$ より、

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

(2) 3 乗して -216 になる数を考えるので、$(-6)^3 = -216$ より、

$$\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6$$

(3) 3 乗して -27 になる数を考えるので、$(-3)^3 = 27$ より、

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

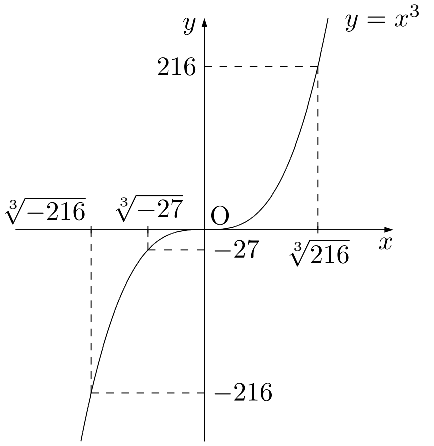
(4) 4 乗して 16 になる数を考えるので、

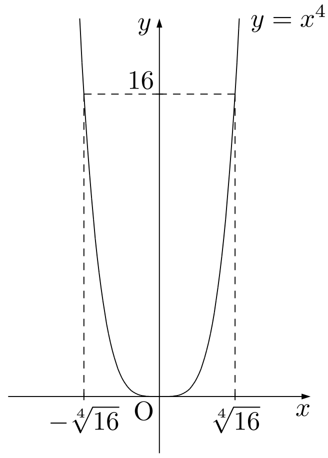
$$2^4 = 16, \qquad (-2)^4 = 16$$

ただし、$\sqrt[4]{16}$ 数のうち「正のもの」であるので、

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

また、$y = x^3$, $y = x^4$ をグラフにすると次のようになるので、答えの参考にしてください。





1.3 累乗根の性質

$a>0,\ b>0$ で、$m,\ n$ は自然数であるとすると、

$$\sqrt[n]{a}>0,\qquad \sqrt[n]{b}>0$$

となります。このとき、累乗根において次のような性質が成り立ちます。

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ を n 乗すると、

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\times(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

となることから、$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は、「ab の n 乗根のうち正のもの」であることがわかります。よって、

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)$ を n 乗すると、

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

となることから、$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ は、「$\dfrac{a}{b}$ の n 乗根のうち正のもの」であることがわかります。よって、

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

$(\sqrt[n]{a})^m$ を n 乗すると、

$$\begin{aligned}\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n&=(\sqrt[n]{a})^{mn}\\&=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m\end{aligned}$$

となることから、$(\sqrt[n]{a})^m$ は、「a^m の n 乗根のうち正のもの」であることがわかります。よって、

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ を mn 乗すると、

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}&=\left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n\\&=(\sqrt[n]{a})^n=a\end{aligned}$$

となることから、$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ は、「a の mn 乗根のうち正のもの」であることがわかります。よって、

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

【例題１－３】

次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{9}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$

(3) $(\sqrt[6]{25})^3$

(4) $\sqrt{\sqrt{81}}$

＜解説＞

累乗根の性質から、

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{81 \times 9} \\ &= \sqrt[3]{9^3} = 9\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} &= \sqrt[4]{\frac{48}{3}} \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= \sqrt[4]{2^4} = 2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sqrt[6]{25})^3 &= \sqrt[6]{25^3} \\ &= \sqrt[6]{(5^2)^3} \\ &= \sqrt[6]{5^6} = 5\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{81}} &= \sqrt[2\times 2]{81} \\ &= \sqrt[4]{3^4} = 3\end{aligned}$$

1.4 有理数の指数

指数が有理数のとき、つまり、$a>0,\ b>0$ とし、$r,\ s$ を有理数としたとき、指数法則
① $a^r \times a^s = a^{r+s}$ ② $a^r \div a^s = a^{r-s}$ ③ $(a^r)^s = a^{rs}$ ④ $(ab)^r = a^r b^r$
が成り立つとします。

このとき、$m,\ n$ を自然数とすると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

となることから、$a^{\frac{m}{n}}$ は、a^m の n 乗根のうち正のものを表します。つまり、

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

という関係が成り立つことになるので、

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

と定めます。さらに、

$$a^r \times a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1$$

となることから、

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

と定めます。

【例題 1 − 4】

次の値を a^r の形に表しなさい。

(1) $\sqrt[3]{a}$ (2) $\sqrt[5]{a^3}$ (3) $\sqrt[6]{a^{-5}}$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$

＜解説＞

(1) 指数の定義から、

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

(2) 指数の定義から、

$$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$$

また、指数法則を用いて、

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{a^3} &= (a^3)^{\frac{1}{5}} \\ &= a^{3\times\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

と考えることもできます。

(3) 指数の定義から、

$$\sqrt[6]{a^{-5}} = a^{-\frac{5}{6}}$$

また、指数法則を用いて、

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{a^{-5}} &= (a^{-5})^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{-5\times\frac{1}{6}} = a^{-\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

と考えることもできます。

(4) 指数の定義から、

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} = a^{-\frac{4}{3}}$$

また、指数法則を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} &= \frac{1}{(a^4)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{-\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

と考えることもできます。

1.5 指数法則（有理数）

【例題１－５】

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^5} \div \sqrt{a}$

(2) $\sqrt{a} \div \sqrt[6]{a} \times \sqrt[3]{a^2}$

(3) $(\sqrt[3]{b^2})^2 \times \sqrt[6]{b^4}$

(4) $\sqrt[12]{x^5y^6} \times \sqrt[12]{x^9y^4} \div \sqrt[6]{xy^{-1}}$

＜解説＞

指数法則を用いて、次のように計算することができます。

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^5} \div \sqrt{a} &= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{a} \div \sqrt[6]{a} \times \sqrt[3]{a^2} &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{6}} \times a^{\frac{2}{3}} \\ &= a^{\frac{3}{6}-\frac{1}{6}+\frac{4}{6}} \\ &= a\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{b^2})^2 \times \sqrt[6]{b^4} &= (b^{\frac{2}{3}})^2 \times b^{\frac{4}{6}} \\ &= b^{\frac{2}{3}\times 2} \times b^{\frac{2}{3}} \\ &= b^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{2}{3}} \\ &= b^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = b^2\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\sqrt[12]{x^5y^6} \times \sqrt[12]{x^9y^4} \div \sqrt[6]{xy^{-1}} \\ =&(x^5y^6)^{\frac{1}{12}} \times (x^9y^4)^{\frac{1}{12}} \times (xy^{-1})^{-\frac{1}{6}} \\ =&x^{\frac{5}{12}}y^{\frac{6}{12}} \times x^{\frac{9}{12}}y^{\frac{4}{12}} \times x^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} \\ =&x^{\frac{5}{12}+\frac{9}{12}-\frac{2}{12}}y^{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}} \\ =&xy\end{aligned}$$

2　指数関数

2.1　指数関数のグラフ

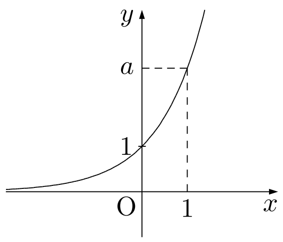
a を 1 と異なる正の定数とするとき、$y = a^x$ を、a を底とする x の**指数関数**といいます。このとき、x は実数になりますが、$a > 0,\ b > 0$ で、$x,\ y$ が実数であるときも、有理数の範囲において成り立った指数法則は、次のように成り立ちます。

① $a^x \times a^y = a^{x+y}$　② $a^x \div a^y = a^{x-y}$　③ $(a^x)^y = a^{xy}$　④ $(ab)^x = a^x b^x$

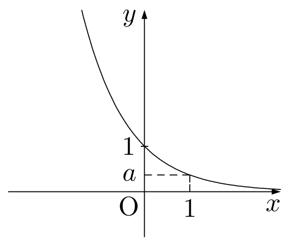
一般的に、$y = a^x$ のグラフは次のような特徴を持ったグラフになります。

① a によらず点 $(0,\ 1)$ を必ず通る
② $a > 1$ ならば増加関数 (x が増加すると y も増加) になり、$0 < a < 1$ な r ば減少関数（x が増加すると y は減少）になる
③ x 軸を漸近線にもつ
④ 値域は $y > 0$

(i) $a > 1$ のとき



(ii) $0 < a < 1$ のとき



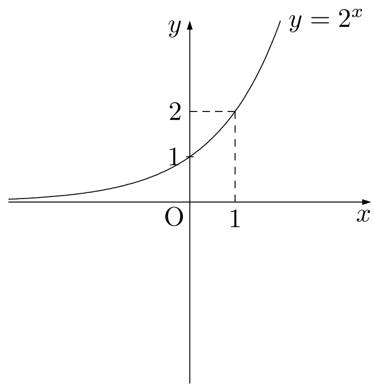
【例題 2 − 1】

$y = 2^x$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = 2^{-x}$

(2) $y = -2^x$

(3) $y = 2^{x+1}$



＜解説＞

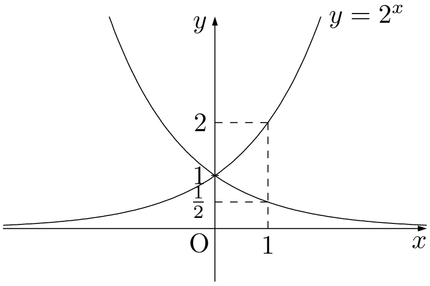
(1) $y = 2^{-x}$ は、

$$y = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

と表され、x と y の対応表を作ると次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
2^x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
2^{-x}	$\cdots$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$

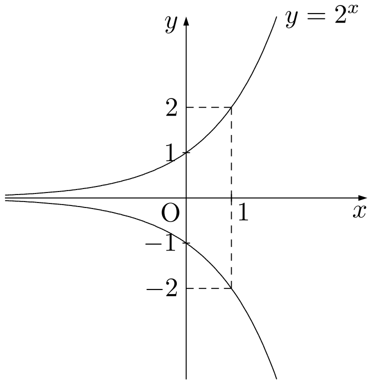
このことから、$y = 2^{-x}$ のグラフは、$y = 2^x$ のグラフを y 軸に関して対称にしたものになります。



(2) x と y の対応表を作ると次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
2^x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
-2^x	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	$\cdots$

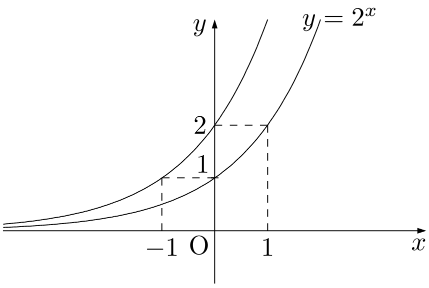
このことから、$y = -2^x$ のグラフは、$y = 2^x$ のグラフを x 軸に関して対称にしたものになります。



(3) x と y の対応表を作ると次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
2^x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
2^{x+1}	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$

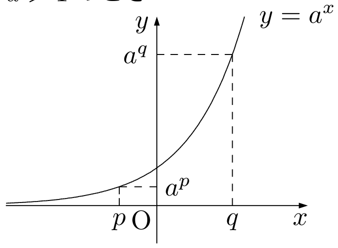
このことから、$y = 2^{x+1}$ のグラフは、$y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものになります。



2.2 累乗根の大小

指数関数のグラフから、次の関係が成り立ちます。

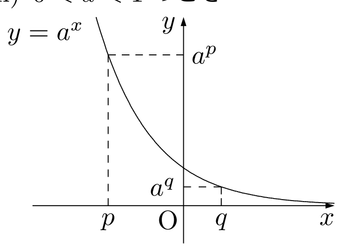
(i) $a > 1$ のとき



$y = a^x$ は増加関数になるので、

$$p < q \Longleftrightarrow a^p < a^q$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき



$y = a^x$ は減少関数になるので、

$$p < q \Longleftrightarrow a^p > a^q$$

【例題２－２】

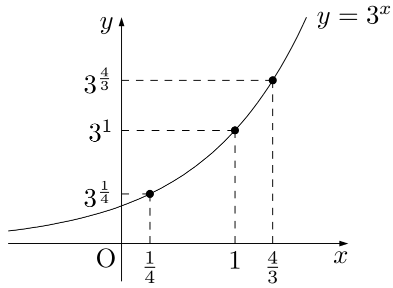
次の各組の数の大小を比べなさい。

(1) $\sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{81},\ 3$　　　(2) $\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}},\ 1$

<解説>

(1) それぞれの数を、底を 3 にそろえて表すと次のようになります。

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}, \qquad 3 = 3^1$$



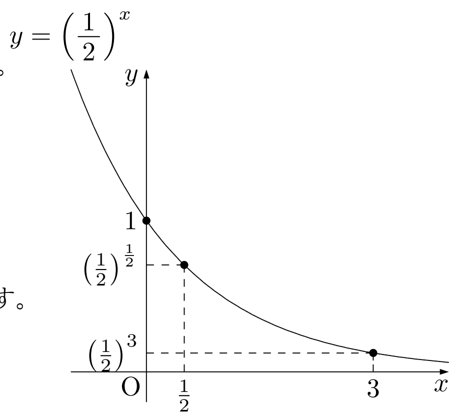
$y = 3^x$ は増加関数であるので、右のようなグラフになります。このことから、$\dfrac{1}{4} < 1 < \dfrac{4}{3}$ のとき、

$$3^{\frac{1}{4}} < 3^1 < 3^{\frac{4}{3}}$$

となるので、

$$\sqrt[4]{3} < 3 < \sqrt[3]{81}$$

(2) それぞれの数を、底を $\dfrac{1}{2}$ にそろえて表すと次のようになります。



- $\dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{2}{4}}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
- $1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は減少関数であるので、右のようなグラフになります。このことから、$0 < \dfrac{1}{2} < 3$ のとき、

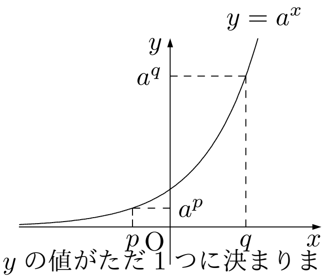
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

となるので、

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt[4]{4}} < 1$$

また、底を 2 にそろえても同じようにして考えることができます。

2.3 指数方程式



指数に文字を含むような方程式を**指数方程式**といいます。

指数関数 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$ は増加関数であるので、そのグラフは右図のようになり、

$$p < q \Longleftrightarrow a^p < a^q$$

という関係が成り立ちますが、指数関数は関数であるので、x の値を決めれば、y の値がただ 1 つに決まります。このことから、

$$p = q \Longleftrightarrow a^p = a^q$$

という関係が成り立ち、この性質を利用して指数方程式を解くことができます。

【例題 2 − 3】

次の方程式を解きなさい。

(1) $2^{1+x} = 8^x$　　(2) $9^{x-1} = 3^{-2x}$

<解説>

(1) 底を 2 にそろえます。

$$\begin{aligned} 2^{1+x} &= 8^x \\ 2^{1+x} &= (2^3)^x \\ 2^{1+x} &= 2^{3x} \\ 1 + x &= 3x \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 底を 3 にそろえます。

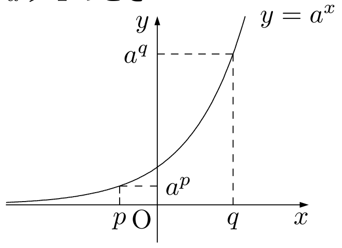
$$\begin{aligned} 9^{x-1} &= 3^{-2x} \\ (3^2)^{x-1} &= 3^{-2x} \\ 3^{2(x-1)} &= 3^{-2x} \\ 2(x-1) &= -2x \\ x - 1 &= -x \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.4 指数不等式

指数に文字を含む不等式を**指数不等式**といいます。

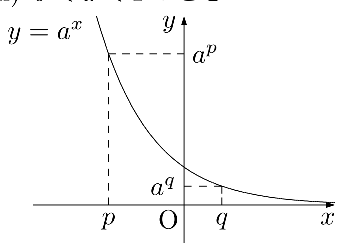
指数関数 $y = a^x$ は次の関係が成り立つので、その性質を利用することで指数不等式を解くことができます。

(i) $a > 1$ のとき



$$p < q \iff a^p < a^q$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき



$$p < q \iff a^p > a^q$$

【例題 2 − 4】

次の不等式を解きなさい。

(1) $2^x > 64$　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqq \dfrac{1}{81}$　(3) $2^x < 1024$

＜解説＞

(1) 底を 2 にそろえます。

$$2^x > 64$$
$$2^x > 2^6$$
$$x > 6$$

(2) 底を $\dfrac{1}{3}$ にそろえます。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqq \frac{1}{81}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^4$$
$$x \geqq 4$$

また、底を 3 にそろえても解くことができます。

$$3^{-x} \leqq 3^{-4}$$
$$-x \leqq -4$$
$$x \geqq 4$$

(3) 底を 2 にそろえます。

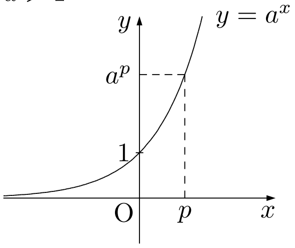
$$2^x < 1024$$
$$2^x < 2^{10}$$
$$x < 10$$

3　対数関数

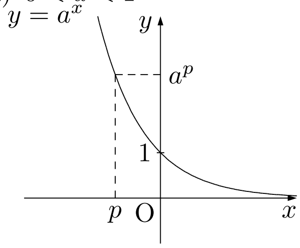
3.1　対数の定義

$a>0$、$a \neq 1$ とすると、$y=a^x$ のグラフは次のようになりました。

(i) $a>1$



(ii) $0<a<1$



このことから、任意の正の数 N を 1 つ定めると、$N=a^p$ を満たす実数 p がただ 1 つ定まることになり、この p を、対数を表す英単語「logarithm」を用いて $\log_a N$（ログ a, N）と表し、a を**底**とする N の**対数**といいます。つまり、$a>0$, $a \neq 1$, $N>0$ とすると、

$$a^p = N \quad \Longleftrightarrow \quad p=\log_a N$$

という関係になります。また、この N を $\log_a N$ の**真数**といいます。

【例題 3 − 1】

1. 次の等式を $\log_a R = r$ の形に書きなさい。
   (1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$　(3) $10^3=1000$

2. 次の等式を $a^r=R$ の形に書きなさい。
   (1) $\log_2 8=3$　(2) $\log_4 32=\frac{5}{2}$　(3) $\log_{16}\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

＜解説＞

1. 対数の定義より、
   (1) $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$　(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4$　(3) $\log_{10}1000=3$

2. 対数の定義より、
   (1) $2^3=8$　(2) $4^{\frac{5}{2}}=32$　(3) $16^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

3.2 対数の法則

$M>0,\ N>0,\ a>0,\ a\fallingdotseq 1,\ m,\ n$ を実数とすると、次の関係が成り立ちます。

$$M=a^m \Longleftrightarrow \log_a M=m, \qquad N=a^n \Longleftrightarrow \log_a N=n$$

この関係を利用して指数法則を対数を用いて書き表すと、次のような対数に関する計算法則（対数法則）を導くことができます。

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n} \\ MN &= a^{m+n} \\ \log_a MN &= m+n \\ &= \log_a M+\log_a N \end{aligned}$$

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ \frac{M}{N} &= a^{m-n} \\ \log_a \frac{M}{N} &= m-n \\ &= \log_a M-\log_a N \end{aligned}$$

③ $\log_a M^n=n\log_a M$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= a^{mn} \\ M^n &= a^{mn} \\ \log_a M^n &= mn \\ \log_a M^n &= n\log_a M \end{aligned}$$

また、指数の定義から、対数にも次のような特徴があり、このような性質も計算をするときに利用されます。

(i) $\log_a a=1$

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ \log_a a &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $\log_a 1=0$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $\log_a \dfrac{1}{a}=-1$

$$\begin{aligned} a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ \log_a \frac{1}{a} &= -1 \end{aligned}$$

【例題 3 − 2】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\log_2 \dfrac{7}{6}+\log_2 \dfrac{48}{7}$

(2) $\dfrac{\log_5 32}{\log_5 4}$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_3 25-\log_3 15$

(4) $\log_3 \sqrt[5]{81}$

<解説>

指数法則を用いて指数の計算を行うときには、底をそろえる必要がありましたが、指数法則から導き出された対数法則を利用するときも、底をそろえる必要があります。そのため、対数の計算をするときには底がそろっているのかをチェックし、そろっていなかったらまずは底をそろえることを心がけてください。

(1)

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{7}{6} + \log_2 \frac{48}{7} &= \log_2 \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{48}{7}\right) \\ &= \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 = 3\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\log_5 32}{\log_5 4} &= \frac{\log_5 2^5}{\log_5 2^2} \\ &= \frac{5\log_5 2}{2\log_5 2} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_3 25 - \log_3 15 &= \log_3 (5^2)^{\frac{1}{2}} - \log_3 15 \\ &= \log_3 5^{2\times\frac{1}{2}} - \log_3 15 \\ &= \log_3 \frac{5}{15} = -1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\log_3 \sqrt[5]{81} &= \log_3 \sqrt[5]{3^4} \\ &= \log_3 3^{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

3.3 底の変換公式

$M>0,\ a>0,\ a\fallingdotseq 1,\ b>0,\ b\fallingdotseq 1,\ m$ を実数とし、

$$a^m = M \iff \log_a M = m$$

とします。ここで、$a^m = M$ の両辺に b を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned}
\log_b a^m &= \log_b M \\
m\log_b a &= \log_b M \\
m &= \frac{\log_b M}{\log_b a} \\
\log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a}
\end{aligned}$$

と変形することができ、a を底とする対数を、b という別の底の対数に変換できることを示しています。対数法則は底が同じでないと使うことができないので、この底の変換公式を利用することで異なる底をそろえることができ、対数法則が使える形に変形できます。

【例題 3 − 3】

$\log_{10} 2 = a,\ \log_{10} 3 = b$ とするとき、次の式を $a,\ b$ で表しなさい。

(1) $\log_3 2$　　(2) $\log_6 2$　　(3) $\log_4 54$

<解説>

$a,\ b$ は 10 を底とする対数で表されているので、与えられた式の底を 10 に変換します。

(1)

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{a}{b}$$

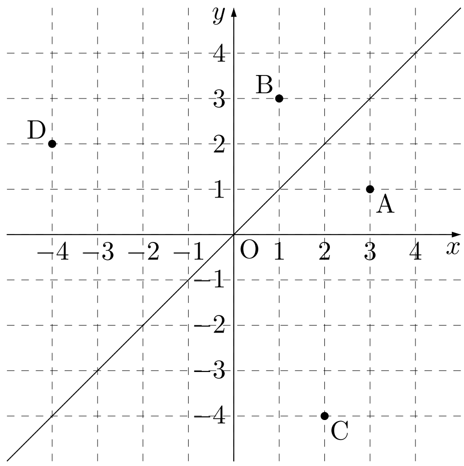
(2)

$$\begin{aligned}
\log_6 2 &= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 6} \\
&= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(2\times 3)} \\
&= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} \\
&= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\log_4 54 &= \frac{\log_{10} 54}{\log_{10} 4} \\
&= \frac{\log_{10}(2 \times 3^3)}{\log_{10} 2^2} \\
&= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3^3}{2\log_{10} 2} \\
&= \frac{\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} \\
&= \frac{a+3b}{2a}
\end{aligned}$$

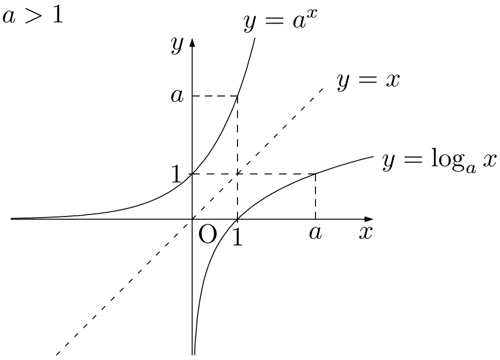
3.4　対数関数のグラフ



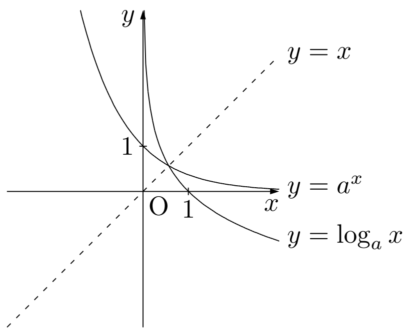
a を $a > 0$、$a \fallingdotseq 1$ を満たす定数とするとき、$y = \log_a x$（ただし、$x > 0$）で表される x の関数を、**a を底とする x の対数関数**といいます。この対数関数は、$x = a^y$ と変形することができ、指数関数 $y = a^x$ の x と y を入れ替えたものであることがわかります。

右図の A(3, 1) と B(1, 3)、C(2, −4) と D(−4, 2) のように、点 $(x,\ y)$ とその x, y を入れ替えた点 $(y,\ x)$ は、直線 $y = x$ に関して対称になります。そのため、x と y を入れ替えた関係になっている対数関数と指数関数のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称になります。

(i)　$a > 1$



(ii)　$0 < a < 1$



【指数関数 $y = a^x$ のグラフ】

①　a によらず点 $(0,\ 1)$ を必ず通る

②　$a > 1$ のとき増加関数

　　$0 < a < 1$ のとき減少関数

③　x 軸を漸近線にもつ

④　定義域は実数全体、値域は $y > 0$

【対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ】

①　a によらず点 $(1,\ 0)$ を通る

②　$a > 1$ のとき増加関数

　　$0 < a < 1$ のとき減少関数

③　y 軸を漸近線にもつ

④　定義域は $x > 0$、値域は実数全体

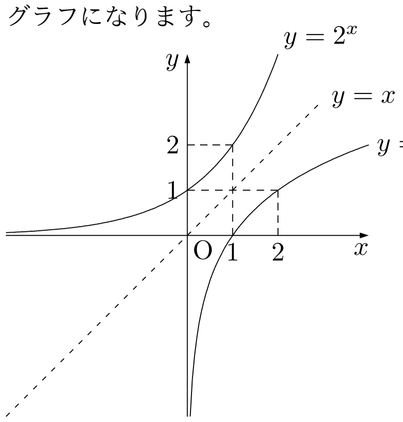
【例題 3 − 4】

次の関数のグラフをかきなさい。

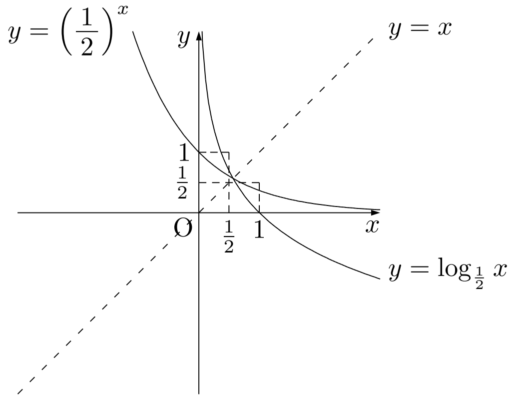
(1)　$y = \log_2 x$　　　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

＜解説＞

(1) 底は 2 で 1 よりも大きいので $y=\log_2 x$ は増加関数になり、そのグラフは、点 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$ を通ります。また、y 軸が漸近線になるので次のようなグラフになります。



(2) 底は $\dfrac{1}{2}$ で 1 よりも小さいので $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ は減少関数になり、そのグラフは、点 $(1,\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通ります。また、y 軸が漸近線になるので次のようなグラフになります。



また、底の変換公式を利用して底を 2 にすると、

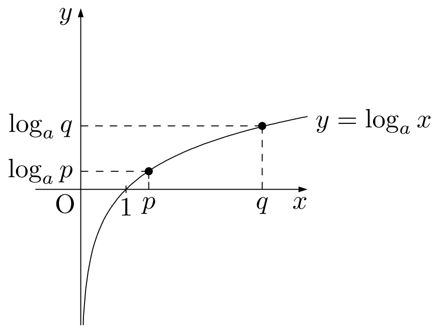
$$\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x$$

と変形でき、この式から、$y=\log_2 x$ のグラフと x 軸に関して対称な関係になっていることがわかります。

3.5 対数の大小

$y = \log_a x$ のグラフから、$0 < p < q$ における対数の大小関係は次のようになります。

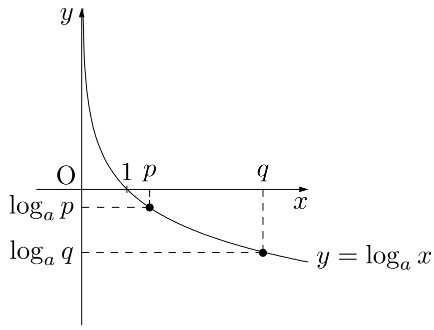
(i) $a > 1$



$$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$$

真数の大小と対数の大小は一致

(ii) $0 < a < 1$



$$0 < p < q \iff \log_a q < \log_a p$$

真数の大小と対数の大小は逆

【例題 3 − 5】

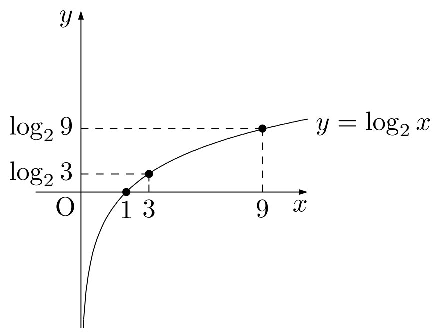
次の各組の数の大小を不等号を用いて表しなさい。

(1) $0, \log_2 9, \log_4 9$ (2) $1, 2\log_{\frac{1}{2}} 3, \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9$

＜解説＞

大小比較する問題では、基準をそろえる必要があります。対数の問題では底をそろえ、真数と対数の大小関係を考えます。また、底をそろえるときには底の小さいものにそろえると計算しやすくなります。

(1) 底を 2 にそろえると、



$$0 = \log_2 1$$

$$\begin{aligned}\log_4 9 &= \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \\ &= \frac{2\log_2 3}{2\log_2 2} = \log_2 3\end{aligned}$$

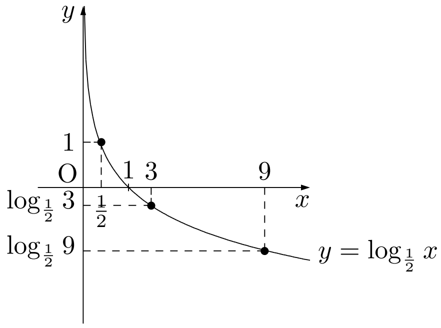
真数の大小関係は、

$$1 < 3 < 9$$

となり、底は 1 よりも大きいので、真数の大小と対数の大小は一致します。よって、

$$\begin{aligned}\log_2 1 < \log_2 3 < \log_2 9 \\ 0 < \log_4 9 < \log_2 9\end{aligned}$$

(2) 底を $\frac{1}{2}$ にそろえると、



$$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$2\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^2 = \log_{\frac{1}{2}} 9$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9 &= \log_{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} (3^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_{\frac{1}{2}} 3^{2\times\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 3\end{aligned}$$

真数の大小関係は、

$$\frac{1}{2} < 3 < 9$$

となり、底は 1 より小さいので、真数の大小と対数の大小は逆になります。よって、

$$\log_{\frac{1}{2}} 9 < \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

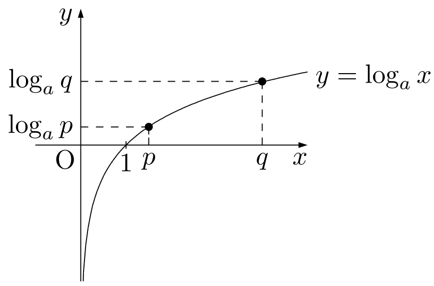
$$2\log_{\frac{1}{2}} 3 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 9 < 1$$

3.6 対数方程式の基本

対数を含む方程式を**対数方程式**といいます。

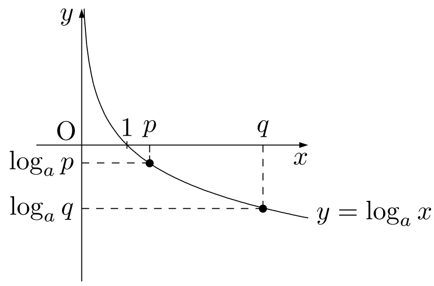
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフから、真数の大小と対数の大小は次のような関係が成り立ちました。

(i) $a > 1$



$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$

(ii) $0 < a < 1$



$0 < p < q \iff \log_a q < \log_a p$

このとき、$\log_a p$（$\log_a q$）の値を $\log_a q$（$\log_a p$）の値に近づけると、p（q）は q（p）に近づくことになり、最終的に $\log_a p = \log_a q$ となれば、$p = q$ という関係が成り立つことになります。つまり、

$$\log_a p = \log_a q \Longrightarrow p = q$$

となるので、この性質を利用して次のような手順で対数方程式を解くことができます。

(i) 真数条件（真数 > 0）を示す。
(ii) 底をそろえる。
(iii) 真数についての方程式を解く。
(iv) 求めた解がの真数条件を満たすかどうかを確認する。

【例題 3 − 6】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\log_2 x = -2$　　(2) $\log_5 x = -3$　　(3) $\log_3 x = 2$　　(4) $\log_5 x = 0$

<解説>

(1) 真数は正なので、$x > 0$

$$\begin{aligned}\log_2 x &= -2\log_2 2\\ &= \log_2 2^{-2}\\ &= \log_2 \frac{1}{2^2}\\ &= \log_2 \frac{1}{4}\\ x &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

また、対数の定義を利用すれば、

$$x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

(2) 真数は正なので、$x > 0$

$$\begin{aligned}\log_5 x &= -3\log_5 5\\ &= \log_5 5^{-3}\\ &= \log_5 \frac{1}{5^3}\\ &= \log_5 \frac{1}{125}\\ x &= \frac{1}{125}\end{aligned}$$

また、対数の定義を利用すれば、

$$x = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

(3) 真数は正なので、$x > 0$

$$\begin{aligned}\log_3 x &= 2\log_3 3\\ &= \log_3 3^2\\ &= \log_3 9\\ x &= 9\end{aligned}$$

また、対数の定義を利用すれば、

$$x = 3^2 = 9$$

(4) 真数は正なので、$x > 0$

$$\begin{aligned}\log_5 x &= \log_5 1\\ x &= 1\end{aligned}$$

また、対数の定義を利用すれば、

$$x = 5^0 = 1$$

3.7　対数方程式

一般的な対数方程式の解法手順は次のようになります。

(i) 真数条件（真数 >0）を示す。
(ii) 底をそろえる。
(iii) 対数の項が複数ある場合は、各辺を 1 つの対数にまとめる。

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

(iv) 真数についての方程式を解く。

$$\log_a p = \log_a q \Longrightarrow p = q$$

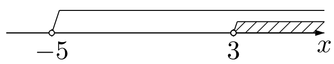
(v) 求めた解がの真数条件を満たすかどうかを確認する。

【例題 3 − 7】

次の方程式を解きなさい。
(1) $\log_3(x-3)+\log_3(x+5)=2$　　(2) $\log_3(x^2-2x)-1=\log_3(-x+2)$

<解説>

(1) 真数条件より、$x-3>0$ かつ $x+5>0$。よって、

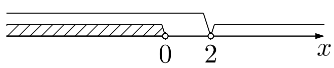


$$x>3 \ \cdots\cdots \ ①$$

$$\begin{aligned}
\log_3(x-3)+\log_3(x+5)&=2\\
\log_3(x-3)(x+5)&=2\log_3 3=\log_3 3^2\\
(x-3)(x+5)&=9\\
x^2+2x-15-9&=0\\
x^2+2x-24&=0\\
(x+6)(x-4)&=0\\
x&=-6,\ 4
\end{aligned}$$

①より $x=4$

(2) 真数条件より、$x^2-2x>0$ かつ $-x+2>0$。よって、



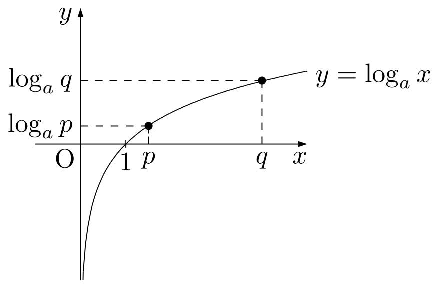
$$x<0 \ \cdots\cdots \ ②$$

$$
\begin{aligned}
\log_3(x^2-2x)-1 &= \log_3(-x+2)\\
\log_3(x^2-2x) &= \log_3(-x+2)+1\\
&= \log_3(-x+2)+\log_3 3\\
&= \log_3 3(-x+2)\\
x^2-2x &= -3x+6\\
x^2+x-6 &= 0\\
(x+3)(x-2) &= 0\\
x &= -3,\ 2\\
\text{②より } x &= -3
\end{aligned}
$$

3.8　対数不等式の基本

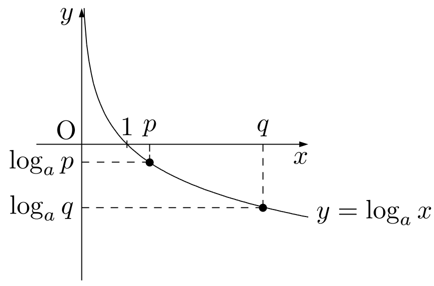
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフより、真数と対数の大小には次のような関係が成り立ちました。

(i) $a > 1$



$$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$$

(ii) $0 < a < 1$



$$0 < p < q \iff \log_a q < \log_a p$$

この性質を利用して、対数不等式は次のような手順で解くことができます。

(ｉ) 真数条件（真数 > 0）を示す。
(ii) 底をそろえる。
(iii) 真数についての不等式を解く。
(iv) 求めた解がの真数条件を満たすかどうかを確認する。

【例題 3 − 8】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\log_2 x < -2$　　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqq 4$

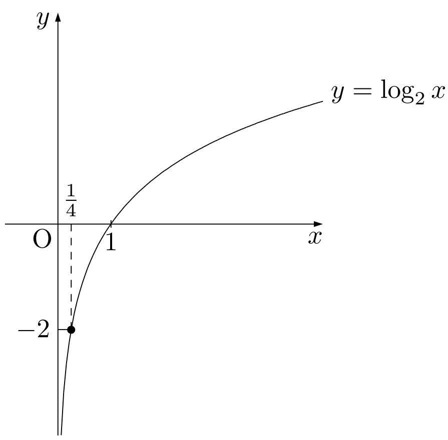
<解説>

(1) 真数条件より、$x > 0$ $\cdots\cdots$ ①

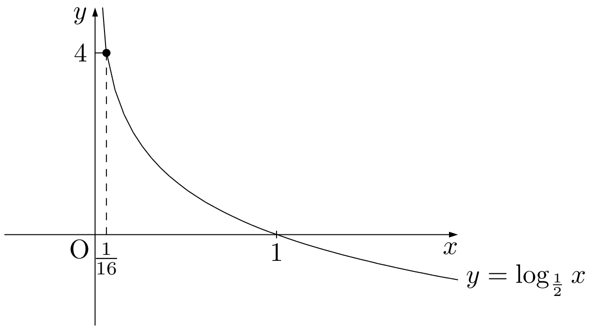
$$\log_2 x < -2 \times 1$$
$$\log_2 x < -2 \log_2 2$$
$$\log_2 x < \log_2 2^{-2}$$
$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 \frac{1}{4}$$
$$x < \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より

$$0 < x < \frac{1}{4}$$



(2) 真数条件より、$x > 0$ ……… ③



$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqq 4 \times 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqq 4 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$$

$$x \geqq \frac{1}{16} \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

③, ④より

$$x \geqq \frac{1}{16}$$

3.9 対数不等式

一般的な対数不等式は、次のような手順で解くことができます。

(i) 真数条件（真数 >0）を示す。
(ii) 底をそろえる。
(iii) 対数の項が複数ある場合は、各辺を 1 つの対数にまとめる。

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

(iv) 真数についての不等式を解く。
(v) 求めた解がの真数条件を満たすかどうかを確認する。

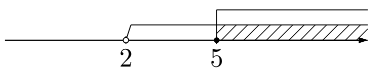
【例題 3 − 9】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\log_3(x-2) \geqq 1$　　(2) $\log_2 x + \log_2(x-2) \geqq 3$

<解説>

(1) 真数条件より、$x-2>0$ となることから、



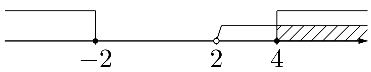
$$x > 2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\begin{aligned} \log_3(x-2) &\geqq 1 \\ \log_3(x-2) &\geqq \log_3 3 \\ x-2 &\geqq 3 \\ x &\geqq 5 \quad \cdots\cdots \text{②} \end{aligned}$$

①, ②より

$$x \geqq 5$$

(2) 真数条件より、$x>0$ かつ $x-2>0$ となるので、



$$x > 2 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2(x-2) &\geqq 3 \times 1 \\ \log_2 x(x-2) &\geqq 3\log_2 2 \\ \log_2 x(x-2) &\geqq \log_2 2^3 = \log_2 8 \\ x(x-2) &\geqq 8 \\ x^2-2x-8 &\geqq 0 \\ (x-4)(x+2) &\geqq 0 \\ x \leqq -2,\ 4 &\leqq x \quad \cdots\cdots \text{④} \end{aligned}$$

③, ④より、$x \geqq 4$

4　常用対数

$\log_{10} N$ （$N > 0$）のように、10 を底とする対数を**常用対数**といいます。

4.1　常用対数表

$N = 1.00,\ 1.01,\ 1.02,\ \cdots,\ 9.99$ における $\log_{10} N$ の値（ただし、小数第 5 位を四捨五入）を表にまとめたものを**常用対数表**といいます。（下の表をその一部を示しています。）

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784

この表から $\log_{10} 1.27$ の値を読み取るには、小数第 1 位までの値「1.2」を一番左の列から探し出し（表の上から 4 段目）、そして、小数第 2 位の「7」を一番上の段（右から 3 列目）を見つけます。その 2 つの数の交わったところに $\log_{10} 1.27$ の値があるので、

$$\log_{10} 1.27 = 0.1038$$

【例題 4 − 1】

常用対数表を用いて次の値を小数第 4 位まで求めなさい。

(1) $\log_{10} 3.58$　　(2) $\log_{10} 6.42$　　(3) $\log_{10} 98.3$

(4) $\log_{10} 1230$　　(5) $\log_{10} 0.567$　　(6) $\log_{10} 0.00408$

＜解説＞

(1) 常用対数表の一番左の列から「3.5」、一番上の段から「8」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551

$\log_{10} 3.58 = 0.5539$

(2) 常用対数表の一番左の列から「6.4」、一番上の段から「2」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122

$\log_{10} 6.42 = 0.8075$

(3) $\log_{10} 98.3$ は、

$$\log_{10}(9.83 \times 10) = \log_{10} 9.83 + \log_{10} 10$$

のように変形することができるので、常用対数表の一番左の列から「9.8」、一番上の段から「3」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952

$\log_{10} 9.83 = 0.9926$

となります。このことから、

$$\begin{aligned}\log_{10} 98.3 &= \log_{10}(9.83 \times 10)\\ &= \log_{10} 9.83 + \log_{10} 10\\ &= 0.9926 + 1 = 1.9926\end{aligned}$$

(4) $\log_{10} 1230$ は、

$$\log_{10}(1.23 \times 10^3) = \log_{10} 1.23 + \log_{10} 10^3$$

のように変形することができるので、常用対数表の一番左の列から「1.2」、一番上の段から「3」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106

$\log_{10} 1.23 = 0.0899$

となります。このことから、

$$\begin{aligned}\log_{10} 1230 &= \log_{10}(1.23 \times 10^3)\\ &= \log_{10} 1.23 + \log_{10} 10^3\\ &= 0.0899 + 3 = 3.0899\end{aligned}$$

(5) $\log_{10} 0.567$ は、

$$\log_{10}(5.67 \times 10^{-1}) = \log_{10} 5.67 + \log_{10} 10^{-1}$$

のように変形することができるので、常用対数表から、一番左の列から「5.6」、一番上の段から「7」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551

$\log_{10} 5.67 = 0.7536$

となります。このことから、

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.567 &= \log_{10}(5.67 \times 10^{-1}) \\ &= \log_{10} 5.67 + \log_{10} 10^{-1} \\ &= 0.7536 + (-1) = -0.2464\end{aligned}$$

(6) $\log_{10} 0.00408$ は、

$$\log_{10}(4.08 \times 10^{-3}) = \log_{10} 4.08 + \log_{10} 10^{-3}$$

と変形することができるので、常用対数表から、一番左の列から「4.0」、一番上の段から「8」を見つけ出し、その 2 数の交わった値を読み取ると、

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117

$\log_{10} 4.08 = 0.6107$

となります。このことから、

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.00408 &= \log_{10}(4.08 \times 10^{-3}) \\ &= \log_{10} 4.08 + \log_{10} 10^{-3} \\ &= 0.6107 + (-3) = -2.3893\end{aligned}$$

4.2 常用対数の値

ある常用対数の値（$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ など）を用いて、別の対数の値を求めるには、主に次のような手順で行います。

(i) 底の変換公式を用いて、底を 10 にそろえる。
(ii) 真数を素因数分解し、与えられた常用対数の真数のみで表す。
(iii) 対数の性質を利用して、対数を分解する。
(iv) 与えられた常用対数の値を代入し、対数の値を求める。

【例題 4 − 2】

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて、次の値を求めなさい。

(1) $\log_2 3$ (2) $\log_3 5$

<解説>

与えられた常用対数の値は、小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで表したものになっているので、計算結果も小数第 5 位を四捨五入し、小数第 4 位までで表します。

(1)

$$\begin{aligned}\log_2 3 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{0.4771}{0.3010}\\ &= 1.58504\cdots\\ &\fallingdotseq 1.5850\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\log_3 5 &= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}\\ &= \frac{\log_{10} \frac{10}{2}}{\log 103}\\ &= \frac{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3}\\ &= \frac{1 - 0.3010}{0.4771}\\ &= 1.46510\cdots\\ &\fallingdotseq 1.4651\end{aligned}$$

4.3 桁数

N を整数部分が 1 桁の数であるとすると、

$$1 \leqq N < 10 \qquad (N \text{ が自然数のとき：} N = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 8,\ 9)$$

と表すことができるので、このことを、

$$10^0 \leqq N < 10^1$$

のように表すことができます。

同じようにして、N を整数部分が 2 桁の数であるとすると、

$$10 \leqq N < 100 \qquad (N \text{ が自然数のとき：} N = 10,\ 11,\ 12, \cdots,\ 98,\ 99)$$

つまり、

$$10^1 \leqq N < 10^2$$

と表すことができ、N を整数部分が 3 桁の数であるとすると、

$$10^2 \leqq N < 10^3 \qquad (N \text{ が自然数のとき：} N = 100,\ 101,\ 102, \cdots,\ 998,\ 999)$$

となります。

このことから、N を整数部分が n 桁の数であるとすると、

$$10^{n-1} \leqq N < 10^n$$

のように表すことができ、常用対数を用いると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 10^{n-1} &\leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^n \\ (n-1)\log_{10} 10 &\leqq \log_{10} N < n \log_{10} 10 \\ n-1 &\leqq \log_{10} N < n \end{aligned}$$

となります。このようにしてある数 N の常用対数を考えることで、その数の桁数を求めることができます。

【例題 4 − 3】

$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき、次の整数が何桁になるか答えなさい。

(1) 3^{30}　　(2) 4^{40}

＜解説＞

(1) 常用対数を考えると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 3^{30} &= 30 \log_{10} 3 \\ &= 30 \times 0.4771 = 14.313 \end{aligned}$$

このことから、

$$14 < \log_{10} 3^{30} < 15$$

つまり、

$$10^{14} < 3^{30} < 10^{15}$$

となります。10^{14} は 15 桁の最小の数、10^{15} は 16 桁の最小の数を表し、3^{30} はその間の数であるため、その桁数は 15 桁であることがわかります。

(2) 常用対数を考えると、

$$\begin{aligned}\log_{10} 4^{40} &= \log_{10}(2^2)^{40} \\ &= \log_{10} 2^{80} \\ &= 80 \log_{10} 2 \\ &= 80 \times 0.3010 = 24.08\end{aligned}$$

このことから、

$$24 < \log_{10} 4^{40} < 25$$

つまり、

$$10^{24} < 4^{40} < 10^{25}$$

となります。10^{24} は 25 桁の最小の数、10^{25} は 26 桁の最小の数を表し、4^{40} はその間の数であるため、その桁数は 25 桁であることがわかります。

4.4 小数首位

小数点以下に 0 でない数が現れる最初の位のことを**小数首位**といいます。
N を小数第 1 位に初めて 0 でない数が現れる数であるとすると、

$$N = 0.1\cdots,\ 0.2\cdots,\ \cdots,\ 0.9\cdots$$

となるような数であるので、不等式で表すと、

$$0.1 \leqq N < 1$$

つまり、

$$10^{-1} \leqq N < 10^{0}$$

と表すことができます。
同じように、N を小数第 2 位に初めて 0 でない数が現れる数であるとすると、

$$N = 0.01\cdots,\ 0.02\cdots,\ \cdots,\ 0.09\cdots$$

となるような数であるので、不等式で表すと、

$$0.01 \leqq N < 0.1$$

つまり、

$$10^{-2} \leqq N < 10^{-1}$$

と表すことができ、N を小数第 3 位に初めて 0 でない数が現れる数であるとすると、

$$N = 0.001\cdots,\ \cdots,\ 0.009\cdots$$

となるような数であるので、不等式で表すと、

$$0.001 \leqq N < 0.01$$

つまり、

$$10^{-3} \leqq N < 10^{-2}$$

と表すことができます。
このことから、N を小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れる数であるとすると、

$$10^{-n} \leqq N < 10^{-(n-1)}$$

のように表すことができ、常用対数を用いると、

$$\begin{aligned}
10^{-n} &\leqq N < 10^{-(n-1)} \\
\log_{10} 10^{-n} &\leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^{-(n-1)} \\
-n \log_{10} 10 &\leqq \log_{10} N < -(n-1) \log_{10} 10 \\
-n &\leqq \log_{10} N < -(n-1)
\end{aligned}$$

となります。このようにしてある数 N の常用対数を考えることで、その数の小数首位を求めることができます。

【例題 4 − 4】

次の数を小数で表すと、小数第何位に初めて 0 でない数が現れますか。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とします。

(1) $(0.2)^{10}$ (2) $\left(\dfrac{3}{8}\right)^{50}$

＜解説＞

(1) 常用対数を考えると、

$$\begin{aligned}\log_{10}(0.2)^{10} &= 10\log_{10}\frac{2}{10}\\ &= 10(\log_{10} 2 - \log_{10} 10)\\ &= 10 \times (0.3010 - 1) = -6.99\end{aligned}$$

このことから、

$$-7 < \log_{10}(0.2)^{10} < -6$$

つまり、

$$10^{-7} < (0.2)^{10} < 10^{-6}$$

となります。よって、小数第 7 位。

(2) 常用対数を考えると、

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{50} &= 50\log_{10}\frac{3}{2^3}\\ &= 50(\log_{10} 3 - \log_{10} 2^3)\\ &= 50(\log_{10} 3 - 3\log_{10} 2)\\ &= 50 \times (0.4771 - 3 \times 0.3010) = -21.295\end{aligned}$$

このことから、

$$-22 < \log_{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{50} < -21$$

$$10^{-22} < \left(\frac{3}{8}\right)^{50} < 10^{-21}$$

となります。よって、小数第 22 位。