【数学 I】1次不等式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　実数

1.1　有理数

次のような数を**自然数**といいます。

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \cdots$$

自然に数を数えていくときに読み上げていくような数であるので、「0」は含まないことに注意してください。

次のように、自然数に「0」と負の数を加えた数を**整数**といいます。

$$0,\quad \pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \cdots$$

このことから、自然数は「**正の整数**」ということができます。

次のように、小数の値が終わりなく続くのではなく、限りのあるものを**有限小数**といいます。

$$\frac{1}{2}=0.5,\quad \frac{1}{5}=0.2,\quad \frac{1}{8}=0.125\quad \text{など}$$

分母が「2」と「5」のみの約数しかもたない分数は、必ず有限小数で表すことができます。

次のように、小数の値が終わりなく続きますが、あるところから同じ繰り返しになるようなものを**循環小数**といいます。

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots,\quad \frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\quad \text{など}$$

このとき、同じ繰り返しの部分（これを「**循環節**」といいます）が 1 つの数で構成されている場合はその数の上に、複数の数で構成されている場合は繰り返しの最初の数と最後の数の上に「·」をつけて循環していることを表します。

$$\text{（例）}\quad \frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3},\qquad \frac{1}{7}=0.142857142857\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

自然数、整数、有限小数、循環小数をまとめて**有理数**といいます。このことを一言で言うと、「整数比で表された数」となります。比というのは分数を使って表わすことができるので、

$$\text{「整数比で表された数」}=\frac{\text{整数}}{\text{整数}}=\text{「分数」}$$

ということです。

先の例のように、有限小数、循環小数は分数で表すことができ、また、整数も

$$2=\frac{2}{1}$$

のように無理矢理分数で表すことができます。

このことからもわかるように、有理数というのは「**分数で表すことのできる数**」と覚えてくといいでしょう。そして、有理数を分数で表すときは、それ以上約分できない分数（これを「**既約分数**」といいます）で表します。

また、2 つの有理数の和、差、積、商は有理数になります。

【例題 1 − 1】

$2.\dot{3}$ を分数で表しなさい。

＜解説＞

　有限小数は

$$0.5 = \frac{1}{2}$$

のように簡単に分数で表すことができますが、循環小数ではそうはいきません。その理由は循環小数が限りなく続く無限小数だからです。逆に言えば、循環小数を有限小数のような形で表すことができれば、分数で表すことができることになります。そこで、循環している部分を消去してしまいましょう。そのときに有効な手段が引き算です。引き算をするためには 2 つのものが必要なので、まず

$$x = 2.\dot{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とし、さらに、

$$10x = 23.\dot{3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とします。そして、② − ① より

$$\begin{aligned} 10x - x &= 23.\dot{3} - 2.\dot{3} \\ 9x &= 23.33333\cdots - 2.33333\cdots \\ &= 21 \\ x &= \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となり、

$$2.\dot{3} = \frac{7}{3}$$

のようにして分数で表すことができます。

　このように、求めたい循環小数を適当な文字で表し、そして、循環節部分が消去できるように、10 倍、100 倍などをして小数点をずらして、循環節をそろえたもう 1 つの数を考えます。そして、その差を計算することで循環小数をうまく分数で表すことができるようになります。

　また、循環小数の例として、

$$\frac{1}{9} = 0.111111\cdots, \qquad \frac{2}{9} = 0.222222\cdots \qquad \frac{3}{9} = 0.333333\cdots \qquad \frac{4}{9} = 0.444444\cdots$$

のようなものを覚えておけば、

$$\begin{aligned} 2.\dot{3} &= 2 + 0.333333\cdots \\ &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

と求めることもできます。

1.2 実数

小数の値が終わりなく続くのではなく、限りのある小数を**有限小数**といいましたが、循環小数のように、小数の値が終わりなく続く小数を**無限小数**といいます。

循環しない無限小数を**無理数**といいます。この無理数は、「有理数でない数」のことで、つまり、整数の比（分数）で表すことのできない数になります。例として、

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots, \qquad \sqrt{3} = 1.7320508\cdots, \qquad \pi = 3.14159265358979323\cdots$$

のような数のことです。

そして、有理数、無理数をひっくるめて**実数**といいます。この実数の分類を表にまとめると次のようになります。

<table>
<tr><td rowspan="4">実数</td><td rowspan="3">有理数</td><td>自然数：$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$
整　数：$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$</td></tr>
<tr><td>有限小数：$0.5,\ 0.2,\ 0.125$ など</td></tr>
<tr><td>循環小数：$0.\dot{3},\ 0.\dot{1}4285\dot{7}$ など</td></tr>
<tr><td>無理数</td><td>循環しない無限小数：$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi$ など</td></tr>
</table>

となります。

また、有理数と同様に、実数においても 2 つの実数 $a,\ b$ の

$$\text{和}: a+b, \qquad \text{差}: a-b, \qquad \text{積}: ab, \qquad \text{商}: \frac{a}{b} \quad (\text{ただし、}b \neq 0)$$

も実数になります。

【例題 1 − 2】

次の数のうち、無理数はどれですか。(a)〜(e) の記号で答えなさい。

(a) $\sqrt{3}$　　(b) $\sqrt{16}$　　(c) π　　(d) 0.53　　(e) $-\sqrt{7}$

＜解説＞

無理数は有理数でない数であるので、整数、有限小数、循環小数のような、分数で表すことのできないものを選びます。

(a) $\sqrt{3}$

無理矢理

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

のように分数で表そうと思えば表せますが、

$$\text{有理数} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}}$$

という形ではないので、有理数ではなく無理数です。

(b) $\sqrt{16}$ 根号がついているので、安易に無理数と答えてしまいがちですが、

$$\sqrt{16} = 4$$

と整数になるので有理数です。

(c) π

分数で表すことができないので無理数です。

(d) 0.53

有限小数であるので有理数です。

(e) $-\sqrt{7}$

分数で表すことができないので無理数です。

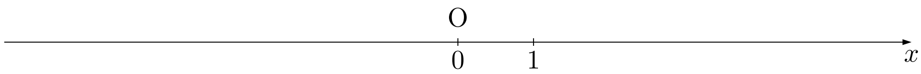
このことから、無理数は

(a), (c), (e)

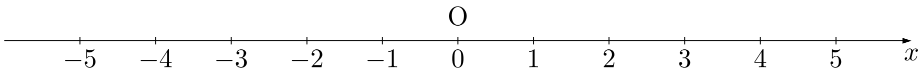
になります。

1.3 実数と数直線

直線上に数 0 に対応する**原点**O（原点を意味する英単語「origin」の頭文字）と、1 を表現する基準になる点を決めます。このようにしてできた直線を**数直線**といいます。



このとき、右にある数ほど大きく、左にある数ほど小さくなるので、矢印の方向に数が大きくなっていくことになります。



また、数直線では、直線上の点と実数を 1 対 1 に対応させることができます。つまり、実数とは、

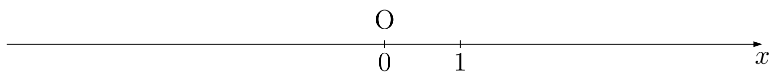
「数直線上にあらわすことのできる数」

ということもできます。

【例題 1 − 3】

次の数をそれぞれ数直線上に表しなさい。

(1) -2.5 (2) $\dfrac{4}{3}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{5}$

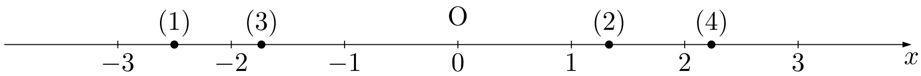


＜解説＞

「1」の目盛りを基準に残りの目盛りもつけておきます。そして、

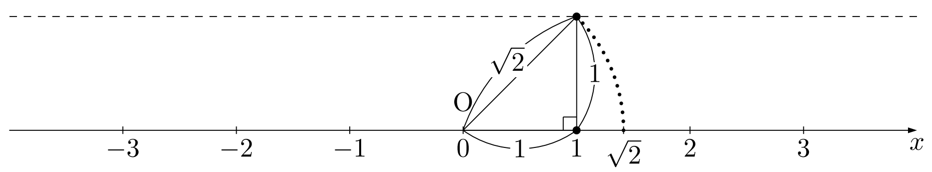
$$\sqrt{3} = 1.732\cdots, \qquad \sqrt{5} = 2.236\cdots$$

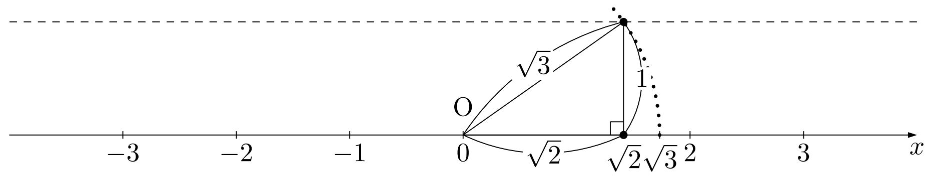
であることに注意してそれぞれの実数を数直線上に表すと、次のようになります。

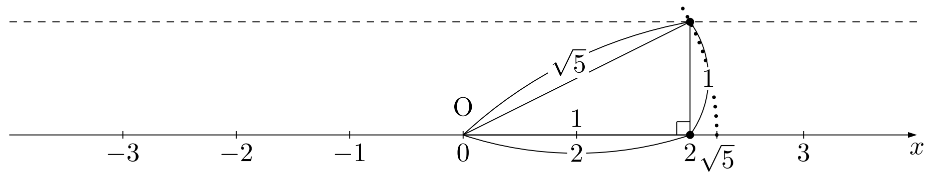


有理数は分数で表すことができるので、それほど難しくなく、ある程度正確に数直線上に表すことができますが、無理数だとそうはいきません。そこで、次のように高さが数直線上の 1 目盛り分に相当する補助線（数

直線に平行）を引き、三平方の定理を利用することで、もう少し正確に、無理数を数直線上に表すことができます。







1.4 絶対値

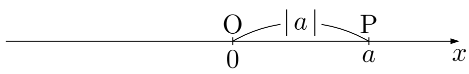
実数 a に対し、数直線上で a に対応する点 P の原点からの距離を a の**絶対値**といい、

$$|a| \quad (\geqq 0)$$

のように表します。絶対値は「原点からの距離」であるので、必ず 0 以上の値になります。

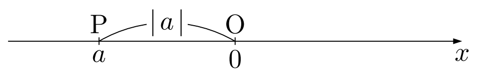
また、数直線上の実数 a に対応する点 P のことを、点 P(a) のように表し、実数 a を点 P の**座標**といいます。このとき、実数 a と絶対値の間には、a の値によって

(i) $a \geqq 0$ のとき



$$|a| = a$$

(ii) $a < 0$ のとき



$$|a| = -a$$

という関係が成り立ちます。

【例題 1 − 4】

次の値を求めなさい。

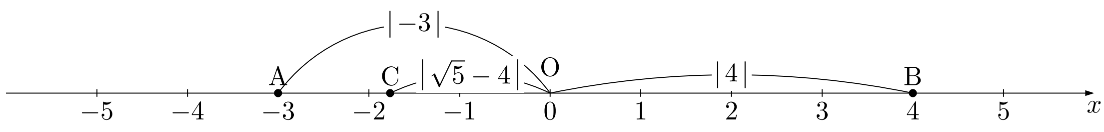
(1) $|-3|$ (2) $|4|$ (3) $\left|\sqrt{5}-4\right|$

＜解説＞

まずは、それぞれの実数に対応する点を、数直線上に表してみます。そこで、

$$\mathrm{A}(-3), \qquad \mathrm{B}(4), \qquad \mathrm{C}(\sqrt{5}-4)$$

とすると、次の図のようになります。



絶対値は原点からの距離であるので、図から

(1) $|-3| = 3$ (2) $|4| = 4$ (3) $\left|\sqrt{5}-4\right| = 4-\sqrt{5}$

となることがわかります。

また、$-3 < 0,\ \sqrt{5}-4 < 0$ であることから、$a < 0$ のとき $|a| = -a$ となることを利用して

$$\begin{aligned}|-3| &= -(-3)\\ &= 3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\left|\sqrt{5}-4\right| &= -(\sqrt{5}-4)\\ &= 4-\sqrt{5}\end{aligned}$$

のようにして絶対値を求めることもできます。ただし、このことを利用する場合においても、絶対値が「原点からの距離」であることを十分に理解し、そして、数直線でのイメージがしっかりできていることが大切です。

さらには、$a,\ b$ を実数としたとき、絶対値には

(i) $|a| \geqq 0$　(ii) $|-a| = |a|$　(iii) $|a|^2 = a^2$

(iv) $|ab| = |a||b|$　(v) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ (ただし、$b \neq 0$)

という性質が成り立ちます。絶対値の意味を考えたり、$a,\ b$ に適当な実数をあてはめることで、このような性質が成り立つことがわかると思います。

2　根号を含む式の計算

2.1　平方根

負でない実数 a に対して、「2 乗して a になる数」のことを a の**平方根**といいます。このとき、a の平方根には正と負の 2 つが存在し、そのうち正の数の値を $\sqrt{a}$、負の数の値を $-\sqrt{a}$ と表しますが、**複号**「±（プラスマイナス)」を用いると、a の平方根を

$$a \text{ の平方根} : \pm\sqrt{a}$$

のように 2 つまとめて表すこともできます。ただし、$a = 0$ のときは、0 の平方根は 0 だけであるので、$\sqrt{0} = 0$ と定めます。

また、$\sqrt{}$ は 2 つある平方根のうちの正の値のものを表すので、$a > 0$ のとき、$\sqrt{a}$ の値は必ず

$$\sqrt{a} > 0$$

となります。つまり、a を実数とするとき

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

のように表すことができるので、この関係をしっかり覚えておいてください。

【例題 2 − 1】

1. 次の平方根を求めなさい。
   (1) 9　　(2) $\dfrac{1}{4}$　　(3) 0　　(4) -4
2. 次の計算をしなさい。
   (1) $\sqrt{3^2}$　　(2) $\sqrt{(-3)^2}$

<解説>

1. (1) 2 乗したとき「9」になるのは、

$$3^2 = 9, \qquad (-3)^2 = 9$$

のときであるので、9 の平方根は

$$9 \text{ の平方根} : \pm 3$$

(2) 2 乗したとき「$\dfrac{1}{4}$」になるのは、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

のときであるので、$\dfrac{1}{4}$ の平方根は

$$\frac{1}{4} \text{ の平方根} : \pm\frac{1}{2}$$

(3) 2 乗して 0 になる数は「0」しかないので、

0 の平方根 : 0

(4)「2 乗して負になる実数」は存在しないので、$a < 0$ のとき、a の平方根は実数の範囲には存在しません。よって、-4 の平方根は

-4 の平方根 : なし

となります。

2. (1) 根号の中を計算すると、

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9}$$

となるので、9 の平方根のうちの正の値を考えます。つまり、

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

となります。

(2) 根号の中を計算すると、

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}$$

となるので、(1) と同じように

$$\sqrt{9} = 3$$

となります。「平方（2 乗）と平方根はちょうど反対の関係になる」と考えて、2 乗してルートを計算したら元に戻り、

$$\sqrt{(-3)^2} = -3$$

としたくなるところですが、$\sqrt{(-3)^2}$ の値が「-3」のような負の値をとることは絶対になく、根号をはずしたい場合は、

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

のように絶対値記号をつけて考える必要があるので、注意をしてください。

2.2　根号を含む式の計算

$a>0$、$b>0$ とするとき、

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2\\ &= ab\end{aligned}$$

となり、$\sqrt{a}\sqrt{b}$ を 2 乗すると ab になることから、$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根のうちの 1 つということになります。また、$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0$ より、$\sqrt{a}\sqrt{b}>0$ であるので、$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根のうちの正の値ということになり、

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

という関係が成り立ちます。

同じようにして、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}\\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

となり、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を 2 乗すると $\dfrac{a}{b}$ になることから、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は $\dfrac{a}{b}$ の平方根のうちの 1 つであり、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}>0$ であるので、平方根のうちの正の値です。よって、

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

という関係が成り立ちます。

以上のことから、$a>0,\ b>0$ のとき

(i) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

という公式が成り立ち、さらに (i) を用いて

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2b} &= \sqrt{a^2}\sqrt{b}\\ &= a\sqrt{b}\end{aligned}$$

という公式を導くことができます。平方根を含む式の計算では、この公式を利用して、根号の中身をできるだけ小さい数で表すことが大切です。

また、根号の中身が同じであるような数の場合、文字式の計算で同類項をまとめるようにして、

$$p\sqrt{a}+q\sqrt{a}=(p+q)\sqrt{a}\qquad \text{（ただし、}p,\ q\text{ は定数）}$$

と計算することができます。

【例題 2 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$　　(2) $\sqrt{12}-\sqrt{8}+\sqrt{48}+\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{7}(2-\sqrt{7})$　　(4) $(\sqrt{2}+1)^2$

(5) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$　　(6) $(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+1)$

＜解説＞

根号を含む式は、文字式と同じような考え方で計算することができます。

(1) 根号の中身を簡単にして計算します。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27} &= \sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{4^2\cdot 3}-\sqrt{3^2\cdot 3} \\
&= 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3} \\
&= (2+4-3)\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

(2) 根号の中身を簡単にして計算します。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{12}-\sqrt{8}+\sqrt{48}+\sqrt{18} &= \sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{4^2\cdot 3}+\sqrt{3^2\cdot 2} \\
&= 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2} \\
&= (2+4)\sqrt{3}+(-2+3)\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{3}+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(3) 分配法則を利用して

$$
\begin{aligned}
\sqrt{7}(2-\sqrt{7}) &= 2\sqrt{7}-(\sqrt{7})^2 \\
&= 2\sqrt{7}-7
\end{aligned}
$$

(4) 展開公式を利用して

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2}+1)^2 &= (\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2 \\
&= 2+2\sqrt{2}+1 \\
&= 3+2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(5) 展開公式を利用して

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) &= (\sqrt{5})^2-1^2 \\
&= 5-1=4
\end{aligned}
$$

(6) 展開公式を利用して

$$
\begin{aligned}
(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+1) &= (2\sqrt{5})^2+(-3+1)\cdot 2\sqrt{5}+(-3)\cdot 1 \\
&= 20-4\sqrt{5}-3 \\
&= 17-4\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

2.3 分母の有理化

分母に根号を含む式の場合、分母の根号をなくして無理数でない形、つまり有理数の形に変形するのが**分母の有理化**です。

a を負でない実数とするとき、

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$$

となったので、このようにして根号の平方の形を作ることにより、有理化できることになります。

【例題 2 − 3】

次の式の分母を有理化しなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

＜解説＞

(1) 分子・分母に $\sqrt{5}$ を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}\\ &= \frac{\sqrt{35}}{5}\end{aligned}$$

(2) 分子・分母に $\sqrt{12}$ を掛けてもいいのですが、根号を含む式の計算では、まずは根号の中身を簡単にしたほうが計算を楽に行うことができます。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

(3) 分母が平方根の和や差で表されているときには、根号の平方の形を作るために、和と差の積

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

を利用します。

分母は「$\sqrt{6}+\sqrt{2}$」という和の形になっているので、差の形である「$\sqrt{6}-\sqrt{2}$」を分子・分母に掛けて、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{6 - 2\cdot 2\sqrt{3} + 2}{6-2}\\ &= \frac{\cancel{8}^{2} - \cancel{4}^{1}\sqrt{3}}{\cancel{4}^{1}}\\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

2.4　分母に根号を含む分数の計算

　分母に根号を含まないような分数の、和や差を求める計算では、

(i) 通分（分母の最小公倍数を分子・分母それぞれに掛けて分母をそろえる）
(ii) 計算（分子どうしを計算）

という手順で行いますが、分母に根号を含む分数でも同じ手順を用いると、何を掛けて通分するのかの判断が難しい場合もあり、また、計算が面倒になる場合が多くあります。
　そこで、分母に根号を含む分数の和や差を求める計算では、

(i) 分母の有理化
(ii) 通分（分母の最小公倍数を分子・分母それぞれに掛けて分母をそろえる）
(iii) 計算（分子どうしを計算）

のように、通分する前に、まずは分母の有理化を行うことが計算のポイントになります。

【例題２－４】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} &= \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} + \frac{1\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 3} - \frac{\sqrt{6}}{3\cdot 2} + \frac{\sqrt{6}}{2\cdot 6} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{12} \\
&= \frac{3\sqrt{6}\times 2}{6\times 2} - \frac{\sqrt{6}\times 2}{6\times 2} + \frac{\sqrt{6}}{12} \\
&= \frac{6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + \sqrt{6}}{12} \\
&= \frac{5\sqrt{6}}{12}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{3-1}-\frac{\sqrt{15}-3}{5-3} \\
&= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{15}-3}{2} \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{15}}-\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{15}}+3}{2} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

2.5 平方根と対称式の値

2 つの変数 x と y の式「x^2+xy+y^2」において、x と y を入れかえると、

$$x^2+xy+y^2 \longrightarrow y^2+yx+x^2$$

となります。見た目は少し変わりますが、加法や乗法の交換法則を用いれば元の式に戻るため、この 2 つの式は等しいものです。このように、変数を入れかえても元の式と変わらない整式を、**対称式**といいます。

x と y の対称式において、最もシンプル（基本）なものには、

$$x+y, \qquad xy$$

という 2 つの式があり、これを x と y の**基本対称式**といいます。そして、対称式には、

「**対称式は、基本対称式で表すことができる**」

という性質があります。

【例題 2 − 5】

$x=\sqrt{5}+\sqrt{3},\ y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2　　(4) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

＜解説＞

「式の値」を求めるときには、

- 式にそのまま代入して計算する。
- 式変形してから代入して計算する。

という 2 つの方法について、どちらがよいのかを考える必要があります。計算が面倒だと感じる場合は、式変形などの工夫ができることが多くあります。

(1) 特に式変形することはできないので、直接代入して計算します。

$$x+y=(\sqrt{5}+\cancel{\sqrt{3}})+(\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{3}})=2\sqrt{5}$$

(2) 特に式変形することはできないので、直接代入して計算します。

$$\begin{aligned} xy &= (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2 \\ &= 5-3=2 \end{aligned}$$

(3) まずは、直接代入して計算をしてみます。

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 \\ &= (\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 \\ &= 5+\cancel{2\sqrt{15}}+3+5-\cancel{2\sqrt{15}}+3=16 \end{aligned}$$

平方の公式が使えるので、慣れてしまえばそれほど面倒な計算ではないかもしれませんが、「x^2+y^2」は x と y の対称式なので、基本対称式で表すことができます。そのことを利用すれば、

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= x^2+2xy+y^2-2xy\\ &= (x+y)^2-2xy\\ &= (2\sqrt{5})^2-2\cdot 2\\ &= 20-4=16\end{aligned}$$

また、平方の公式から、

$$\begin{aligned}x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2\\ x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy\end{aligned}$$

と変形できるので、この式を公式として利用してしまってもかまいません。

(4) まずは、直接代入して計算してみます。

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y} &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\\ &= \frac{(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{8-2\sqrt{15}}{2}+\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=8\end{aligned}$$

分母の有理化をしなければいけないので計算がやや大変です。そこで、式変形をすると、(2) と (3) の結果が利用できるので、

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{y^2+x^2}{xy}=\frac{16}{2}=8$$

と、簡単に計算することができます。また、「$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$」も x と y の対称式であるので、基本対称式で表せば、

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y} &= \frac{y^2+x^2}{xy}\\ &= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}\end{aligned}$$

となり、(3) の計算結果が得られていない場合は、この式に基本対称式の値を代入することで、式の値を求めることができます。

3　1次不等式

3.1　不等号と不等式

「＝」のことを**等号**といいます。これは数量の大小関係が等しいことを表す記号で、

「A は B と等しい」

ということを

$$A = B$$

のように表すことができ、このように、等号によって結ばれた式を**等式**といいます。

これとは逆に、数量の大小関係が等しくないときには、「$>$」や「$<$」という**不等号**を用います。そして、不等号を用いて表された関係式を**不等式**といいます。

不等号	不等式	意味
$>$	$A > B$	A は B よりも大きい
$<$	$A < B$	A は B よりも小さい
$\geqq$	$A \geqq B$ （$A = B$ または $A > B$）	A は B 以上
$\leqq$	$A \leqq B$ （$A = B$ または $A < B$）	A は B 以下

また、等式や不等式において、等号や不等号の左側を**左辺**、右側を**右辺**、その両方を合わせて**両辺**といいます。

【例題 3 − 1】

次の 2 数の大小関係を、不等号を使って表しなさい。

(1) $\sqrt{19}$, $\sqrt{20}$　　(2) 7.1, $\sqrt{50}$　　(3) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$

＜解説＞

正の数 a, b について、

$$a > b \quad ならば \quad \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

というように、根号のついた正の数の大小は、根号内の数の大小と同じ関係になります。

(1) 19 よりも 20 の方が大きく、「$19 < 20$」という関係になるので、

$$\sqrt{19} < \sqrt{20}$$

(2) 「100 円と 50 円」の大小関係はわかりますが、「100g と 50 円」の大小関係はよくわかりません。このように 2 つのものを比べるときには「そろっている」ことが大切です。

根号のついている数とついていない数の大小を比べるときも、「どちらにも根号をつける」、もしくは、「どちらにも根号をつけない」というようにして 2 つの数をそろえる必要があります。一般的には、根号をなくすのは難しいので、どちらにも根号をつけて

$$\sqrt{7.1^2}, \quad \sqrt{50}$$

の大小を考えます。ここで、

$$\sqrt{7.1^2} = \sqrt{50.41}$$

となり、

$$50.41 > 50$$

であるので、

$$\sqrt{50.41} > \sqrt{50}$$

つまり、

$$7.1 > \sqrt{50}$$

となります。

(3) このような数の場合も、根号内に数を入れて

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}, \qquad 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

となり、

$$12 < 18$$

より

$$\sqrt{12} < \sqrt{18}$$

つまり、

$$2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

となります。

3.2　不等式の性質

一般に、不等式に関して

(ｉ) 不等式の両辺に同じ数を加えても引いても、不等号の向きは変わらない。

$$a < b \quad \text{ならば} \quad a + c < b + c, \quad a - c < b - c$$

(ii) 不等式の両辺に同じ正の数を掛けても割っても、不等号の向きは変わらない。

$$a < b,\ c > 0 \quad \text{ならば} \quad ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

(iii) 不等式の両辺に同じ負の数を掛けたり割ったりすると、不等号の向きは逆になる。

$$a < b,\ c < 0 \quad \text{ならば} \quad ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

という関係が成り立ちます。

不等式の両辺に、負の数を掛けたり割ったりしたときだけ、不等号の向きは逆になるということに注意してください。

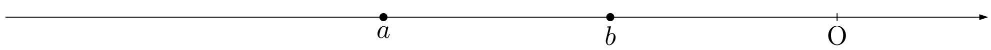
【例題 3 − 2】

$a < b < 0$ のとき、次の 2 つの式の関係を不等号を用いて表しなさい。

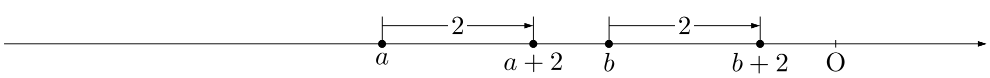
(1) $a + 2,\ b + 2$　　(2) $a - 4,\ b - 4$　　(3) $2a,\ 2b$　　(4) $-2a,\ -2b$

＜解説＞

$a < b < 0$ を満たす実数 $a,\ b$ を数直線上に表して考えてみます。



(1) $a + 2,\ b + 2$ を表す点は、$a,\ b$ の表す点を、正の方向に 2 ずつずらしたところに移ります。

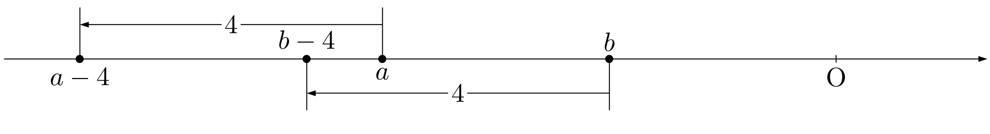


よって、大小関係は変わらず

$$a + 2 < b + 2$$

となり、不等式の両辺に同じ数を加えても、不等号の向きは変わりません。

(2) $a - 4,\ b - 4$ を表す点は、$a,\ b$ の表す点を、負の方向に 4 ずつずらしたところに移ります。

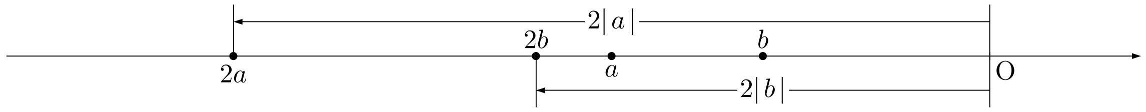


よって、大小関係は変わらず

$$a-4<b-4$$

となり、不等式の両辺に同じ数を引いても、不等号の向きは変わりません。

(3) $2a$, $2b$ を表す点は、a, b の表す点と原点までの距離を 2 倍にしたところに移ります。

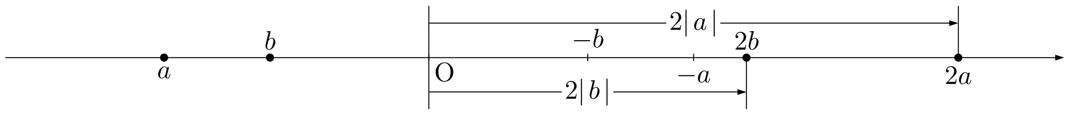


よって、大小関係は変わらず

$$2a<2b$$

となり、不等式の両辺に同じ正の数を掛けても、不等号の向きは変わりません。

(4) $-2a$, $-2b$ を表す点は、a, b の表す点と原点までの距離を 2 倍にしたところに移ります。ただし、向きは反対向きです。



よって、大小関係は

$$2a>2b$$

となり、不等式の両辺に同じ負の数を掛けると、不等号の向きは逆になります。

3.3 1 次不等式の解法

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき、左辺が x の 1 次式になる不等式を **x の 1 次不等式**といいます。a、b を定数としたとき、

$$ax + b > 0 \quad \text{または} \quad ax + b < 0$$

のような式のことです。

x についての不等式において、不等式を満たす x の値をその**不等式の解**といいます。そして、その不等式の解を求めることを**不等式を解く**といいます。しかし、一般的に不等式の解は無数に存在するので、不等式を解くことは、

「解が存在する範囲を求める」

ということになります。

1 次不等式の解法手順は、1 次方程式の解法手順と同じになります。

(i) かっこがあればかっこをはずす。（小数や分数があれば、小数や分数を含まない形にする。）
(ii) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。
(iii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。
(iv) 文字の係数の逆数を両辺に掛ける。（文字の係数を逆数にして右辺に移し、右辺を計算する。）

ただし、不等式の両辺に、負の数を掛けたり割ったりしたときには、不等号の向きが逆になるので注意してください。

【例題 3 − 3】

次の不等式を解きなさい。

(1) $5x - 3(4x + 6) > 3$　　(2) $2(x + 3) \leqq -x + 8$

<解説>

(1) まず、分配法則を利用して、左辺のかっこをはずします。

$$\begin{aligned} 5x - 3(4x + 6) &> 3 \\ 5x - 12x - 18 &> 3 \end{aligned}$$

次に、文字を含む項が左辺、定数項が右辺に集まるように移項して整理します。

$$\begin{aligned} 5x - 12x - 18 &> 3 \\ 5x - 12x &> 3 + 18 \\ -7x &> 21 \end{aligned}$$

最後に、x の係数である -7 を、逆数の $-\dfrac{1}{7}$ にして右辺に移します。このとき、両辺に負の数を掛けたこ

となるので、不等号の向きが逆になります。

$$
\begin{aligned}
-7x &> 21 \\
x &< \cancel{21}^{3} \times \left(-\frac{1}{\cancel{7}^{1}}\right) \\
x &< -3
\end{aligned}
$$

(2) 問題に与えられている式は、

$$
\begin{cases}
2(x+3) = -x+8 \\
2(x+3) < -x+8
\end{cases}
$$

という方程式と不等式を、まとめて表していることになります。このような式でも解き方は同じで、まず、分配法則を利用して、左辺のかっこをはずします。

$$
\begin{aligned}
2(x+3) &\leqq -x+8 \\
2x+6 &\leqq -x+8
\end{aligned}
$$

次に、文字を含む項が左辺、定数項が右辺に集まるように移項して整理します。

$$
\begin{aligned}
2x+6 &\leqq -x+8 \\
2x+x &\leqq 8-6 \\
3x &\leqq 2
\end{aligned}
$$

最後に、x の係数である 3 を、逆数の $\frac{1}{3}$ にして右辺に移します。このとき、両辺に正の数を掛けたことになるので、不等号の向きは変わりません。

$$
\begin{aligned}
3x &\leqq 2 \\
x &\leqq 2 \times \frac{1}{3} \\
x &\leqq \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

この解も、

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{2}{3} \\
x < \dfrac{2}{3}
\end{cases}
$$

のように、方程式と不等式の両方の解をまとめて表していることになります。

3.4 連立1次不等式の解法

次のように、いくつかの不等式が組み合わさったものを、**連立不等式**といいます。

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ x \leqq 3 \end{cases}$$

連立不等式の場合、複数の不等式に共通する範囲を求めることになります。そのことを**連立不等式を解く**といいますが、連立不等式を解く手順は

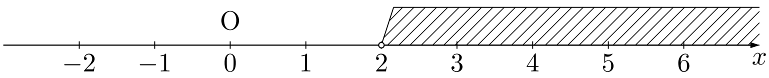
① 各不等式を解く。
② 各不等式の解を数直線上に図示し、共通範囲を求める。

となります。

ここで、不等式の解を数直線上にどのように表すかを説明します。

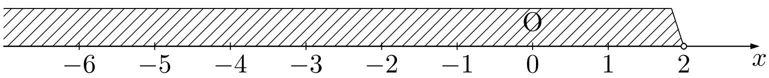
(i) $x > 2$ の場合

x が 2 よりも大きい範囲は、$x = 2$ よりも右側の部分になります。$x = 2$ は含まないので、そのことがわかるように $x = 2$ の部分を白丸 ○ にします。その様子を数直線上に表すと次の図のようになります。



(ii) $x < 2$ の場合

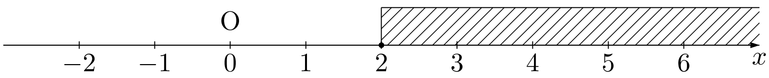
x が 2 よりも小さい範囲は、$x = 2$ よりも左側の部分になります。$x = 2$ は含まないので、そのことがわかるように $x = 2$ の部分を白丸 ○ にします。その様子を数直線上に表すと次の図のようになります。



(iii) $x \geqq 2$ の場合

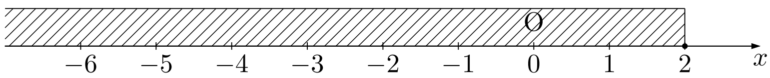
$x \geqq 2$ は $x = 2$ と $x > 2$ を合わせたものです。そのため、(i) の範囲に $x = 2$ の部分を含めたものになります。$x = 2$ を含めない場合はその部分を白丸にしましたが、その部分を含むことを示す場合には黒丸 ● にします。また、その数を含む場合には、範囲を表す図も見やすくするために、その数から垂直になるように線をかき、その数を含まない場合は、その数から斜めにして線をかきます。

以上のことから、数直線上に表すと次の図のようになります。



(iv) $x \leqq 2$ の場合

$x \leqq 2$ は $x = 2$ と $x < 2$ を合わせたものです。そのため、(ii) の範囲に $x = 2$ の部分を含めたものにするので、黒丸 ● を使って表します。その様子を数直線上に表すと次の図のようになります。



【例題 3 − 4】

次の連立不等式を解きなさい。

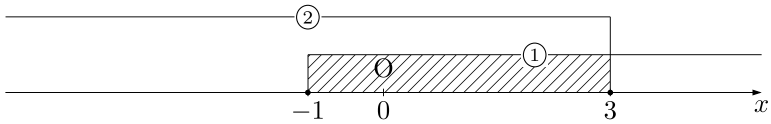
(1) $\begin{cases} x \geqq -1 \\ x \leqq 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x \leqq -1 \\ x \geqq 3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x-4 \leqq 3x+3 \\ x-6 > \dfrac{5}{2}x \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-3(4x+6) < 3 \\ x+0.6 < 0.2x-1 \end{cases}$

＜解説＞

(1) $\begin{cases} x \geqq -1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x \leqq 3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

とします。この①，②の範囲を数直線上に表します。ただし、見やすくなるよう、①と②の範囲は高さを変えて表します。



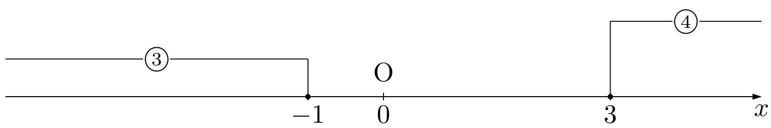
よって、この共通の範囲は図の斜線部分になるので、

$-1 \leqq x \leqq 3$

となります。

(2) $\begin{cases} x \leqq -1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ x \geqq 3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

とします。この③，④の範囲を数直線上に表すと次の図のようになります。



すると、共通範囲は存在しないので、この連立不等式の解は

解なし

となります。

(3) $\begin{cases} 5x-4 \leqq 3x+3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ x-6 > \dfrac{5}{2}x & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$

とします。

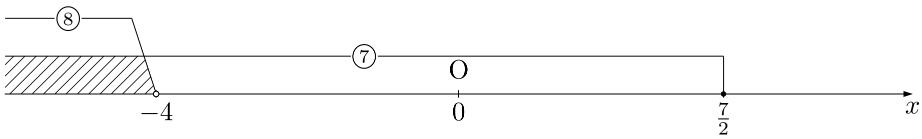
⑤より

$$\begin{aligned} 5x-4 &\leqq 3x+3 \\ 5x-3x &\leqq 3+4 \\ 2x &\leqq 7 \\ x &\leqq \frac{7}{2} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

また、⑥より

$$\begin{aligned} x-6 &> \frac{5}{2}x \\ 2x-12 &> 5x \\ 2x-5x &> 12 \\ -3x &> 12 \\ x &< -4 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦, ⑧の範囲を数直線上に図示すると



となるので、共通範囲は図の斜線部分になります。このことから、連立不等式の解は

$$x < -4$$

となります。

(4) $\begin{cases} 5x-3(4x+6) < 3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨ \\ x+0.6 < 0.2x-1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩ \end{cases}$

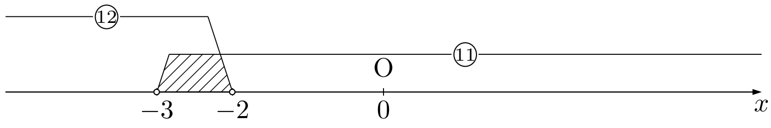
とします。⑨より

$$\begin{aligned} 5x-3(4x+6) &< 3 \\ 5x-12x-18 &< 3 \\ 5x-12x &< 3+18 \\ -7x &< 21 \\ x &> -3 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

また、⑩より

$$\begin{aligned} x+0.6 &< 0.2x-1 \\ 10x+6 &< 2x-10 \\ 10x-2x &< -10-6 \\ 8x &< -16 \\ x &< -2 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$

⑪，⑫の範囲を数直線上に図示すると



となり、共通範囲は図の斜線部分になります。よって、連立不等式の解は

$$-3 < x < -2$$

となります。

3.5 不等式の整数解

【例題 3 − 5】

(1) 不等式 $\dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x-4}{3} > 1$ の解のうちで、最も大きい整数を求めなさい。
(2) $4(x+3) < 6x - 1$ の解のうちで、1 桁の自然数は全部で何個ありますか。

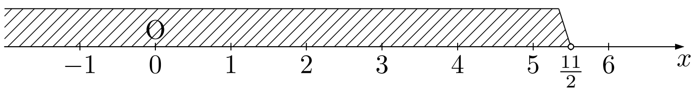
＜解説＞

まずは不等式を解いて、その不等式の解から問題文の条件に合うものを求めます。

(1) 両辺を 15 倍し、分母をはらって不等式を解いていきます。

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{\cancel{5}^{1}} \times \cancel{15}^{3} - \frac{x-4}{\cancel{3}^{1}} \times \cancel{15}^{5} &> 15 \\
3x + 6 - 5x + 20 &> 15 \\
-2x + 26 &> 15 \\
-2x &> -11 \\
x &< \frac{11}{2}
\end{aligned}
$$

この不等式の解を数直線上に表すと

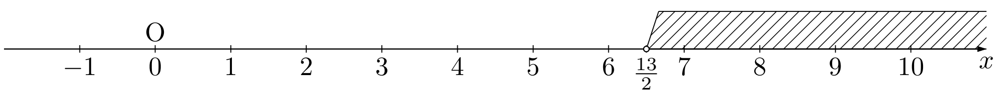


となるので、この範囲の中で最も大きい整数は 5。

(2) かっこをはずして不等式を解いていきます。

$$
\begin{aligned}
4(x+3) &< 6x - 1 \\
4x + 12 &< 6x - 1 \\
4x - 6x &< -1 - 12 \\
-2x &< -13 \\
x &> \frac{13}{2}
\end{aligned}
$$

この不等式の解を数直線上に表すと



となるので、この範囲の中に 1 桁の自然数は

7, 8, 9

の 3 個あります。

3.6 絶対値を含む方程式

絶対値を含む方程式の場合、絶対値を含んだままでは計算することができません。そのため、絶対値記号をはずしてから計算することになりますが、絶対値記号のはずしかたには主に 2 通りあります。

(i) 場合分けをすることで絶対値記号をはずし、方程式を解く。
a を実数とすると、

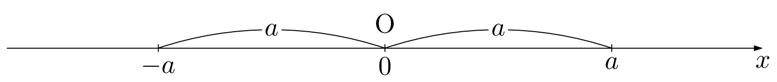
$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

となるので、絶対値記号の中身が 0 以上の場合は、ただ単に絶対値記号をそのままはずせばよく、絶対値記号の中身が負の場合は、マイナス記号をつけて絶対値記号をはずすということになります。ただし、絶対値記号の中身が文字（変数）になっている場合、0 以上なのか負なのかを判断することができません。このようなときには、0 以上の場合ではどうなるか、また、負の場合にはどうなるかということをそれぞれの場合によって考え、そのことを**場合分け**といいます。

(ii) 絶対値の意味を考えて方程式を解く。
「絶対値」は、数直線上での「原点からの距離」のことであったので、

$$|x| = a$$

という絶対値を含む方程式は、「原点からの距離が a となる x は何？」ということを求めることになります。そのことを数直線上に表せば次のようになるので、



$$|x| = a \quad ならば \quad x = \pm a \qquad （ただし、a > 0）$$

となることがわかります。

例題 3 − 6

次の方程式を解きなさい。

(1) $|x| = 1$　　(2) $|x| = -3$

(3) $|x - 3| = 5$　　(4) $|2x + 5| = 7$

＜解説＞

まずは、場合分けをすることで絶対値記号をはずし、方程式を解いてみます。

(1) (i) $x \geqq 0$ のとき
絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずすことができ

$$x = 1$$

となり、この解は $x \geqq 0$ という条件を満たします。

(ii) $x<0$ のとき

絶対値記号の中身が負であるので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

となり、この解も $x<0$ という条件を満たします。

(i), (ii) より

$$x = \pm 1$$

(2) (i) $x \geqq 0$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$x = -3$$

となり、この解は $x \geqq 0$ という条件を満たさないので、解としては不適当です。

(ii) $x<0$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

となり、この解も $x<0$ という条件を満たさないので、解としては不適当です。

(i), (ii) より

解なし

となります。また、絶対値は必ず 0 以上の値になるので、

$$|x| = -3$$

のように負の値になることはありません。そのことからも、この方程式の解が存在しないことがわかります。

(3) (i) $x-3 \geqq 0$ つまり $x \geqq 3$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} x-3 &= 5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

となり、この解は $x \geqq 3$ という条件を満たします。

(ii) $x-3<0$ つまり $x<3$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} -(x-3) &= 5 \\ x-3 &= -5 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

となり、この解も $x<3$ という条件を満たします。

(i), (ii) より

$$x = 8,\ -2$$

(4) (ⅰ) $2x+5 \geqq 0$　つまり　$x \geqq -\dfrac{5}{2}$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 7 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

となり、この解は $x \geqq -\dfrac{5}{2}$ という条件を満たします。

(ⅱ) $2x+5 < 0$　つまり　$x < -\dfrac{5}{2}$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} -(2x+5) &= 7 \\ 2x+5 &= -7 \\ 2x &= -12 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

となり、この解も $x < -\dfrac{5}{2}$ という条件を満たします。

(i), (ii) より

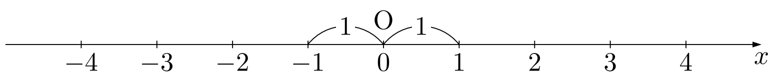
$$x = 1,\ -6$$

絶対値記号を含む方程式や不等式は、このように場合分けをして絶対値記号をはずすのが、最も基本的な解き方になります。しかし、絶対値の意味を考えると、もっと簡単に解くこともできます。

(1) 絶対値 $|x|$ は、数直線上で、原点から実数 x に対応する点までの距離を表しています。そのことから、$|x|=1$ は、

「原点からの距離が 1 となる点」

に対応する実数 x を求めればよいことになります。



よって、数直線から

$$x = \pm 1$$

となります。

(2) $|x| = -3$ は、

「原点からの距離が -3 となる点」

に対応する実数 x を求めればよいのですが、距離が負になることはないので、そのような実数 x は存在しません。よって、

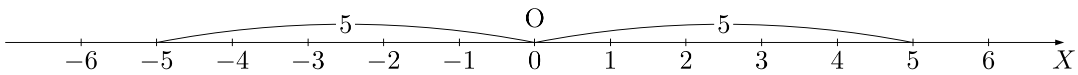
解なし

となります。

(3) $x-3=X$ とすると、

$$|\,x-3\,|=5 \quad \longrightarrow \quad |\,X\,|=5$$

とできるので、原点からの距離が 5 となる実数 X に対応する点を考えます。



数直線より

$$X=\pm 5$$

となることがわかるので、X を元に戻して

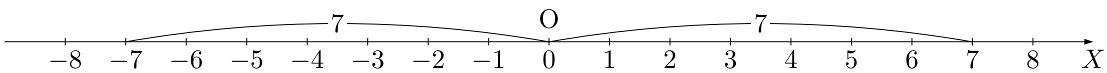
$$\begin{aligned} x-3&=\pm 5\\ x&=3\pm 5\\ &=8,\ -2 \end{aligned}$$

となります。

(4) $2x+5=X$ とすると、

$$|\,2x+5\,|=7 \quad \longrightarrow \quad |\,X\,|=7$$

とできるので、原点からの距離が 7 となる実数 X に対応する点を考えます。



数直線より

$$X=\pm 7$$

となることがわかるので、X を元に戻して

$$\begin{aligned} 2x+5&=\pm 7\\ 2x&=-5\pm 7\\ x&=\frac{-5\pm 7}{2}\\ &=1,\ -6 \end{aligned}$$

となります。

3.7 絶対値を含む不等式

絶対値を含む不等式の場合も、方程式と同じように、絶対値を含んだままでは計算することができません。そのため、方程式のときと同じように、2 通りある絶対値記号のはずし方のどちらかの方法で絶対値記号をはずします。

(i) 場合分けをすることで絶対値記号をはずし、不等式を解く。
絶対値を含む方程式のときと同じように、場合分けを行います。（絶対値記号の中身が 0 以上の場合ではどうなるか、また、負の場合にはどうなるかということをそれぞれの場合によって考える）

(ii) 絶対値の意味を考えて不等式を解く。
「絶対値」は、数直線上での「原点からの距離」のことであったので、次のような絶対値を含む不等式（$a > 0$）では、それぞれ、

① $|x| < a$ という不等式

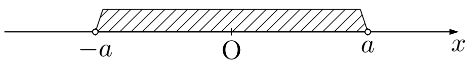
「原点からの距離が a 未満となる x は？」

② $|x| > a$ という不等式

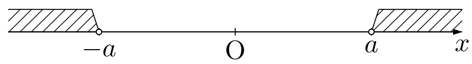
「原点からの距離が a よりも大きくなる x は？」

ということを求めることになります。そのことを数直線上に表せば、次のような関係になることがわかります。

① $|x| < a$　ならば　$-a < x < a$



② $|x| > a$　ならば　$x < -a,\ a < x$



例題 3 − 7

次の不等式を解きなさい。

(1) $|x| < 2$　　(2) $|x| \geqq 2$　　(3) $|x-3| \leqq 5$　　(4) $|x-3| > 5$

<解説>

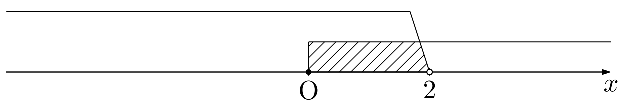
まずは、基本的な解き方である「場合分け」を利用して解いてみます。

(1)　(i) $x \geqq 0$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$x < 2$$

となります。よって、$x \geqq 0$ と $x < 2$ の共通範囲を考えて



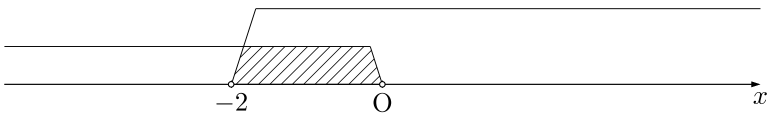
$$0 \leqq x < 2$$

(ii) $x < 0$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

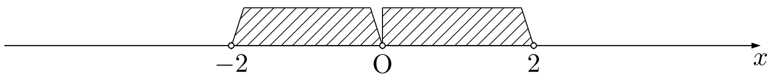
$$-x < 2$$
$$x > -2$$

となります。よって、$x < 0$ と $x > -2$ の共通範囲を考えて



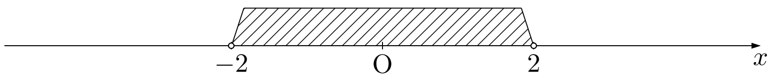
$$-2 < x < 0$$

(i), (ii) より



$$-2 < x < 0, \quad 0 \leqq x < 2$$

が答えになりますが、この 2 つの解はのように $x = 0$ の部分でつながるので、1 つにまとめることができ、



$$-2 < x < 2$$

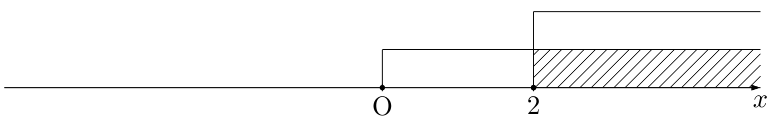
と表せます。

(2) (i) $x \geqq 0$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$x \geqq 2$$

となります。よって、$x \geqq 0$ と $x \geqq 2$ の共通範囲を考えて



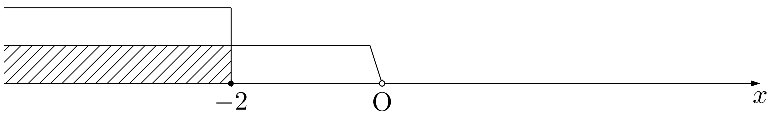
$$x \geqq 2$$

(ii) $x < 0$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

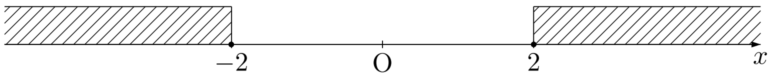
$$-x \geqq 2$$
$$x \leqq -2$$

となります。よって、$x < 0$ と $x \leqq -2$ の共通範囲を考えて



$x \leqq -2$

(i)，(ii) より

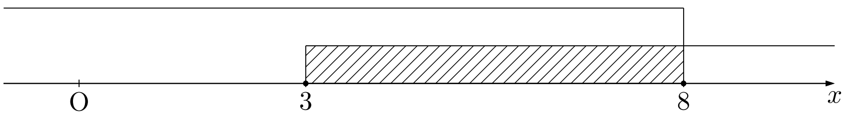


$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$

(3)　(i) $x-3 \geqq 0$　つまり　$x \geqq 3$ のとき
絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$x-3 \leqq 5$$
$$x \leqq 8$$

となります。よって、$x \geqq 0$ と $x \leqq 8$ の共通範囲を考えて

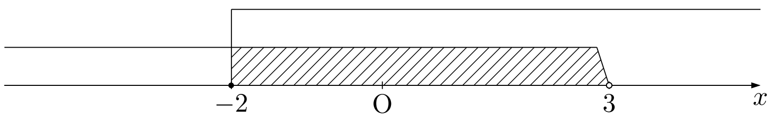


$3 \leqq x \leqq 8$

(ii) $x-3<0$　つまり　$x<3$ のとき
絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

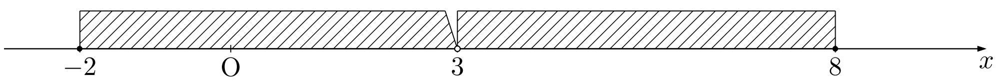
$$-(x-3) \leqq 5$$
$$x-3 \geqq -5$$
$$x \geqq -2$$

となります。よって、$x<3$ と $x \geqq -2$ の共通範囲を考えて



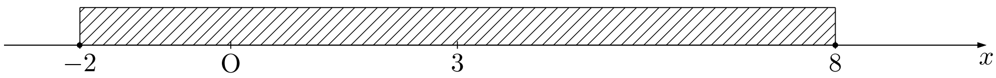
$-2 \leqq x < 3$

(i)，(ii) より



$$-2 \leqq x < 3,\ 3 \leqq x \leqq 8$$

となりますが、これも $x = 3$ の部分でつながるので、1 つにまとめることができ



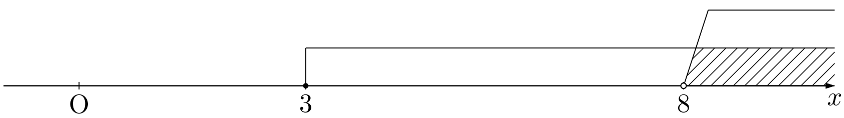
$$-2 \leqq x \leqq 8$$

(4)　(i) $x - 3 \geqq 0$　つまり　$x \geqq 3$ のとき

絶対値記号の中身が 0 以上なので、そのまま絶対値記号をはずして

$$\begin{aligned} x - 3 &> 5 \\ x &> 8 \end{aligned}$$

となります。よって、$x \geqq 3$ と $x > 8$ の共通範囲を考えて



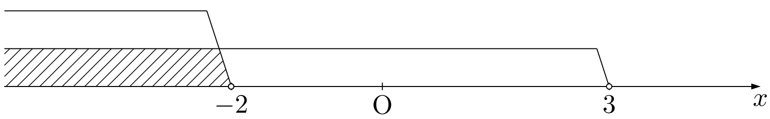
$$x > 8$$

(ii) $x - 3 < 0$　つまり　$x < 3$ のとき

絶対値記号の中身が負なので、マイナスをつけて絶対値記号をはずして

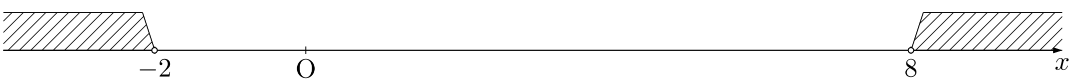
$$\begin{aligned} -(x - 3) &> 5 \\ x - 3 &< -5 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

となります。よって、$x < 3$ と $x < -2$ の共通範囲を考えて



$$x < -2$$

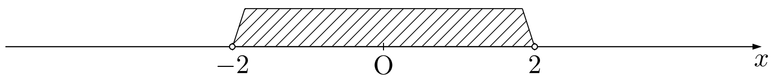
(i), (ii) より



$$x < -2,\ 8 < x$$

次に、絶対値の意味を考えてそれぞれの不等式を解いてみたいと思います。

(1) $|x| < 2$ は、数直線上で、原点から実数 x に対応する点までの距離が 2 未満になることを表しているので、その範囲は

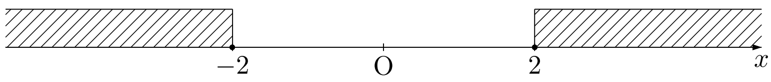


となります。このことから、不等式の解は

$$-2 < x < 2$$

となることがわかります。

(2) $x \geqq 2$ は、数直線上で、原点から実数 x に対応する点までの距離が 2 以上になることを表しているので、その範囲は



となります。このことから、不等式の解は

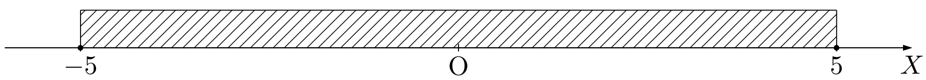
$$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$$

となることがわかります。

(3) $x - 3 = X$ とすると

$$|x-3| \leqq 5 \quad \longrightarrow \quad |X| \leqq 5$$

とできるので、この式は数直線上で、原点から実数 X に対応する点までの距離が 5 以下になることを表しています。その範囲は



となるので

$$-5 \leqq X \leqq 5$$

となることがわかります。X を元に戻すと

$$-5 \leqq x - 3 \leqq 5$$

となり、この各辺に 3 を加えて

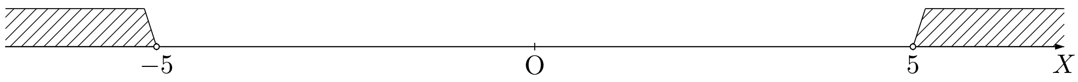
$$-2 \leqq x \leqq 8$$

これが不等式の解になります。

(4) $x - 3 = X$ とすると

$$|x-3| > 5 \quad \longrightarrow \quad |X| > 5$$

とできるので、この式は数直線上で、原点から実数 X に対応する点までの距離が 5 より大きくなることを表しています。その範囲は



となるので

$$X < -5,\ 5 < X$$

となることがわかります。X を元に戻すと

$$x - 3 < -5,\ 5 < x - 3$$

となり、この各辺に 3 を加えて

$$x < -2,\ 8 < x$$

これが不等式の解になります。