【数学 I】図形の計量

まなびの学園

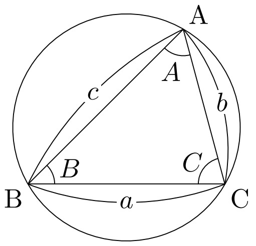
http://www.manabino-academy.com

目次

1　正弦定理・余弦定理とその応用

1.1　正弦定理

三角形の 3 つの頂点を通る円は 1 つに決まり、そのような円を**外接円**といい、三角形の外側で接する円になります。



そこで、図のように、△ABC の 3 つの角の大きさを $A,\ B,\ C$、また、それらの角の対辺の長さを $a,\ b,\ c$ とし、△ABC の外接円を考えます。

このとき、△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

という関係が成り立ち、これを**正弦定理**といいます。

【例題 1 − 1】

△ABC の外接円の半径を R としたとき、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

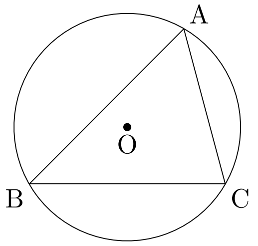
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

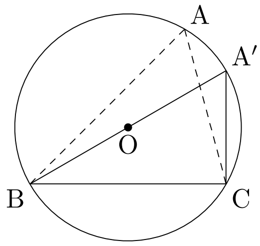
＜解説＞

△ABC の外接円の中心を O、半径を R とします。

(ｉ) A が鋭角（$0^\circ<A<90^\circ$）のとき

A が鋭角である次の図（左）のような △ABC と外接円を考えます。





ここで、その図から辺 AB が外接円の直径となるように、頂点 A を円周上で移動させます。（点 A′）

すると、△A′BC は ∠C = 90° の直角三角形になり、

$$\sin A'=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A'B}}=\frac{a}{2R}\ \cdots\cdots\ ①$$

また、円周角の定理から

$$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$$

となるので

$$\sin A=\sin A'\ \cdots\cdots\ ②$$

よって、①，②より

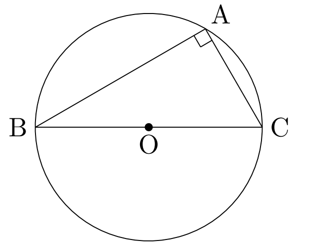
$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

つまり、

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(ii) A が直角（$a = 90^\circ$）のとき

A が直角である次の図のような △ABC と外接円を考えます。



このとき、

$$\sin 90^\circ = 1$$

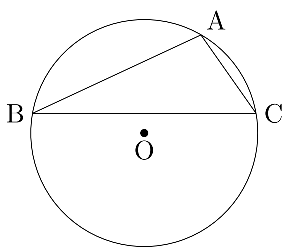
であるので、

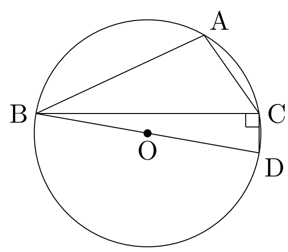
$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= 2R \\ a &= 2R \\ \frac{a}{1} &= 2R \\ \frac{a}{\sin 90^\circ} &= 2R \\ \frac{a}{\sin A} &= 2R \end{aligned}$$

と表すことができます。

(iii) A が鈍角のとき

A が鈍角である次の図（左）のような △ABC と外接円を考えます。





ここで、点 B を通る直径を引き BD とすると、△BDC は ∠DCB $= 90^\circ$ の直角三角形になります。このことから、

$$\sin D = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{2R} \quad \cdots\cdots ③$$

また、円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° になるので、

$$\begin{aligned} A + D &= 180^\circ \\ D &= 180^\circ - A \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

よって、③，④より、

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \frac{a}{2R} \\ \sin A &= \frac{a}{2R} \\ \frac{a}{\sin A} &= 2R \end{aligned}$$

∠B, ∠C についても同様にして考えることで、

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

となります。

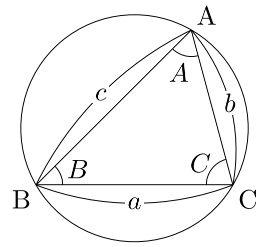
以上のことから、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立ちます。

1.2　正弦定理の利用

正弦定理は、右図のような △ABC と外接円において、次のように正弦（sin）について成り立つ関係式でした。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad (R：\triangle\mathrm{ABC}\text{ の外接円の半径})$$

このとき、正弦定理の

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

という部分に着目すると、

$$\frac{\text{辺}}{\sin\text{角}}=\frac{\text{辺}}{\sin\text{角}}$$

のように、ある角とその対辺に関する関係式になっているので、このうちの 3 つの情報が得られれば残りの 1 つを求めることができます。そのため、

- 1 辺と 2 角がわかっていて、他の辺の長さを求めるとき
- 2 辺と 1 角がわかっていて、他の角の大きさを求めるとき

という問題において、この正弦定理を利用することができます。

また、

$$\frac{c}{\sin C}=2R$$

という部分に着目すれば、

$$\frac{\text{辺}}{\sin\text{角}}=2R$$

のように、ある角とその対辺に関する関係式であることは同じですが、外接円の半径がからんだ等式になっているので、

- 外接円の半径を求めるとき

に正弦定理を利用できることになります。

【例題 1 − 2】

△ABC で、次の値を求めなさい。

(1) $a=5,\ A=60^\circ,\ B=45^\circ$ のとき、b

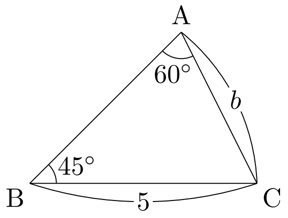
(2) $A=40^\circ,\ B=80^\circ,\ c=6$ のときの外接円の半径 R

＜解説＞

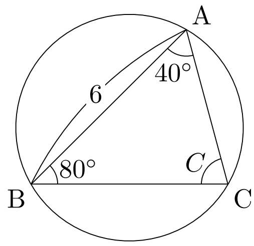
図形に関する問題なので、正確であればもちろんそのほうがいいのですが、どのような状況になっているのか把握するために、おおよそでいいので簡単な図をかくようにします。

(1) 1 辺と 2 角がわかっていて他の辺の長さを求めるので、正弦定理を用いて、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$
$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$
$$b = 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ}$$
$$= 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{3}$$



(2) 三角形のすべての内角の和は 180° であるので、



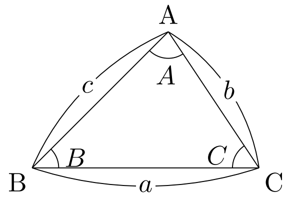
$$A + B + C = 180^\circ$$
$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$= 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$$

外接円の半径を求めるので、正弦定理を用いて、

$$2R = \frac{c}{\sin C} \quad \left(= c \cdot \frac{1}{\sin C}\right)$$
$$R = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ}$$
$$= \frac{6}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\cancel{6}^{\,2}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}$$

1.3 余弦定理

次の図のような △ABC において、



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

のように、

「対辺の平方 = 角をはさむ 2 辺の平方の和 − 2 × 角をはさむ 2 辺の積 × 角の余弦の値」

という関係が成り立ち、この余弦（cos）を用いた定理を、**余弦定理**といいます。

【例題 1 − 3】

△ABC において、

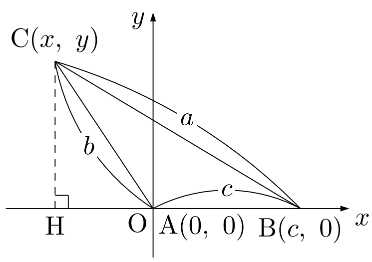
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

が成り立つことを証明しなさい。

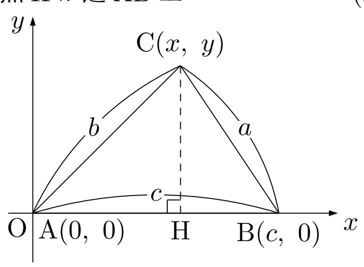
＜解説＞

座標平面上に △ABC を、頂点 A が原点、辺 AB が x 軸の正の部分、頂点 C が x 軸の上側にあるようにとり、さらに、頂点 C から x 軸に下ろした垂線の足を H とします。このとき、点 H の位置は次のような 3 つのパターンが考えられます。

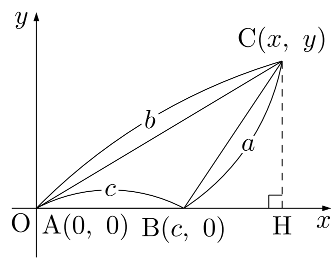
(i) 点 H が辺 AB の左側



(ii) 点 H が辺 AB 上



(iii) 点 H が辺 AB の右側



点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると、このいずれの場合においても、三角比の定義から

$$\frac{x}{b} = \cos A \qquad\qquad \frac{y}{b} = \sin A$$
$$x = b\cos A \qquad\qquad y = b\sin A$$

となるので、頂点 C の座標は

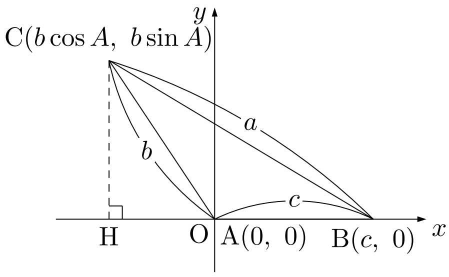
$$\mathrm{C}(b\cos A,\ b\sin A)$$

となります。

(i) 点 H が辺 AB の左側にあるとき

△BCH に三平方の定理を用いて、

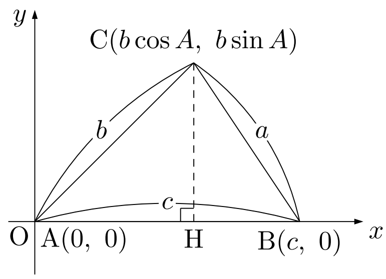
$$\begin{aligned} a^2\ (= \mathrm{BC}^2) &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$



(ii) 点 H が辺 AB 上にあるとき

△BCH に三平方の定理を用いて、

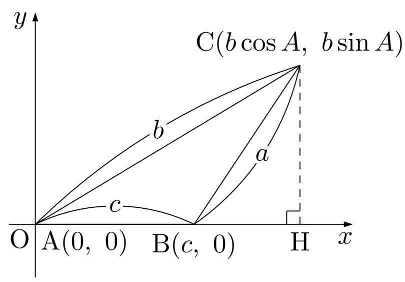
$$\begin{aligned} a^2\ (= \mathrm{BC}^2) &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$



(iii) 点 H が辺 AB の右側にあるとき

△BCH に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} a^2\ (= \mathrm{BC}^2) &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (b\cos A - c)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$



b^2, c^2 についても同様に考えることで、

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

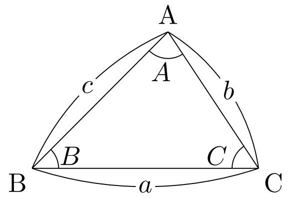
が成り立ちます。

1.4 余弦定理の利用

余弦定理は、

「対辺の平方 = 角をはさむ 2 辺の平方の和 − 2 × 角をはさむ 2 辺の積 × 角の余弦の値」

という関係式であったので、右のような三角形では、



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

となりました。

この式からもわかるように、余弦定理は、2 辺とその間の角と残りの辺との関係式であるので、

「2 辺とその間の角がわかっていて、残りの辺を求めるとき」

に利用できます。

また、余弦定理は、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2, \qquad 2ca\cos B = c^2 + a^2 - b^2, \qquad 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

のように変形することができ、これらの式は 3 辺とある角との関係式になります。つまり、

「3 辺がわかっていてある角を求めるとき」

にも余弦定理を利用することができます。

【例題 1 − 4】

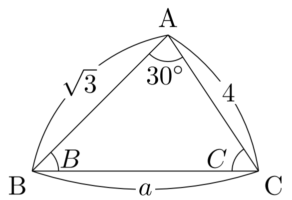
△ABC で、次の値を求めなさい。

(1) $b = 4,\ c = \sqrt{3},\ A = 30^\circ$ のとき、a　　(2) $a = 3,\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{3}$ のとき、A

<解説>

公式（余弦定理）を利用しやすくするために、三角形がどのような状況になっているのかを、簡単な図をかいて確認するようにしましょう。

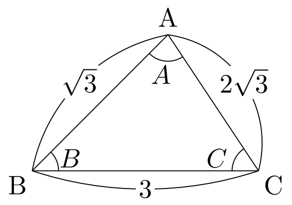
(1) 2 辺とその間の角がわかっていて残りの辺を求めるので、余弦定理を用いて、



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}\cos 30^\circ \\ &= 16 + 3 - \cancel{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \\ &= 19 - 12 = 7 \end{aligned}$$

$a > 0$ より　$a = \sqrt{7}$

(2) 3 辺がわかっていてある角を求めるので、余弦定理を用いて、



$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
&= \frac{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-3^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\\
&= \frac{12+3-9}{2\cdot 2\cdot 3}\\
&= \frac{\cancel{6}}{2\cdot \cancel{2\cdot 3}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

よって、

$$A = 60^\circ$$

1.5 三角形の辺と角の大きさ

三角形は、その内角の大きさによって次のように分類されます。

- 鋭角三角形：3 つの内角がすべて鋭角である三角形
- 直角三角形：1 つの内角が直角である三角形（残りの 2 つの内角は鋭角）
- 鈍角三角形：1 つの内角が鈍角である三角形（残りの 2 つの内角は鋭角）

このとき、それぞれの三角形において、1 つ 1 つの内角の大きさについて調べてみると、三角形の内角のうち、2 つの内角はいずれの三角形においても鋭角になるので、残りの 1 つの角（3 つの内角のうち最大となる角）が鋭角、直角、鈍角のどれになるかが判別できれば、どの三角形になるのか分類できることになります。

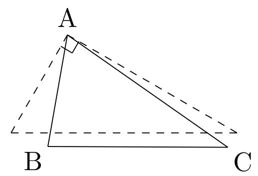
三角形の分類	1 つの内角	1 つの内角	1 つの内角
鋭角三角形	**鋭角**	鋭角	鋭角
直角三角形	**直角**	鋭角	鋭角
鈍角三角形	**鈍角**	鋭角	鋭角

そこで、△ABC において余弦定理を用いると、

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

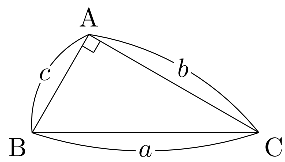
となったので、$b>0,\ c>0$ より $2bc>0$ であることから、この余弦定理を利用して次のような関係を導くことができます。

(ｉ) A が鋭角（$0^\circ < A < 90^\circ$）のとき



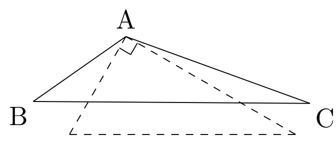
$$\begin{aligned}\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &> 0\\ b^2+c^2-a^2 &> 0\\ b^2+c^2 &> a^2\end{aligned}$$

(ii) A が直角（$A=90^\circ$）のとき



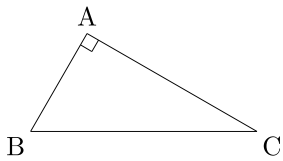
$$\begin{aligned}\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &= 0\\ b^2+c^2-a^2 &= 0\\ b^2+c^2 &= a^2 \quad (\text{三平方の定理})\end{aligned}$$

(iii) A が鈍角（$90^\circ < A < 180^\circ$）のとき



$$\begin{aligned}\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &< 0\\ b^2+c^2-a^2 &< 0\\ b^2+c^2 &< a^2\end{aligned}$$

式変形から 3 辺の長さの関係を導き出しましたが、このことを図形的に考えてみたいと思います。



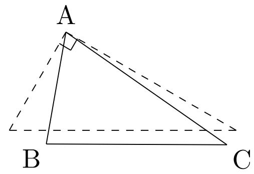
右の図のような直角三角形 ABC を基準にすると、△ABC は直角三角形なので三平方の定理が成り立ち、

$$b^2 + c^2 = a^2$$

となりますね。

ここで、b, c の長さはそのままに、∠A の大きさを変えると a の大きさも変わります。

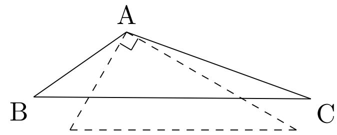
(i) A が鋭角（$0° < A < 90°$）のとき



$$b^2 + c^2 > a^2$$

（直角三角形のときよりも BC は短い）

(ii) A が鈍角（$90° < A < 180°$）のとき



$$b^2 + c^2 < a^2$$

（直角三角形のときよりも BC は長い）

このように直角三角形を基準にして考えると、鋭角や鈍角での 3 辺の長さの関係がイメージしやすいと思います。

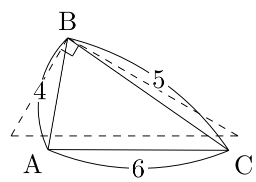
【例題 1 − 5】

次の △ABC が鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを判定しなさい。

(1) $a = 5,\ b = 6,\ c = 4$　(2) $a = 2\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{6},\ c = 6$　(3) $a = 8,\ b = 3,\ c = 7$

＜解説＞

三角形において、角の大小と対辺の大小は一致するという性質があります。



(1) $4 < 5 < 6$ より

$$c < a < b$$

であるので、最大辺は b。このことから、その対角である ∠B が最大角になります。また、

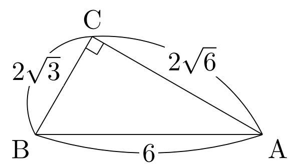
$$a^2 = 25, \qquad b^2 = 36, \qquad c^2 = 16$$

より

$$a^2 + c^2 > b^2$$

となるので、∠B は鋭角であることがわかります。つまり、最大角が鋭角であるので、残りの 2 つの角も鋭角になり、△ABC は鋭角三角形。

(2) $2\sqrt{3} < 2\sqrt{6} < 6$ より



$$a < b < c$$

であるので、最大辺は c。このことから、その対角である $\angle$C が最大角になります。また、

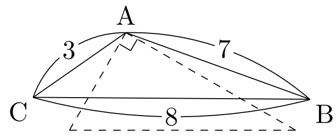
$$a^2 = 12, \qquad b^2 = 24, \qquad c^2 = 36$$

より

$$a^2 + b^2 = c^2$$

となるので、$\angle$C は直角であることがわかります。よって、$\triangle$ABC は直角三角形。

(3) $3 < 7 < 8$ より



$$b < c < a$$

であるので、最大辺は a。このことから、その対角である $\angle$A が最大角になります。また、

$$a^2 = 64, \qquad b^2 = 9, \qquad c^2 = 49$$

より

$$b^2 + c^2 < a^2$$

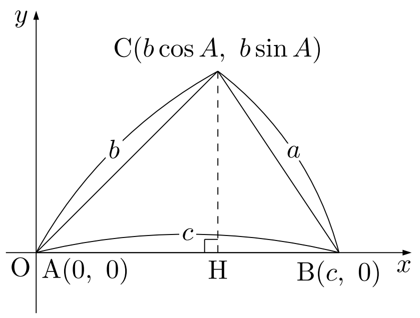
となるので、$\angle$A は鈍角であることがわかります。よって、$\triangle$ABC は鈍角三角形。

2　三角形の面積

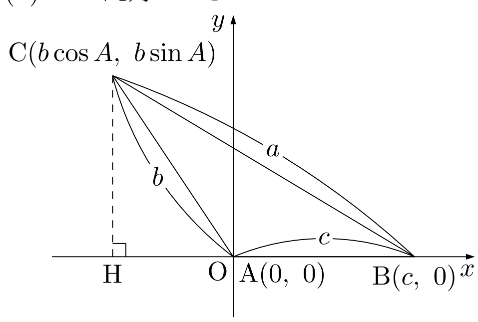
2.1　三角形の面積

座標平面上に △ABC を、頂点 A が原点、辺 AB が x 軸の正の部分、頂点 C が x 軸の上側にあるようにとり、さらに、頂点 C から x 軸に下ろした垂線の足を H とします。

(i) A が鋭角のとき



(ii) A が鈍角のとき



上の図のように、∠A が鋭角のとき、鈍角のときのいずれの場合においても、△ABC の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\times \text{底辺}\times\text{高さ}\\ &= \frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times\mathrm{CH}\end{aligned}$$

になり、また、

$$\mathrm{AB} = c, \qquad \mathrm{CH} = b\sin A$$

であるので、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\sin A\\ &= \frac{1}{2}bc\sin A\end{aligned}$$

と表すことができ、三角比を利用することで、2 辺の長さとその間の角の大きさがわかれば、三角形の面積を求めることができます。また、他の 2 辺とその間の角についても同様の手順を行うことで、

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

となり、このことから、三角形の面積の公式は、

$$\text{三角形の面積} = \frac{1}{2}\times 2\text{ 辺の積}\times 2\text{ 辺がはさむ角の正弦の値}$$

と表されることになります。

【例題 2 − 1】

次の △ABC の面積を求めなさい。

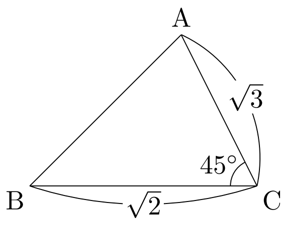
(1) $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3},\ C=45^\circ$　　(2) $b=\sqrt{3},\ c=2,\ A=60^\circ$

＜解説＞

三角形の公式を利用するときには、長さ、角の状況を確認するために簡単な図（正確な図でなくて問題ありません）をかいておきましょう。

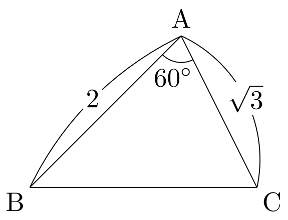
(1) 与えられた条件（長さ・角）をあてはめた三角形は右図のようになるので、

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$



(2) 与えられた条件（長さ・角）をあてはめた三角形は右図のようになるので、

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sin 60^\circ \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$



2.2 ヘロンの公式

三角形の 3 辺の長さが与えられている場合に三角形の面積を求めるには、

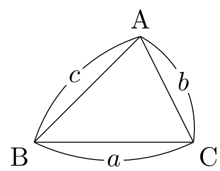
① 三角形の面積の公式を利用するために、正弦の値が必要
② 正弦の値を求めるためにはまず、余弦の値が必要

であるので、

(i) 余弦定理を用いて余弦の値を求める
(ii) 求めた余弦の値を利用して正弦の値を求める
(iii) 三角形の面積の公式を利用する

という手順が一般的な解法になります。

この解法を右図のような三角形に用いることで、次に示す**ヘロンの公式**と呼ばれる三角形の面積を求める公式を導出することができます。



$$\triangle \mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(\text{ただし、} s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

以下にヘロンの公式の導出を示します。

(i) 余弦定理を用いて余弦の値を求める

△ABC において余弦定理を用いると、

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(ii) 求めた余弦の値を利用して正弦の値を求める

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1-\cos^2 A \\
&= (1+\cos A)(1-\cos A) \\
&= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} \\
&= \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \\
&= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

とすると、$a+b+c=2s$ より、

$$a+b=2s-c, \qquad b+c=2s-a, \qquad a+c=2s-b$$

と表されるので、

$$
\begin{aligned}
\sin^2 A &= \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{(2bc)^2} \\
&= \frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot \cancel{2}(s-c)\cdot \cancel{2}(s-b)}{\cancel{2^2}\cdot (bc)^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{(bc)^2}
\end{aligned}
$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より、$\sin A > 0$ となるので、

$$
\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}
$$

(iii) 三角形の面積の公式を利用する

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}bc\sin A \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{bc}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{2(s-a)(s-b)(s-c)}}{\cancel{bc}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}
$$

ヘロンの公式に三角形の 3 辺の値を代入すれば面積を求めることができますが、

$$
s = \frac{a+b+c}{2}
$$

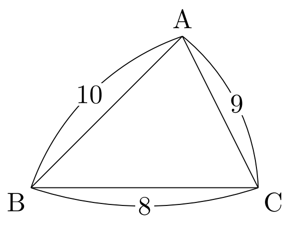
の値が簡単にならないような場合、計算が面倒になってしまう場合があるので、3 辺が与えられた三角形の面積を求めるときに必ず使えばいいというものでもありません。また、3 辺が与えられた三角形の面積を求めるような問題では、一般的な解法のような誘導がされている問題も多くあります。そのため、ヘロンの公式は参考程度に覚えておいて、導出の流れ・考え方をしっかり理解するようにしてください。

【例題 2 − 2】

$\triangle$ABC で、$a = 8,\ b = 9,\ c = 10$ のとき、次の値を求めなさい。

(1) $\cos A$　　(2) $\sin A$　　(3) $\triangle$ABC の面積

(1) 三角形の 3 辺の長さが与えられているので余弦定理より、



$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= \frac{9^2+10^2-8^2}{2\cdot 9\cdot 10} \\
&= \frac{81+100-64}{2\cdot 9\cdot 10} \\
&= \frac{\cancel{117}^{\,13}}{2\cdot \cancel{9}\cdot 10} \\
&= \frac{13}{20}
\end{aligned}
$$

(2) $0^\circ < A < 180^\circ$ より、$\sin A > 0$ であるので、

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \cos^2 A &= 1\\ \sin A &= \sqrt{1-\cos^2 A}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{13}{20}\right)^2}\\ &= \sqrt{1-\frac{169}{400}}\\ &= \sqrt{\frac{231}{400}}\\ &= \frac{\sqrt{231}}{20}\end{aligned}$$

(3) 三角形の面積の公式より、△ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{2}\cdot 9\cdot \cancel{10}\cdot\frac{\sqrt{231}}{\cancel{20}\,{}^{2}}\\ &= \frac{9\sqrt{231}}{4}\end{aligned}$$

2.3　四角形の面積

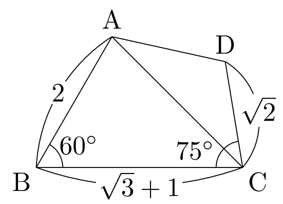
台形、平行四辺形、ひし形のような四角形には面積の公式がありますが、それ以外の四角形には面積の公式が利用できません。そこで、四角形の面積を求めるには、四角形を三角形に分割し、三角形の面積の公式を利用します。

【例題 2 − 3】

下の図の四角形 ABCD で、$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=\sqrt{3}+1,\ \angle\mathrm{B}=60^\circ,\ \angle\mathrm{C}=75^\circ$ のとき、次の問いに答えなさい。

(1) AC の長さ、および $\angle\mathrm{ACD}$ の大きさを求めなさい。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めなさい。



＜解説＞

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ に着目すると、2 辺とその間の角の条件が与えられているので、余弦定理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}\\
&= 2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ\\
&= 4+3+2\sqrt{3}+1-2\cdot\cancel{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\\
&= 8+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2=6
\end{aligned}
$$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$

また、$\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} &= \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}\\
\sin\angle\mathrm{ACB} &= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}\\
&= \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\sin 60^\circ\\
&= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{\cancel{6}}^{\,2}}\cdot\frac{\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{ACB}<75^\circ$ であるので、

$$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$$

このことから、

$$
\begin{aligned}
\angle C = \angle ACB + \angle ACD &= 75^\circ \\
\angle ACD &= 75^\circ - \angle ACB \\
&= 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ
\end{aligned}
$$

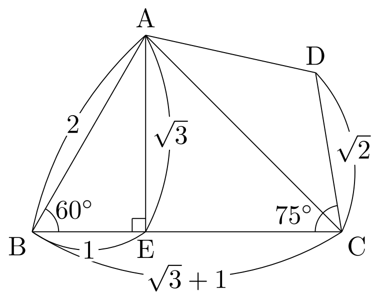
(2) 四角形 ABCD を △ABC と △ACD に分割して

$$
\begin{aligned}
\text{四角形 ABCD} &= \triangle ABC + \triangle ACD \\
&= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC + \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1) \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \sin 30^\circ \\
&= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{2 \cdot \cancel{2}} \\
&= \frac{3+2\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

＜別解＞

30°, 45°, 60° という角があった場合、補助線を引いて直角三角形を作ると、解きやすくなる場合が多くあります。

この例題でも、頂点 A から辺 BC に垂線を下ろし、BC との交点を E とすると、△ABE は 60° の角を持つ直角三角形になります。



このとき、60° の角を持つ直角三角形の辺の比の関係から

$$BE : AB : AE = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

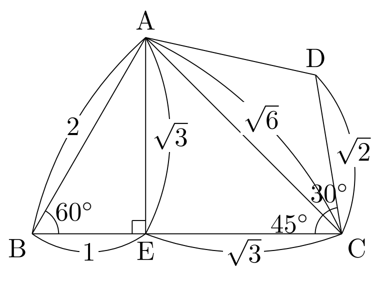
であるので、

$$BE = 1, \qquad AE = \sqrt{3}$$

となります。

すると、

$$
\begin{aligned}
BC = BE + EC &= \sqrt{3}+1 \\
1 + EC &= \sqrt{3}+1 \\
EC &= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$



となるので、△AEC は AE = EC で ∠AEC = 90° の直角二等辺三角形であることがわかります。

このことから、直角三角形の辺の比の関係は

$$AE : EC : AC = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

であるので、

$$AC = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

また、$\angle\mathrm{ACE} = 45^\circ$ であるので、

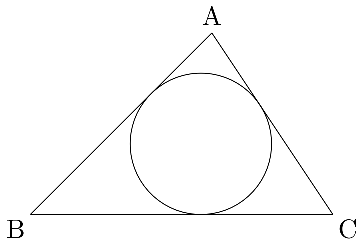
$$
\begin{aligned}
\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{ACE} + \angle\mathrm{ACD} &= 75^\circ \\
45^\circ + \angle\mathrm{ACD} &= 75^\circ \\
\angle\mathrm{ACD} &= 30^\circ
\end{aligned}
$$

となります。

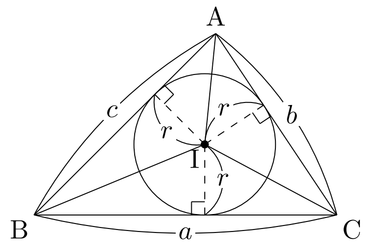
このように直角三角形を利用すれば、正弦定理や余弦定理を用いることなく、簡単に辺の長さや角の大きさを求めることができる場合があります。このような考え方も問題を解く際に是非取り入れてみてください。

2.4　三角形の内接円と面積

右の図のように、△ABC に対して内側で 3 辺 AB, BC, CA に接する円を、△ABC の**内接円**といいます。



ここで、△ABC の内接円の中心を I、半径を r とし、△ABC を点 I を基準に 3 つに分割すると、



$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} + \triangle\mathrm{IAB}$$

となり、それぞれの三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{IBC} = \frac{1}{2}ar, \quad \triangle\mathrm{ICA} = \frac{1}{2}br, \quad \triangle\mathrm{IAB} = \frac{1}{2}cr$$

であるので、△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

という関係が成り立つことがわかります。

この関係式から、三角形の内接円の半径は、三角形の 3 辺の長さと面積がわかれば求めることができます。

【例題 2 − 4】

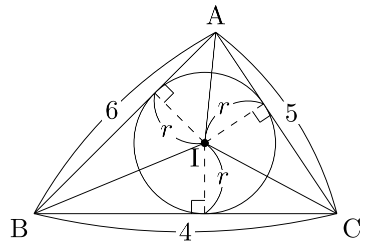
$a = 4,\ b = 5,\ c = 6$ である △ABC の内接円の半径を求めなさい。

＜解説＞

△ABC の 3 辺の長さがすでにわかっているので、内接円の半径を求めるためにはまず、面積を求める必要があります。そこで、3 辺の長さから三角形の面積を求める手順に沿って解いていきます。（ヘロンの公式を利用して三角形の面積を求めてもかまいません。）

(ｉ) 余弦定理を用いて余弦の値を求める

余弦定理より、



$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} \\ &= \frac{\cancel{45}^{\,3}}{2\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}^{\,2}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(ii) 求めた余弦の値を利用して正弦の値を求める

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$ であるので、$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1-\cos^2 A}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

($\cos A = \dfrac{3}{4}$ を満たす直角三角形を利用して求めてもかまいません。)

(iii) 三角形の面積の公式を利用する

△ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 5\cdot \cancel{6}^{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

よって、△ABC の内接円の半径 r は、$S = \dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ より

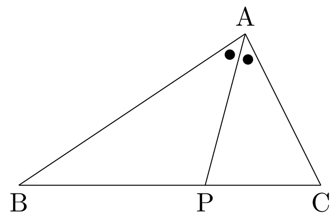
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r(4+5+6) &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\\ \frac{15}{2}r &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\\ r &= \frac{\cancel{15}\sqrt{7}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{15}} = \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

2.5　三角形の内角の二等分線の性質

右の図のような $\triangle\mathrm{ABC}$ では、$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると、

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

という関係が成り立ち、 内角の二等分線とその対辺の交点は、内角をはさむ 2 辺の比に対辺を内分する点になります。

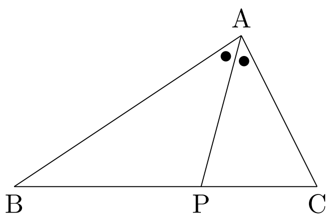


【例題 2 － 5】

次の図のような $\triangle\mathrm{ABC}$ で、$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると、

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

という関係が成り立つことを証明しなさい。

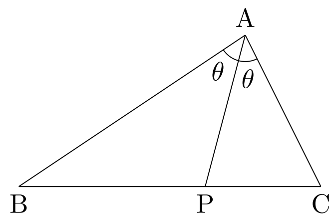


＜解説＞

AP が $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるので、

$$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{PAC} = \theta$$

とします。



$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{APC}$ はについて、底辺をそれぞれ BP, PC だとすると、それぞれ高さは等しくなるので面積の比は底辺の比と等しくなり、

$$\triangle\mathrm{ABP} : \triangle\mathrm{APC} = \mathrm{BP} : \mathrm{PC}$$

また、$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{APC}$ の面積は、三角比を利用して

$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta, \qquad \triangle\mathrm{APC} = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta$$

と表すことができるので、以上のことから

$$\begin{aligned}\mathrm{BP} : \mathrm{PC} &= \triangle\mathrm{ABP} : \triangle\mathrm{APC}\\ &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\mathrm{AB}\cdot\cancel{\mathrm{AP}\sin\theta} : \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cancel{\mathrm{AP}}\cdot\mathrm{AC}\cancel{\sin\theta}\\ &= \mathrm{AB} : \mathrm{AC}\end{aligned}$$

という関係を導出することができます。

【証明】

$\triangle$ABP と $\triangle$APC は、頂点 A からの高さが等しいので、面積比は底辺の比に等しく、

$$\triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{APC} = \mathrm{BP} : \mathrm{PC} \ \cdots\cdots \ ①$$

また、$\angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{PAC} = \theta$ とすると、$\triangle$ABP と $\triangle$APC の面積は、三角比を利用して、

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AP}\sin\theta \ \cdots\cdots \ ②, \qquad \triangle \mathrm{APC} = \frac{1}{2}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AC}\sin\theta \ \cdots\cdots \ ③$$

よって、①, ②, ③より、

$$\begin{aligned} \mathrm{BP} : \mathrm{PC} &= \triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{APC} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AP}\sin\theta : \frac{1}{2}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AC}\sin\theta = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} \end{aligned}$$

（証明終わり）

角の二等分線がある場合には、この関係がよく利用されます。