【数学 II】複素数と方程式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　複素数とその計算

1.1　複素数

　x が実数であるとき、

$$x^2 \geqq 0$$

となるので、実数の範囲では、

$$x^2 = -1$$

となる解（実数解）は存在しません。そこで、そのような 2 次方程式でも解をもつように数の範囲を広げることを考えます。そのためにまず、2 乗して -1 になる数を考え、それを文字 i で表し**虚数単位**とよびます。つまり、

$$i^2 = -1$$

です。これは、

$$i = \sqrt{-1}$$

のように書き表すことができます。そして、この i と実数 a、b を用いて、

$$a + b\,i$$

のように表すことのできる数を**複素数**といい、a を複素数 $a+b\,i$ の**実部**、b を複素数 $a+b\,i$ の**虚部**といいます。
　複素数 $a + b\,i$ において、虚部が 0 $(b = 0)$ となる複素数

$$a + 0\,i = a$$

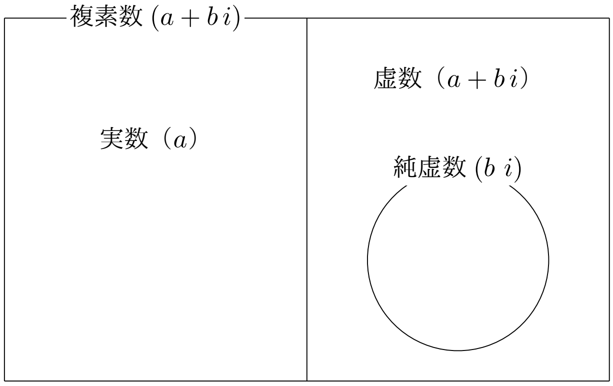
を実数といい、虚部が 0 でない $(b \fallingdotseq 0)$ となる複素数

$$a + b\,i \qquad (\text{ただし、} b \fallingdotseq 0)$$

を**虚数**といいます。このとき、特に、$a = 0$ となる虚数

$$0 + b\,i = b\,i \qquad (\text{ただし、} b \fallingdotseq 0)$$

のことを**純虚数**といいます。
　このように、複素数の集合は、実数の集合に虚数という新たな集合を加えたもので、純虚数の集合は虚数の特別なものと考えることができます。



【例題 1 − 1】

次の複素数の実部と虚部を答えなさい。

(1) $1-i$　(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(3) $-2\sqrt{2}$　(4) $\sqrt{5}\,i$

＜解説＞

複素数を $a+bi$ の形に表したときに、a が実部（文字「i」の 1 次式だとイメージしたときの定数項)、b が虚部（文字「i」の 1 次式だとイメージしたときの文字「i」の係数）になります。

また、文字式の表し方と同様に、複素数 $a+bi$ において、$b=1,\ -1$ のとき、

(i) $b=1$ のとき

$$a+i$$

(ii) $b=-1$ のとき

$$a-i$$

のように「1」は省略されるので注意しましょう。

それぞれの複素数を $a+bi$ の形に表して実部と虚部を考えると、

(1) $1-i=1+(-1)\,i$

実部 : 1　虚部 : -1

(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

実部 : $-\frac{1}{2}$　虚部 : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $-2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}+0\,i$

実部 : $-2\sqrt{2}$　虚部 : 0

(4) $\sqrt{5}\,i=0+\sqrt{5}\,i$

実部 : 0　虚部 : $\sqrt{5}$

となります。

1.2　複素数の加法・減法・乗法

a, b, c, d を実数とすると、複素数の加法・減法・乗法は、

(ⅰ) 加法（実部どうし・虚部どうしの和）

$$(a+b\,i)+(c+d\,i)=(a+c)+(b+d)\,i$$

(ⅱ) 減法（実部どうし・虚部どうしの差）

$$(a+b\,i)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)\,i$$

(iii) 乗法（分配法則や展開公式を利用）

$$\begin{aligned}(a+b\,i)(c+d\,i)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+(ad+bc)i+bd\cdot(-1)\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\,i\end{aligned}$$

のように、「i」を通常の文字と同様に扱って計算を行います。ただし、計算過程で i^2 が出てきたら、

$$i^2=-1$$

と置き換えて計算することになります。

【例題 1 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $(4-2\,i)+(3+4\,i)$　　(2) $(1-6\,i)-(2-i)$

(3) $(5-3\,i)^2$　　(4) $(5+2\,i)(5-2\,i)$

＜解説＞

「i」は通常の文字式の計算で扱われる「x」などと同じようなイメージで計算を行います。ただし、

$$i^2=-1$$

となることに注意します。

(1) 「$(4-2x)+(3+4x)$」という x の 1 次式の計算と同様に考えて、

$$\begin{aligned}(4-2\,i)+(3+4\,ii)&=(4+3)+(-2+4)\,i\\&=7+2\,i\end{aligned}$$

(2) 「$(1-6x)-(2-x)$」という x の 1 次式の計算と同様に考えて、

$$\begin{aligned}(1-6\,i)-(2-i)&=(1-2)+\{-6-(-1)\}\,i\\&=-1-5\,i\end{aligned}$$

(3) 平方の公式を利用して

$$
\begin{aligned}
(5-3\,i)^2 &= 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3i + (3i)^2 \\
&= 25 - 30i + 9i^2 \\
&= 25 - 30i + 9\cdot(-1) \\
&= 25 - 30i - 9 \\
&= 16 - 30\,i
\end{aligned}
$$

(4) 和と差の積の公式を利用して、

$$
\begin{aligned}
(5+2\,i)(5-2\,i) &= 5^2 - (2i)^2 \\
&= 25 - 4i^2 \\
&= 25 - 4\cdot(-1) \\
&= 25 + 4 \\
&= 29
\end{aligned}
$$

1.3 共役な複素数

$a,\ b$ を実数として、複素数 $\alpha = a + b\,i$ に対し虚部の符号を変えた複素数 $a - b\,i$ を**共役な複素数**といい、$\overline{\alpha}$ で表します。

$$\overline{\alpha} = a - b\,i$$

また、複素数 $a - b\,i$ に対して共役な複素数は $a + b\,i$ であるので、

$$\alpha = a + b\,i \quad と \quad \overline{\alpha} = a - b\,i$$

を**互いに共役**であるといいます。

ここで、互いに共役な複素数の和と積を考えてみると

(i) 互いに共役な複素数の和

$$\begin{aligned}\alpha + \overline{\alpha} &= (a + b\,i) + (a - b\,i)\\ &= (a + a) + (b - b)\,i\\ &= 2a\end{aligned}$$

(ii) 互いに共役な複素数の積

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha} &= (a + b\,i)(a - b\,i)\\ &= a^2 - (bi)^2\\ &= a^2 - b^2 i^2\\ &= a^2 - b^2 \cdot (-1)\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

となり、それぞれ実数になるという特徴があります。

【例題 1 − 3】

次の複素数と共役な複素数をいいなさい。

(1) $3 + 5\,i$　(2) $2 - 3\,i$　(3) -3　(4) $\dfrac{1}{3}\,i$

＜解説＞

共役な複素数は虚部の符号を変えた複素数であるので、それぞれの複素数の虚部が明確になるよう $a + bi$ の形で表すと

(1) $3 + 5\,i$　(2) $2 - 3\,i$　(3) $-3 + 0\,i$　(4) $0 + \dfrac{1}{3}\,i$

となります。よって、それぞれ虚部の符号を変えると

(1) $3 - 5\,i$　(2) $2 + 3\,i$　(3) $-3 - 0\,i$　(4) $0 - \dfrac{1}{3}\,i$

となるので、それぞれの複素数に共役な複素数は

(1) $3 - 5\,i$　(2) $2 + 3\,i$　(3) -3　(4) $-\dfrac{1}{3}\,i$

となります。

1.4 複素数の除法

互いに共役な複素数の積は、

$$(a+b\,i)(a-b\,i)=a^2+b^2 \qquad \text{（ただし、}a,\ b\text{ は実数）}$$

のように実数になりました。このことを利用して、$a,\ b,\ c,\ d$ を実数としたとき、$\dfrac{a+b\,i}{c+d\,i}$ のように表される複素数の除法は、分母の共役な複素数 $c-d\,i$ を分子・分母に掛けることで、

$$\begin{aligned}\frac{a+b\,i}{c+d\,i}&=\frac{(a+b\,i)(c-d\,i)}{(c+d\,i)(c-d\,i)}\\&=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}\\&=\frac{ac+(bc-ad)i-bd\cdot(-1)}{c^2-d^2i^2}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2-d^2\cdot(-1)}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i\end{aligned}$$

と変形できます。

分母が無理数であるような分数式では、分母を無理数ではない形、つまり、分母を有理数にする変形を行い、このことを「分母の有理化」といいましたが、この計算のように、分母が虚数で表されるような式を、虚数でない形、すなわち実数の形になるように変形することを**分母の実数化**といいます。

【例題 1 − 4】

次の式を $a+b\,i$（$a,\ b$ は実数）の形に表しなさい。

(1) $\dfrac{1}{3i}$ (2) $\dfrac{5}{3+4\,i}$ (3) $\dfrac{2+i}{2-i}+\dfrac{4+3\,i}{4-3\,i}$

＜解説＞

「$a+b\,i$ の形に表す」とは、「分母の実数化を行って、分母に虚数を含まない形で表す」ということと同じ意味で使われています。ただし、分母の実数化を行った後でまだ計算できる場合には、計算して最も簡単な形にしなければいけません。

(1) 分母「$3i$」の共役な複素数「$-3i$」を分子・分母に掛けて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3i}&=\frac{3i}{(3i)^2}\\&=\frac{3i}{9i^2}\\&=\frac{\cancel{3}i}{-\cancel{9}\,{}^{3}}\\&=-\frac{i}{3}\quad\left(\text{または、}-\frac{1}{3}i\right)\end{aligned}$$

となります。

ただし、この例題のように分母が純虚数の場合には、分母の共役な複素数を分子・分母に掛けるのではなく、「i」（もしくは、「$-i$」）を分子・分母に掛ければ、

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot i}{3i\cdot i} &= \frac{i}{3i^2}\\ &= \frac{i}{3\cdot(-1)}\\ &= -\frac{i}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot(-i)}{3i\cdot(-i)} &= \frac{-i}{-3i^2}\\ &= \frac{-i}{-3\cdot(-1)}\\ &= -\frac{i}{3}\end{aligned}$$

のように、より簡単に分母の実数化を行うことができます。

「i」を掛ければ計算はシンプルですが、分母に負の符号が残ります。そのため、「$-i$」を掛ければ分母の負の符号が残らなくなります。好みが分かれるところだと思いますので、自分の好きな計算方法を選択してください。

(2) 分母「$3+4\,i$」の共役な複素数「$3-4\,i$」を分子・分母に掛けて、

$$\begin{aligned}\frac{5}{3+4\,i} &= \frac{5(3-4\,i)}{(3+4\,i)(3-4\,i)}\\ &= \frac{5(3-4\,i)}{3^2-(4i)^2}\\ &= \frac{5(3-4\,i)}{9-16\cdot(-1)}\\ &= \frac{\cancel{5}(3-4\,i)}{\cancel{25}^{\,5}}\\ &= \frac{3-4\,i}{5}\end{aligned}$$

(3) 分数を含む式の計算では、通分して計算するのが基本になります。しかし、分母に虚数を含む分数では通分しづらいので、基本的にはまず分母を実数化し、その後通分して計算をします。

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{2-i}+\frac{4+3\,i}{4-3\,i} &= \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}+\frac{(4+3\,i)^2}{(4-3\,i)(4+3\,i)}\\ &= \frac{2^2+2\cdot 2i+i^2}{2^2-i^2}+\frac{4^2+2\cdot 4\cdot 3i+(3i)^2}{4^2-(3i)^2}\\ &= \frac{4+4i-1}{4-(-1)}+\frac{16+24i-9}{16-(-9)}\\ &= \frac{3+4\,i}{5}+\frac{7+24\,i}{25}\\ &= \frac{(3+4\,i)\cdot 5}{5\cdot 5}+\frac{7+24\,i}{25}\\ &= \frac{15+20\,i+7+24\,i}{25}\\ &= \frac{22+44\,i}{25}\qquad\left(=\frac{22}{25}+\frac{44}{25}\,i\right)\end{aligned}$$

1.5　複素数の相等

実部どうし、虚部どうしが等しい 2 つの複素数は等しく、a, b, c, d を実数とするとき、

$$a + b\,i = c + d\,i \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

となります。特に、$c = d = 0$ のときは、

$$a + b\,i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ かつ } b = 0$$

が成り立ちます。

【例題 1 − 5】

等式 $(x + 2y) + (x - y)\,i = 1 - 5\,i$ を満たす実数 x, y の値を求めなさい。

＜解説＞

x, y は実数であるので、$x + 2y$, $x - y$ も実数。よって、複素数の相等より、

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & \cdots\cdots ① \\ x - y = -5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となるので、① − ② より、

$$\begin{array}{rrrrrr} & x & + & 2y & = & 1 \\ -) & x & - & y & = & -5 \\ \hline & & & 3y & = & 6 \end{array}$$

$$y = \cancel{6}^{2} \times \frac{1}{\cancel{3}} = 2$$

これを②に代入して、

$$\begin{aligned} x - 2 &= -5 \\ x &= -5 + 2 = -3 \end{aligned}$$

以上より、

$$x = -3, \quad y = 2$$

1.6 負の数の平方根

$a > 0$ のとき、

$$(\sqrt{a}i)^2 = (\sqrt{a})^2 i^2 = a \cdot (-1) = -a \qquad (-\sqrt{a}i)^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = a \cdot (-1) = -a$$

より、$\sqrt{a}i$ と $-\sqrt{a}i$ をそれぞれ 2 乗すると $-a$ になります。つまり、$-a$ の平方根は

$$\pm\sqrt{a}i \ \cdots\cdots \ ①$$

となり、数の範囲を複素数にまで拡張することで、負の数の平方根も扱えるようになります。

また一般に、A の平方根は $\pm\sqrt{A}$ のように表されることから、$-a$ の平方根は

$$\pm\sqrt{-a} \ \cdots\cdots \ ②$$

のように表され、$A > 0$ でも $A < 0$ でも、A の符号に関わらず、A の平方根は $\pm\sqrt{A}$ と表されることになります。

そして、①, ②より、どちらも $-a$ の平方根を表していることから、$\sqrt{-a}$ は、

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

と表されることを確認できます。

【例題 1 − 6】

1. 次の数の平方根を求めなさい。
   (1) -16 (2) -12

2. 次の計算をしなさい。
   (1) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9}$ (2) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6}$ (3) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{-5}}$

＜解説＞

1. (1) -16 の平方根は

$$\pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}i = \pm 4i$$

(2) -12 の平方根は

$$\pm\sqrt{-12} = \pm\sqrt{12}i = \pm 2\sqrt{3}i$$

2. 根号の中が負であるような式では、まず虚数単位 i 用いて書き直し、複素数の計算を行います。

(1)

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = \sqrt{4}i + \sqrt{9}i = 2i + 3i = 5i$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{-3}\times\sqrt{-6} &= \sqrt{3}i\times\sqrt{6}i\\ &= \sqrt{18}i^2\\ &= 3\sqrt{2}\cdot(-1)\\ &= -3\sqrt{2}\end{aligned}$$

ここで、

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}=\sqrt{(-3)\times(-6)}$$

のようには計算できないので注意してください。このような間違いをしないためにも、根号の中身が負である場合には、最初に必ず虚数単位 i を用いて書き直すようにしてください。

(3)

$$\begin{aligned}\frac{15}{\sqrt{-5}} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}i}\\ &= \frac{\sqrt{15}i}{\sqrt{5}i^2}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{5}}}\cdot\frac{i}{-1}\\ &= -\sqrt{3}i\end{aligned}$$

2　2 次方程式の解

2.1　2 次方程式の解法

x が実数のとき、$a>0$ である 2 次方程式 $x^2=a$ の解は、

$$x=\pm\sqrt{a}$$

のようになりました。

数学 II では数の範囲を複素数にまで広げられたので、複素数の範囲で考えれば、$a<0$ である 2 次方程式 $x^2=a$ も解をもつことができ、実数のときと同様にして、

$$x=\pm\sqrt{a}$$

と表すことができます。つまり、複素数の範囲では a の正・負にかかわらず、2 次方程式 $x^2=a$ の解は常に、

$$x=\pm\sqrt{a}$$

となります。そして、一般的な 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ においても、b^2-4ac の符号にかかわらず、その解は常に、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となります。

【例題 2 − 1】

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+4=0$　　(2) $(2x-1)^2=-9$

(3) $2x^2-3x-1=0$　　(4) $3x^2+2x+1=0$

＜解説＞

2 次方程式の基本的な解法は、数学 I で学習したときと同様に、

(i) 因数分解の利用　　(ii) 解の公式（平方根の考え）の利用

のいずれかになります。

(1) 平方根の考えを利用して、

$$\begin{aligned} x^2&=-4\\ x&=\pm\sqrt{-4}\\ &=\pm\sqrt{4}i\\ &=\pm 2i \end{aligned}$$

(2) 平方根の考えを利用して、

$$\begin{aligned} 2x-1&=\pm\sqrt{-9}\\ &=\pm\sqrt{9}i\\ 2x&=1\pm 3\,i\\ x&=\frac{1\pm 3\,i}{2} \end{aligned}$$

(3) 解の公式を利用して、

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}
$$

(4) 解の公式を利用して、

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{8}\,i}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{-\cancel{2}^{\,1} \pm \cancel{2}\sqrt{2}i}{\cancel{2} \cdot 3} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{2}\,i}{3}
\end{aligned}
$$

2.2　2 次方程式の解の判別

数の範囲を複素数の範囲にまで広げたとき、数学 I で学習した 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D

$$D=b^2-4ac$$

は、

(i) $D>0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\left(=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\right)$$

となる、異なる 2 つの実数解をもつ

(ii) $D=0$ のとき

$$x=-\frac{b}{2a}$$

となる 1 つの実数解（重解）をもつ

(iii) $D<0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\left(=\frac{-b\pm\sqrt{-D}\,i}{2a}\right)$$

となる異なる 2 つの虚数解をもつ

のようになり、

(i) $D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
(ii) $D=0 \iff$ 実数の重解をもつ
(iii) $D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

のようにして 2 次方程式の解を判別することができます。

【例題 2 − 2】

次の 2 次方程式の解を判別しなさい。

(1) $2x^2+x+1=0$　　(2) $2x^2+x-1=0$
(3) $4x^2-4x+1=0$　　(4) $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0$

<解説>

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D を

$$D=b^2-4ac$$

とすると、

(1) $a=2,\ b=1,\ c=1$ を代入して

$$\begin{aligned} D &= 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 \\ &= -7 < 0 \end{aligned}$$

よって、異なる 2 つの虚数解。

(2) $a=2,\ b=1,\ c=-1$ を代入して

$$\begin{aligned} D &= 1^2 - 4\cdot 2\cdot (-1) \\ &= 9 > 0 \end{aligned}$$

よって、異なる 2 つの実数解。

(3) $a=4,\ b=-4,\ c=1$ を代入して

$$D = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0$$

よって、重解。

(4) $a=\dfrac{1}{2},\ b=1,\ c=\dfrac{1}{2}$ を代入して

$$D = 1^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

よって、重解。

ただし、方程式に分数が含まれる場合には分母をはらって計算するのが一般的なので、(4) の 2 次方程式では両辺を 2 倍して、

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

と変形してから、

$$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 0$$

のように判別式を利用する方がいいでしょう。

また、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の x の係数が偶数である場合、つまり、

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

のような形で表される場合、この 2 次方程式の判別式 D は、

$$\begin{aligned} D &= (2b')^2 - 4ac \\ &= 4b'^2 - 4ac \ \cdots\cdots\ ① \end{aligned}$$

と表されます。このとき、①の右辺の 2 つの項は「4」を因数にもつので、この式の両辺を 4 で割ることで、

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac \ \cdots\cdots\ ②$$

となります。

2 次方程式の 1 次の項（x）の係数が偶数である場合、通常の判別式ではなく、この式②を利用することで、小さな数を扱うことができ、計算が楽になります。余裕のある人はこちらの式も覚え、利用してみてください。

2.3　2 次方程式が実数解をもつ条件

数の範囲を複素数の範囲にまで広げたとき、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D\ (=b^2-4ac)$ とすると、

(i) $D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる 2 つの実数解をもつ
(ii) $D=0$　$\Longleftrightarrow$　実数の重解をもつ
(iii) $D<0$　$\Longleftrightarrow$　異なる 2 つの虚数解をもつ

のようにして 2 次方程式の解を判別することができました。このことから、実数解となるのは、$D>0$ または $D=0$ のときであるので、

$$D \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{実数解をもつ}$$

といえます。

【例題 2 − 3】

次の 2 次方程式が実数解をもつような実数 t の範囲を求めなさい。
(1) $x^2-3x+t=0$　　(2) $x^2-3tx+2t^2-3t-2=0$

＜解説＞

2 次方程式の判別式を D とします。

(1) 2 次方程式が実数解をもつためには、$D \geqq 0$ となればよいので、

$$\begin{aligned} D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot t &\geqq 0 \\ 9-4t &\geqq 0 \\ -4t &\geqq -9 \\ t &\leqq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

(2) 2 次方程式が実数解をもつためには、$D \geqq 0$ となればよいので、

$$\begin{aligned} D=(-3t)^2-4\cdot 1\cdot(2t^2-3t-2) &\geqq 0 \\ 9t^2-8t^2+12t+8 &\geqq 0 \\ t^2+12t+8 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ここで、2 次方程式 $t^2+12t+8=0$ の解は、解の公式より

$$\begin{aligned} t &= \frac{-6\pm\sqrt{6^2-1\cdot 8}}{1} \\ &= -6\pm 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

となるので、求める t の範囲は

$$t \leqq -6-2\sqrt{7},\quad -6+2\sqrt{7} \leqq t$$

3　解と係数の関係

3.1　2 次方程式の 2 つの解の和と積

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると、解の公式から、

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のように表すことができます。このとき、2 つの解の和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}\\&=-\frac{b}{a}\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

となり、2 次方程式の解がたとえ複雑な形であっても、その解の和と積は 2 次方程式の係数のみで簡単に表すことができ、これを 2 次方程式の**解と係数の関係**といいます。

【例題 3 − 1】

次の 2 次方程式の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき、$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ の値を求めなさい。

(1) $x^2-2x+3=0$　　(2) $x^2-3x-1=0$

＜解説＞

(1) 解の公式を利用して、$\alpha,\ \beta$ の値を求めてからその和と積の値を計算すると、

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}\\&=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}\\&=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}\\&=1\pm\sqrt{2}i\end{aligned}$$

より、

$$\alpha=1+\sqrt{2}i,\qquad \beta=1-\sqrt{2}i$$

とすると、

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\\&=2\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\alpha\beta&=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\\&=1^2-(\sqrt{2}i)^2\\&=1-(-2)=3\end{aligned}$$

と求めることができますが、これを、2 次方程式の解と係数の関係を用いれば、

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{1}=2,\qquad \alpha\beta=\frac{3}{1}=3$$

のように簡単に求めることができます。

(2) 解の公式を利用して、$\alpha,\ \beta$ の値を求めてからその和と積の値を計算すると、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

より、

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \qquad \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{2}^{\,1}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{3^2 - (\sqrt{13})^2}{2^2} \\ &= \frac{9 - 13}{4} \\ &= \frac{-\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{4}^{\,1}} = -1 \end{aligned}$$

と求めることができますが、これを、2 次方程式の解と係数の関係を用いれば、

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3, \qquad \alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1$$

のように簡単に求めることができます。

3.2 2つの解の対称式の値

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると、解と係数の関係から、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

のように表すことができます。

このとき、$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ は $\alpha,\ \beta$ の基本対称式であるので、次のように、$\alpha,\ \beta$ の対称式を基本対称式のみで表すことができます。

① $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$\begin{aligned}\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2\\ \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\end{aligned}$$

② $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3\\ \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2\\ &=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

2次方程式の2つの解 $\alpha,\ \beta$ に関する式の値を求める問題では、与えられた式が $\alpha,\ \beta$ の対称式になっている場合が多くあり、この対称式の性質と解と係数の関係を利用することで、計算が楽になります。

【例題3－2】

2次方程式 $3x^2+3x-2=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

＜解説＞

$\alpha,\ \beta$ の値を求めて代入して計算することもできますが、非常に面倒です。そこで、それぞれの式は $\alpha,\ \beta$ の対称式になっているので、それぞれの式を基本対称式のみで表すことが可能です。そして、その基本対称式 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ は、解と係数の関係から、

$$\alpha+\beta=-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}^{1}}=-1, \qquad \alpha\beta=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

と求められるので、この値を利用して、それぞれの式の値を求めていきます。

(1)

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta \\
&= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta \\
&= (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta \\
&= (-1)^2 - \cancel{3} \cdot \left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right) \\
&= 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\
&= (-1)^3 - \cancel{3} \cdot \left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right) \cdot (-1) \\
&= -1 - 2 = -3
\end{aligned}
$$

または、（1）の結果を利用して

$$
\begin{aligned}
\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\
&= -1 \cdot 3 = -3
\end{aligned}
$$

のようにして求めることもできます。

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\
&= \frac{(-1)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{21}{4}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\
&= \frac{(-1)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{-\frac{2}{3}} \\
&= -\frac{1 + \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

3.3　2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると、解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

であるので、

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

と変形することができます。

このことから、今まで x の 2 次式を因数分解するときには、因数分解の公式を利用してきましたが、2 次方程式の解 $\alpha,\ \beta$ を求めることができれば、その解を利用して 2 次式を因数分解することができます。

また、

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

という 2 次方程式の解は、

$$x=\alpha,\ \beta$$

のように求めることができましたが、逆に、$x=\alpha,\ \beta$ となるような 2 次方程式の 1 つは、

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

と表すことができます。この 2 次方程式の左辺を展開すると、

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0\ \cdots\cdots\ ①$$

となります。そして、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=0 \\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\ \cdots\cdots\ ② \end{aligned}$$

と表すことができ、この 2 次方程式の解も $x=\alpha,\ \beta$ となるので、①, ②の方程式は一致するはずです。そのため、①と②の 2 つの式の係数を比較することで、

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

のように解と係数の関係を導くこともできます。

【例題 3 − 3】

次の整式を複素数の範囲で因数分解しなさい。

(1) x^2+4x+2　　(2) $5x^2+3x+2$　　(3) x^3-1

＜解説＞

(1) 2 次方程式 $x^2+4x+2=0$ を解の公式を利用して解くと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 2}}{1} \\ &= -2\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} x^2+4x+2 &= \{x-(-2+\sqrt{2})\}\{x-(-2-\sqrt{2})\} \\ &= (x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(2) 2 次方程式 $5x^2+3x+2=0$ を解の公式を利用して解くと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 5\cdot 2}}{2\cdot 5} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{-31}}{10} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{31}i}{10} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 5x^2+3x+2 &= 5\left(x-\frac{-3+\sqrt{31}i}{10}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{31}i}{10}\right) \\ &= 5\left(x+\frac{3-\sqrt{31}i}{10}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{31}i}{10}\right) \end{aligned}$$

(3) 因数分解の公式を利用すれば、

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

と因数分解できました。実数の範囲であればこれで因数分解が完了したことになりますが、複素数の範囲ではさらに因数分解することが可能です。
つまり、2 次方程式 $x^2+x+1=0$ を解の公式を利用して解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} x^3-1 &= (x-1)(x^2+x+1) \\ &= (x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= (x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) \end{aligned}$$

3.4 和と積が与えられた 2 数の決定

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると、

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

と表すことができました。このとき、x^2 の係数が 1、つまり、$a=1$ となるものは

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta)&=0\\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta&=0\end{aligned}$$

となります。

このことから、2 次方程式の解を求める場合、その和と積がわかれば、

$$x^2-（和）x+（積）=0$$

という 2 次方程式を解くことにより求められることになります。

【例題 3 − 4】

ある 2 次方程式を解くと、2 つの解の和が $\dfrac{1}{2}$、積が $-\dfrac{3}{2}$ であるといいます。この 2 次方程式の解を求めなさい。

＜解説＞

2 次方程式の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると、条件から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

であるので、$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式

$$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

の 2 つの解になります。この方程式を解くと

$$\begin{aligned}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}&=0\\ 2x^2-x-3&=0\\ (2x-3)(x+1)&=0\\ x&=\frac{3}{2},\ -1\end{aligned}$$

となります。

また、次のように連立方程式を解くことでも求めることもできます。

①より

$$\beta=-\alpha+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots ③$$

であるので、これを②に代入すると、

$$\begin{aligned}
\alpha\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)&=-\frac{3}{2}\\
-\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha&=-\frac{3}{2}\\
2\alpha^2-\alpha-3&=0\\
(2\alpha-3)(\alpha+1)&=0\\
\alpha&=\frac{3}{2},\ -1
\end{aligned}$$

となり、このとき β の値はそれぞれ③より

(i) $\alpha=\dfrac{3}{2}$ のとき

$$\beta=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$$

(ii) $\alpha=-1$ のとき

$$\beta=-(-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

となるので、結局 2 次方程式の 2 つの解は

$$x=\frac{3}{2},\quad -1$$

ということになります。

3.5　2次方程式の作成

【例題3 − 5】

2次方程式 $x^2 - x + 4 = 0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とします。このとき、次の2つの値を解にもつような2次方程式のうち x^2 の係数が1であるものを求めなさい。

(1) $2\alpha,\ 2\beta$　　(2) $\alpha + 1,\ \beta + 1$　　(3) $\alpha^2,\ \beta^2$　　(4) $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$

＜解説＞

2次方程式 $x^2 - x + 4 = 0$ を解の公式を利用して解くと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{15}i}{2}, \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{15}i}{2}$$

として、直接条件の値を求めて2次方程式を作成することもできそうですが、計算が非常に面倒になります。

しかし、直接条件の値を求めなくても、2つの解の和と積の値がわかれば、x^2 の係数が「1」である2次方程式は、

$$x^2 - (\text{和})\,x + (\text{積}) = 0$$

のように表すことができました。そこで、それぞれの条件における2つの値の和と積を考えますが、そのために、α と β の和と積を求めておくと、2次方程式 $x^2 - x + 4 = 0$ において、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \qquad \alpha\beta = 4$$

となるので、この値を利用します。

(1) $2\alpha,\ 2\beta$ の和と積を求めると

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta &= 2(\alpha + \beta) \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\alpha \cdot 2\beta &= 4\alpha\beta \\ &= 4 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

となるので、$2\alpha,\ 2\beta$ を解とする x^2 の係数が1である2次方程式は、

$$x^2 - 2x + 16 = 0$$

(2) $\alpha + 1,\ \beta + 1$ の和と積を求めると

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 2 \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\alpha + 1)(\beta + 1) &= \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4 + 1 + 1 = 6 \end{aligned}$$

となるので、$\alpha + 1,\ \beta + 1$ を解とする x^2 の係数が1である2次方程式は、

$$x^2 - 3x + 6 = 0$$

(3) α^2, β^2 の和と積を求めると

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 1^2-2\cdot 4=-7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 &= (\alpha\beta)^2 \\ &= 4^2=16\end{aligned}$$

となるので、α^2, β^2 を解とする x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は、

$$x^2+7x+16=0$$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ の和と積を求めると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となるので、$\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ を解とする x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は、

$$x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}=0$$

4　剰余の定理と因数定理

4.1　剰余の定理の利用

整式 $P(x)$ を整式 $f(x)$ で割ったとき、商が $Q(x)$、余りが $R(x)$ になるとき、

$$P(x) = f(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

という関係が成り立ちました。このとき、余りの次数は必ず割る式 (この場合は $f(x)$) の次数よりも低くなるので、$f(x)$ が $x - \alpha$ のような 1 次式であるとき、余りはその次数よりも低い 0 次式、つまり定数になります。その定数を r とすると、

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$$

のように書き表すことができます。

この式に $x - \alpha = 0$ を成り立たせる x の値、つまり、$x = \alpha$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + r \\ &= 0 \cdot Q(\alpha) + r = r \end{aligned}$$

となります。このことから、

「整式 $P(x)$ を $x - \alpha$で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい」

ということが成り立ち、これを**剰余の定理**といいます。

【例題 4 － 1】

整式 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 3$ を次の 1 次式で割った余りを求めなさい。

(1) $x - 1$　　(2) $x + 2$　　(3) $2x + 1$

<解説>

(1) $x - 1 = 0$ より、$x = 1$ を $P(x)$ に代入して、

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$$

となります。また、余りが 0 であるので、整式 $P(x)$ は $x - 1$ で割り切れることになります。

(2) $x + 2 = 0$ より、$x = -2$ を $P(x)$ に代入して、

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - (-2) + 3 = -27$$

(3) $2x + 1 = 0$ より、$x = -\dfrac{1}{2}$ を $P(x)$ に代入して、

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{9}{4}$$

4.2 余りの条件から整式の係数を求める

【例題 4 − 2】

整式 $x^3 - 5x^2 + kx + 5$ が 1 次式 $x - 2$ で割ったとき、余りが 3 になるように k の値を定めなさい。

<解説>

整式 $x^3 - 5x^2 + kx + 5$ を

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 5$$

とすると、$P(x)$ を $x - 2$ で割った余りが 3 になるので、剰余の定理から

$$P(2) = 3$$

が成り立ちます。よって、

$$\begin{aligned} P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2k + 5 &= 3 \\ 8 - 20 + 2k + 5 &= 3 \\ 2k &= 10 \\ k &= 5 \end{aligned}$$

となります。

4.3 整式の割り算の余りの決定

【例題 4 − 3】

整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 5 余り、$x+1$ で割ると -4 余ります。このとき、$P(x)$ を x^2-x-2 で割った余りを求めなさい。

＜解説＞

$P(x)$ を x^2-x-2 で割ったときの商を $Q(x)$ とし、余りを $R(x)$ とすると、

$$P(x)=(x^2-x-2)Q(x)+R(x)$$

のように表すことができます。このとき、$R(x)$ は割る式 x^2-x-2（2 次式）よりも低い次数、つまり、1 次以下の整式になるので、それを

$$R(x)=ax+b$$

とすると、

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b\\&=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b \quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

のように表すことができます。

整式 $P(x)$ を $x-2$ で割った余りが 5 になるので、剰余の定理より、

$$P(2)=5$$

となります。このことから、①より

$$P(2)=\cancel{(2-2)(2+1)Q(2)}+2a+b=5$$
$$2a+b=5 \quad\cdots\cdots ②$$

同様にして、$P(x)$ を $x+1$ で割った余りが -4 になるので、剰余の定理より、

$$P(-1)=-4$$

となり、①より

$$P(-1)=\cancel{(-1-2)(-1+1)Q(-1)}-a+b=-4$$
$$-a+b=-4 \quad\cdots\cdots ③$$

となります。

よって、②, ③より

$$a=3,\qquad b=-1$$

となるので、求める余りは

$$3x-1$$

4.4 因数定理

剰余の定理より、

「整式 $P(x)$ を $x-\alpha$で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい」

となりました。ここで、整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割り切れるときを考えると、これは余りが 0 となるときであるので、

$$P(\alpha)=0$$

となります。つまり、

「整式 $P(x)$ が $x-\alpha$で割り切れる」 $\iff$ 「$P(\alpha)=0$」

が成り立ち、これを**因数定理**といいます。

また、「整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる」とき、商を $Q(x)$ とすれば、

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

のように表され、整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ という因数をもつことになります。つまり、因数定理は

「整式 $P(x)$ が $x-\alpha$を因数にもつ」 $\iff$ 「$P(\alpha)=0$」

のようにも表すことができます。

【例題 4 − 4】

次の 1 次式のうち、整式 x^3+2x^2-7x+4 の因数となっているものはどれか求めなさい。

(a) $x+1$ (b) $x-1$ (c) $x+2$ (d) $x-2$ (e) $x+3$ (f) $x+4$

＜解説＞

それぞれの 1 次式が因数となるかどうかは、その 1 次式で与えられた整式を割ったときに「割りきれるかどうか」を考えればよく、そのためには「余りが 0」かどうかを見極めればよいことになります。そこで、

$$P(x)=x^3+2x^2-7x+4$$

とすると、

(a) $P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-7\cdot(-1)+4=12$
(b) $P(1)=1^3+2\cdot1^2-7\cdot1+4=0$
(c) $P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-7\cdot(-2)+4=18$
(d) $P(2)=2^3+2\cdot2^2-7\cdot2+4=6$
(e) $P(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-7\cdot(-3)+4=16$
(f) $P(-4)=(-4)^3+2\cdot(-4)^2-7\cdot(-4)+4=0$

となるので、割り切れるのは

(b), (f)

になり、整式 $P(x)$ の因数になります。

4.5 組立除法

すでに整式の除法（割り算）については学習済みですが、整式を 1 次式（x の係数が 1）で割ったときの商と余りを求める方法について再検討してみたいと思います。

整式 $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ を、x の係数が 1 である 1 次式 $x - 2$ で割ったときの商と余りは、

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 & +5x & +2 & \\ \cline{2-5}
x-2\,\big) & 2x^3 & +x^2 & -8x & -4 \\
 & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5x^2 & -8x & \\
 & & 5x^2 & -10x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -4 \\
 & & & 2x & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

のようにして、

商：$2x^2 + 5x + 2$　　余り：0

と求めることができました。もちろん計算の仕方はこれで問題はありませんが、整式は降べきの順になるように書き表しているので、一番右の項から、

定数項、1 次の項、2 次の項、$\cdots$

のように並んでいるのは明らかなので、いちいち「x」を書くのが少し面倒な気がします。そこで、係数だけを書き並べて、

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2x^2 & +5x & +2 & \\ \cline{2-5}
x-2\,\big) & 2x^3 & +x^2 & -8x & -4 \\
 & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5x^2 & -8x & \\
 & & 5x^2 & -10x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -4 \\
 & & & 2x & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
1\ -2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & 2 & -4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & 5 & -10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & 2 & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

のようにしても問題なく計算でき、商と余りも同様にして求めることが可能です。

しかし、これをさらに簡略化することができます。

まずは、上下の式を引き算して計算しましたが、割る式を -1 倍しておけば、引き算を足し算にして計算することができ、こちらの方が計算しやすいと思います。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
1\ -2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & 2 & -4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & 5 & -10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & 2 & -4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
-1\ 2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & -2 & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & -5 & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & -2 & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

かっこをつけた数は、上下に足し算をすれば消えてしまうものなので、最初から書かなくても問題なさそうです。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
-1\ 2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & (-2) & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & (-5) & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & (-2) & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
-1\ 2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

また、その部分の計算に使われていた「$x-2$」の x の係数「1」の部分（-1 倍したので「-1」）ももちろん必要なくなります。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
-1\ 2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

そして、かっこの部分は商と一致するので、どちらか一方だけあれば問題ありません。そこで、商の部分を省略してしまいます。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & 5 & 2 & \\ \cline{2-5}
2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & (5) & -8 & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & (2) & -4 \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & & & \\ \cline{2-5}
2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & -8 & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & -4 \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

最後に、かっこの部分は計算するために割る式から下に下ろしてきたものですが、どちらか一方だけあれば問題ないので、かっこのついた部分は省略してしまいます。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & & & \\ \cline{2-5}
2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & (-8) & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & (-4) \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rrrrr}
 & 2 & & & \\ \cline{2-5}
2\,\big) & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & & \\ \cline{2-5}
 & & 5 & & \\
 & & & 10 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2 & \\
 & & & & 4 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

これを上下の隙間を埋めるようにすっきり整理すれば、

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & 10 & 4 \\ \hline
 & 2 & 5 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

のように表すことができ、このような書き方で整式の割り算を行う方法を**組立除法**といいます。

組立除法の詳細については今まで述べたとおりですが、実際に組立除法を行う際の基本手順は次のようになります。

(i) 割られる式の係数を書き並べ、その横に割る式の定数項の符号を変えたものを、割られる式のすぐ近くに区別できるようにして添えておきます。
(ii) 割られる式の下に一行分スペースを空け、その下に線を引きます。
(iii) 最大次数の項の係数を、引いた線の下にそのまま下ろしてきます。
(iv) 下ろした数と割る式の定数項の符号を変えたものの積を、割られる式の次に大きな次数の項の下に書きます。
(v) そして、上下の数の和を列を揃えて線の下に書きます。
(vi) (iv), (v) の操作を右端まで繰り返します。

このようにして、組立除法を用いることにより素早く商と余りを求めることができますが、割る式が 1 次式でないと利用できないので、万能な方法ではありません。そのため、「使い方を覚えるのが面倒」だと感じれば特にマスターすべきものではないと思います。ただし、係数のみを書き並べて割り算を行う方法は万能ですので、そちらは利用するといいでしょう。

【例題 4 − 5】

次の計算をし、商と余りを求めなさい。

(1) $(x^2-2x-3)\div(x+1)$
(2) $(x^3-4x^2+2x-2)\div(x-1)$
(3) $(x^3-4x+2)\div(x-2)$
(4) $(2x^3-3x^2-3x+4)\div(2x-1)$

<解説>

この例題では、練習として組立除法を利用して商と余りを求めてみます。それぞれの式を組立除法の基本手順通り行うと、

(1)

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & -2 & -3 \\ & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

商：$x-3$,　余り：0

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ & & 1 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{-3} \end{array}$$

商：x^2-3x-1,　余り：-3

(3)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\
 & & 2 & 4 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & \boxed{2}
\end{array}
$$

商：x^2+2x,　　余り：2

(4)

$$
\begin{array}{c|rrrr}
\frac{1}{2} & 2 & -3 & -3 & 4 \\
 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 2 & -2 & -4 & \boxed{2}
\end{array}
$$

商：x^2-x-2,　　余り：2

のようになりますが、(4）は注意が必要です。

組立除法では、割る式の 1 次の係数が「1」であるため省略することができたので、割る式が「$x+\alpha$」のような形でないと利用することができません。しかし、(4）では割る式が「$2x-1$」となっていて、x の係数が 1 ではありません。そのような場合に組立除法を利用するには、x の係数で「割る式」を割って、「$x-\dfrac{1}{2}$」で割り算をすると考えます。つまり、

$$(2x^3-3x^2-3x+4)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

を計算した結果、

商：$2x^2-2x-4$,　　余り：2

となったことになります。しかし、このままでは割る式が異なるのでこれを答えにするわけにはいきませんが、この結果から、

$$2x^3-3x^2-3x-4=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x-4)+2$$

という関係になっているので、この式を変形すると、

$$
\begin{aligned}
2x^3-3x^2-3x-4&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x^2-x-2)+2\\
&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-x-2)+2\\
&=(2x-1)(x^2-x-2)+2
\end{aligned}
$$

のように変形でき、この等式から、$2x^3-3x^2-3x-4$ を $2x-1$ で割った商と余りは、

商：x^2-x-2,　　余り：2

になることがわかります。

4.6 高次式の因数分解

2 次式や特別な形の 3 次式は、公式を利用することで因数分解することができましたが、多くの 3 次式や 3 次以上の整式（高次式）では、直接公式を利用して因数分解をすることができません。しかし、そんなときに因数定理が威力を発揮します。

因数定理は、

「整式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ」 $\iff$ 「$P(k)=0$」

であるので、整式 $P(x)$ を $x-k$ で割った商を $Q(x)$ とすれば、

$$P(x)=(x-k)Q(x)$$

のように因数分解できるわけです。そして、$Q(x)$ が 2 次式であれば公式を利用、3 次式であれば再度因数定理を用いることで、さらに因数分解できる場合もあります。

【例題 4 − 6】

次の整式を因数分解しなさい。

(1) $x^3+4x^2-11x+6$　　(2) $2x^3+x^2-5x+2$　　(3) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

＜解説＞

高次式を因数定理を用いて因数分解する際には、「$P(k)=0$」を満たす「k」をいかにして速く正確に見つけるかが重要になります。

整式 $P(x)$ が

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

のような 3 次式で、この式が

$$ax^3+bx^2+cx+d=(px-\alpha)(qx-\beta)(rx-\gamma) \ \cdots\cdots \ ①$$

のように因数分解できたとします。このとき、「$P(k)=0$」を満たす k の値は、

$$(pk-\alpha)(qk-\beta)(rk-\gamma)=0$$

より、

$$k=\frac{\alpha}{p},\quad \frac{\beta}{q},\quad \frac{\gamma}{r} \ \cdots\cdots \ ②$$

となります。

ここで、①の右辺を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= (px-\alpha)(qx-\beta)(rx-\gamma) \\ &= \{pqx^2-(\alpha q+\beta p)x+\alpha\beta\}(rx-\gamma) \\ &= pqrx^3-(\alpha qr+\beta br+\gamma pq)x^2+(\alpha\beta r+\beta\gamma p+\gamma\alpha q)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

となり、x についての恒等式であるので、

$$a = pqr, \qquad d = -\alpha\beta\gamma$$

という関係が成り立ち、このことから、

$p,\ q,\ r$ は a（$P(x)$ の最高次の項の係数）の約数, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は d（$P(x)$ の定数項）の約数

となるので、②より k の値の候補は、

$$k = \pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$

となります。

(1) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$ とおくと、最高次の項の係数の約数は「1」のみ、定数項の約数は「1, 2, 3, 6」であるので、$P(k) = 0$ となる k の候補は、

$$k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

になります。この数の中から、$P(x)$ に代入して $P(k) = 0$ となるものを探すと、

$$P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 6 = 0$$

が見つかるので、$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつことがわかります。そこで、$P(x)$ を $x - 1$ で割り算をします。自分の計算しやすい方法でかまいませんが、ここでは組立除法を利用すると、

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & -11 & 6 \\ & & 1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

となるので、$P(x)$ は

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x - 6)$$

と表すことができます。さらに、「$x^2 + 5x - 6$」の部分が因数分解できるので、公式を利用して、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x + 6)(x - 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 6) \end{aligned}$$

(2) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ とおくと、最高次の項の係数の約数は「1, 2」、定数項の約数も「1, 2」であるので、$P(k) = 0$ となる k の候補は、

$$k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm\frac{1}{2}$$

になります。この数の中から、$P(x)$ に代入して $P(k) = 0$ となるものを探すと、

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$$

が見つかるので、$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつことがわかります。そこで、$P(x)$ を $x - 1$ で組立除法を利用して割り算すると、

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

となるので、$P(x)$ は

$$P(x) = (x-1)(2x^2+3x-2)$$

と表すことができます。さらに、「$2x^2+3x-2$」の部分が因数分解できるので、公式を利用して、

$$P(x) = (x-1)(2x-1)(x+2)$$

(3) $P(x) = x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ とおくと、最高次の項の係数の約数は「1」のみ、定数項の約数は「1, 2, 3, 4, 6, 12」であるので、$P(k)=0$ となる k の候補は、

$$k = \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$$

になります。この数の中から、$P(x)$ に代入して $P(k)=0$ となるものを探すと、

$$P(1) = 1^4+2\cdot1^3-7\cdot1^2-8\cdot1+12 = 0$$

が見つかるので、$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつことがわかります。そこで、$P(x)$ を $x-1$ で組立除法を利用して割り算すると、

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

となるので、$P(x)$ は

$$P(x) = (x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$$

と表すことができます。
ここで、$Q(x) = x^3+3x^2-4x-12$ とおき、再度因数定理を利用します。最高次の項の係数と定数項の約数は、$P(x)$ のときと同じであるので、$Q(x)$ に代入して $Q(k)=0$ となるものを探すと、

$$Q(2) = 2^3+3\cdot2^2-4\cdot2-12 = 0$$

が見つかるので、$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつことがわかります。そこで、$x-2$ で $Q(x)$ を割り算すると、

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

となるので、$Q(x)$ は、

$$Q(x) = (x-2)(x^2+5x+6)$$

となります。
よって、$P(x)$ は

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^3+3x^2-4x-12) \\ &= (x-1)(x-2)(x^2+5x+6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

のように因数分解できることになります。

5　高次方程式

5.1　因数分解の公式を利用

整式 $P(x)$ が x の n 次式であるとき、$P(x)=0$ を x の n **次方程式**といい、3 次以上の方程式である場合には**高次方程式**といいます。

2 次方程式であれば、2 次方程式の解の公式を用いることにより、どのような 2 次方程式でも解くことが可能ですが、高次方程式の場合にはそうはいきません。そのため、高次方程式を解く場合にはまず、「次数を下げる」必要があります。

3 次以上の整式 $P(x)$ が、

$$P(x)=f(x)\cdot g(x)$$

のように因数分解できるとき、高次方程式 $P(x)=0$ は、

$$f(x)\cdot g(x)=0$$

と変形でき、

$$f(x)=0 \quad \text{または} \quad g(x)=0$$

を満たす x が、この高次方程式の解ということになります。このとき、$f(x),\ g(x)$ は $P(x)$ よりも次数が低くなり、1 次式、2 次式であれば今まで学習してきた解法で解を求めることができ、3 次以上であれば再度因数分解を行って 2 次以下の整式にすればよいことになります。

また、一般的に n 次方程式であれば n 個の解をもつことが知られています。

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が、

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

と因数分解できれば、

$$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

という 3 つの解をもち、

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)=0$$

のように因数分解できたときは、

$$x=\alpha,\ \beta$$

が解となります。ただし、厳密には、

$$x=\alpha,\ \alpha,\ \beta$$

という 3 つの解になっていて、2 つの解 α が重なって 1 つになっていると考えることができるので、重なった解 α を **2 重解（重解）**といい、同様にして、

$$(x-\alpha)^3=0$$

のように因数分解できたときは、

$$x = \alpha,\ \alpha,\ \alpha$$

という 3 つの解が重なって

$$x = \alpha$$

という解になっていると考えることができ、この解 α を **3 重解**といいます。

【例題 5 − 1】

次の方程式を解きなさい。

(1) $8x^3 + 1 = 0$

(2) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$

(3) $x^4 - 4 = 0$

(4) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

<解説>

高次方程式 $P(x) = 0$ を解くにはまず、$P(x)$ を 1 次式、または、2 次式の積に因数分解することを考えます。ここでは、公式を利用して因数分解をし、方程式を解いていきます。

(1) 左辺は

$$(2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

と因数分解できるので、

$$2x + 1 = 0 \quad \text{または} \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

を満たす x が方程式の解になります。

(i) $2x + 1 = 0$ のとき

$$x = -\frac{1}{2}$$

(ii) $4x^2 - 2x + 1 = 0$ のとき

解の公式を利用して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1}}{4} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4} \end{aligned}$$

よって、$8x^3 + 1 = 0$ の解は

$$x = -\frac{1}{2},\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$$

(2) 左辺は x の複 2 次式になっているので、$x^2 = X$ とすると、

$$X^2 - 10X + 16 = 0$$

と表すことができ、左辺を因数分解すると

$$(X - 2)(X - 8) = 0$$

となります。ここで、X を元に戻せば

$$(x^2-2)(x^2-8)=0$$

となり、

$$x^2-2=0 \quad \text{または} \quad x^2-8=0$$

を満たす x が方程式の解になります。

(i) $x^2-2=0$ のとき

$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

または、

$$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

(ii) $x^2-8=0$ のとき

$$x^2=8$$
$$x=\pm2\sqrt{2}$$

または、

$$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$$
$$x=\pm2\sqrt{2}$$

よって、$x^4-10x^2+16=0$ の解は

$$x=\pm\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{2}$$

(3) 左辺は x の複 2 次式になっているので、$x^2=X$ とすると、

$$X^2-4=0$$

と表すことができ、左辺を因数分解すると

$$(X+2)(X-2)$$

となります。ここで、X を元に戻せば

$$(x^2+2)(x^2-2)=0$$

となり、

$$x^2+2=0 \quad \text{または} \quad x^2-2=0$$

を満たす x が方程式の解になります。

(i) $x^2+2=0$ のとき

$$x^2=-2$$
$$x=\pm\sqrt{2}i$$

(ii) $x^2-2=0$ のとき

$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

よって、$x^4-4=0$ の解は

$$x=\pm\sqrt{2}i,\ \pm\sqrt{2}$$

(4) 左辺は x の複 2 次式になっているので、$x^2 = X$ とすると、

$$X^2 + X + 1 = 0$$

と表すことができますが、このまま公式を利用して因数分解することができません。そこで、平方の差の形を作ります。

$$\begin{aligned} X^2 + X + 1 &= 0 \\ (X^2 + 1) + X &= 0 \\ (X^2 + 1 + 2X - 2X) + X &= 0 \\ (X^2 + 2X + 1) - 2X + X &= 0 \\ (X+1)^2 - X &= 0 \end{aligned}$$

ここで、X を元に戻せば

$$\begin{aligned} (x^2+1)^2 - x^2 &= 0 \\ \{(x^2+1) + x\}\{(x^2+1) - x\} &= 0 \\ (x^2+x+1)(x^2-x+1) &= 0 \end{aligned}$$

となり、

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - x + 1 = 0$$

を満たす x が方程式の解になります。

(i) $x^2 + x + 1 = 0$ のとき
解の公式を利用して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

(ii) $x^2 - x + 1 = 0$ のとき
解の公式を利用して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

よって、$x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

5.2 因数定理の利用

【例題 5 − 2】

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3+6x^2+5x-12=0$　　(2) $2x^3+x^2-4x-3=0$

＜解説＞

高次方程式 $P(x)=0$ を解くにはまず、$P(x)$ を 1 次式、または、2 次式の積に因数分解することを考えますが、公式が利用できない場合、因数定理を利用して因数分解を行います。もちろん、公式が利用できる場合においても因数定理を用いて因数分解することも可能です。

(1) $P(x)=x^3+6x^2+5x-12$ とおくと、

$$P(1)=1^3+6\cdot1^2+5\cdot1-12=0$$

となるので、$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち、

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 6 & 5 & -12 \\ & & 1 & 7 & 12 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=x^3+6x^2+5x-12\\ &=(x-1)(x^2+7x+12)\\ &=(x-1)(x+3)(x+4) \end{aligned}$$

と因数分解できます。よって、方程式 $x^3+6x^2+5x-12=0$ の解は、

$$(x-1)(x+3)(x+4)=0$$

より、

$$x=1,\ -3,\ -4$$

(2) $P(x)=2x^3+x^2-4x-3$ とおくと、

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3+(-1)^2-4\cdot(-1)-3=0$$

となるので、$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち、

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -4 & -3 \\ & & -2 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=2x^3+x^2-4x-3\\ &=(x+1)(2x^2-x-3)\\ &=(x+1)(2x-3)(x+1)\\ &=(x+1)^2(2x-3) \end{aligned}$$

と因数分解できます。よって、方程式 $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$ の解は、

$$(x+1)^2(2x-3) = 0$$

より、

$$x = -1,\ \frac{3}{2}$$

5.3 1 の 3 乗根の性質

1 の 3 乗根を x とすると、x を 3 乗すれば 1 になるので、

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ x^3 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x^2+x+1) &= 0 \end{aligned}$$

と表すことができ、

$$x - 1 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + x + 1 = 0$$

を満たす x が、1 の 3 乗根になります。

(i) $x - 1 = 0$ のとき

$$x = 1$$

(ii) $x^2 + x + 1 = 0$ のとき
解の公式を利用して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

が**1 の 3 乗根（立方根）**になります。

【例題 5 − 3】

1. 1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω（「オメガ」と読みます）とするとき、次のことを示しなさい。
   (1) ω^2 も 1 の 3 乗根である。　(2) $\omega^3 = 1$　(3) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

2. 1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とするとき、次の式の値を求めなさい。
   (1) ω^7　(2) $\omega^4 + \omega^2 + 1$

<解説>

1. (1) 1 の 3 乗根のうち虚数であるものは $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ であったので、この 2 つのうちいずれかが ω になります。そこで、

$$\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \qquad \omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

とすると、1 の 3 乗根は

$$1,\ \omega_1,\ \omega_2$$

と表せます。

ここで、1 の 3 乗根のうち虚数である ω_1, ω_2 をそれぞれ 2 乗すると、

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(-1)^2+2\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{2^2} \\ &= \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4} \\ &= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \omega_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(-1)^2-2\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{2^2} \\ &= \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega_1\end{aligned}$$

となり、1 の 3 乗根の虚数であるものの 1 つを 2 乗するともう片方になり、ω^2 も 1 の 3 乗根であることがわかります。このことから、1 の 3 乗根は

$$1,\ \omega,\ \omega^2$$

のように表すことができます。

(2) ω は 1 の 3 乗根であるので、3 乗すればもちろん 1 になります。つまり、

$$\omega^3 = 1$$

(3) ω は $x^2+x+1=0$ の解として求められたので、

$$\omega^2+\omega+1=0$$

が成り立ちます。

2. 1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω とすると、

(i) 1 の 3 乗根は $1,\ \omega,\ \omega^2$　(ii) $\omega^3=1$　(iii) $\omega^2+\omega+1=0$

という性質がありました。このことを利用することで、ω の多項式に関する問題を簡単に解くことができます。

(1)

$$\begin{aligned}\omega^7 &= (\omega^3)^2\omega \\ &= 1^2\cdot\omega = \omega\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\omega^4+\omega^2+1 &= \omega^3\omega+\omega^2+1 \\ &= \omega^2+\omega+1 = 0\end{aligned}$$

5.4 高次方程式の係数決定①

【例題 5 − 4】

方程式 $x^3 + ax^2 - 3x - 6 = 0$ の解の 1 つが -2 であるとき、実数 a の値と他の解を求めなさい。

＜解説＞

$x = -2$ が方程式の解であるので、方程式 $x^3 + ax^2 - 3x - 6 = 0$ に代入しても等式は成り立ちます。そこで、代入して a の値を求めると、

$$\begin{aligned}(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 6 &= 0 \\ -8 + 4a + 6 - 6 &= 0 \\ 4a &= 8 \\ a &= 2\end{aligned}$$

となります。

このとき、方程式は

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$$

となり、$x = -2$ を解にもつので、左辺は $x + 2$ を因数にもちます。

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -3 & -6 \\ & & -2 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

すると、左辺は

$$(x + 2)(x^2 - 3) = 0$$

と変形できるので、他の解は

$$x^2 - 3 = 0$$

より

$$x = \pm\sqrt{3}$$

5.5　高次方程式の係数決定②

【例題 5 − 5】

方程式 $x^3-7x^2+ax+b=0$ の解のうち 1 つが $3-i$ です。このとき、実数 a, b の値と残りの解を求めなさい。

＜解説＞

$x=3-i$ が方程式の解であるので、方程式 $x^3-7x^2+ax+b=0$ に代入しても等式は成り立ちます。そこで、方程式に代入すると

$$\begin{aligned}(3-i)^3-7(3-i)^2+a(3-i)+b&=0\\27-27i-9+i-7(9-6i-1)+a(3-i)+b&=0\\18-26i-7(8-6i)+a(3-i)+b&=0\\18-26i-56+42i+3a-ai+b&=0\\(3a+b-38)+(16-a)i&=0\end{aligned}$$

ここで、a, b は実数であるので、$3a+b-38$, $16-a$ も実数です。よって、複素数の相等条件より、

$$\begin{cases}3a+b-38=0 & \cdots\cdots ①\\16-a=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

という関係が成り立つので、①, ②より

$$a=16, \qquad b=-10$$

このとき、方程式は

$$x^3-7x^2+16x-10=0$$

となり、

$$P(x)=x^3-7x^2+16x-10$$

とおくと、

$$P(1)=1^3-7\cdot1^2+16\cdot1-10=0$$

となるので、$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち、

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & -7 & 16 & -10\\ & & 1 & -6 & 10\\\hline & 1 & -6 & 10 & \boxed{0}\end{array}$$

より

$$P(x)=(x-1)(x^2-6x+10)$$

と因数分解することができます。よって、方程式は

$$(x-1)(x^2-6x+10)=0$$

となり、$x^2 - 6x + 10 = 0$ より、解の公式を利用して、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 10}}{1} \\ &= 3 \pm i \end{aligned}$$

となるので、他の解は

$$x = 1,\ 3 + i$$

となります。

ここで、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

のように、解に根号を含む場合には、根号についている符号が反対になっているものがそれぞれ解になります。このことから、2 次方程式の解が虚数解である場合には、

$$x = p + qi,\ p - qi$$

のように虚数単位 i $(= \sqrt{-1})$ についている符号が反対、つまり、共役な複素数が解になることになります。

この例題においても、$x = 3 - i$ が解であれば、その共役な複素数である $3 + i$ も解になります。このような性質があることもしっかり理解しておきましょう。