【数学 I】2 次関数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　関数とグラフ

1.1　関数と関数の値

2 つの変数 x、y があって、

「x の値を決めたとき、その x に対して y の値が 1 つに決まる」

とき、**y は x の関数である**といいます。

y が x の関数であることを、記号 f（関数「function」の頭文字）を用いて

$$y = f(x)$$

のように表されることがよくありますが、記号 f を用いて必ず表さなければいけないというわけではなく、複数の関数を区別するときには、y が x の関数であることを、

$$y = g(x), \qquad y = h(x)$$

のようにして表すこともあります。

また、$f(x)$ が 1 次式で表されるような関数を **1 次関数**といい、一般的に

$$y = ax + b \quad (a,\ b \text{ は定数},\ a \fallingdotseq 0)$$

のように表されます。さらに、$f(x)$ が 2 次式で表されるような関数は **2 次関数**といい、一般的に

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a,\ b,\ c \text{ は定数、} a \fallingdotseq 0)$$

のように表されます。

関数 $y = f(x)$ において、x の値 α に対応する y の値を $f(\alpha)$ で表し、$f(\alpha)$ を $x = \alpha$ のときの**関数 $f(x)$ の値**といいます。

【例題 1 − 1】

$f(x)$ が次の関数のとき、$f(0),\ f(-1),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めなさい。

(1) $f(x) = 3x + 1$　　　(2) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

＜解説＞

(1) 1 次関数 $f(x) = 3x + 1$ に、$x = 0,\ \ x = -1,\ \ x = \dfrac{1}{2}$ を代入して、

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

(2) 2 次関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ に、$x = 0,\ \ x = -1,\ \ x = \dfrac{1}{2}$ を代入して、

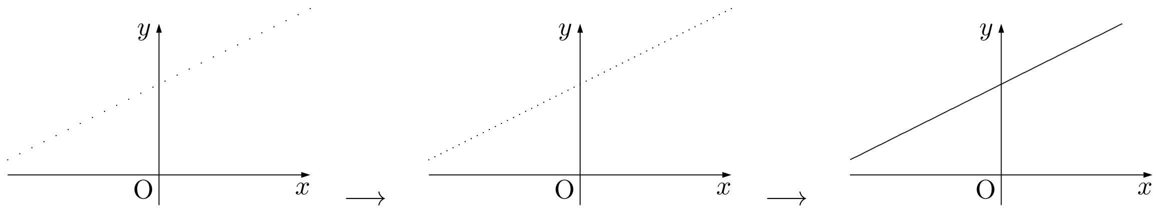
$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

1.2　関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ に関し、x の値とそれに対応する y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点全体で作られる図形を、関数 $y = f(x)$ の**グラフ**といいます。1 次関数のグラフでは、次の図のように、対応する x と y の組 $(x,\ y)$ を座標とする点が、集まれば集まるほど直線に近づき、点全体では直線が作られることになります。



例題 1 － 2

次の 1 次関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = 3x + 1$　　(2) $y = -3x + 4$

＜解説＞

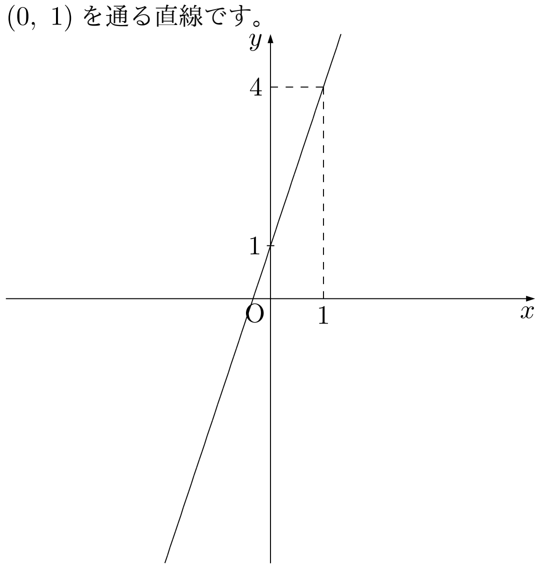
グラフをかくときには、初めに基準となる

x 軸（横軸），　y 軸（縦軸），　原点 O

を必ずかくようにします。

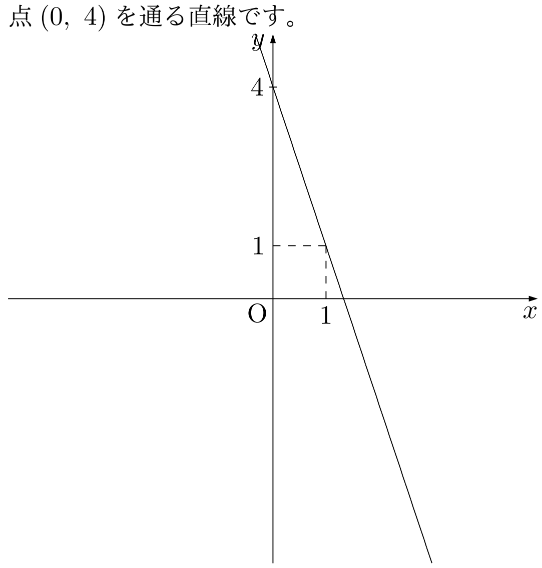
また、1 次関数のグラフは直線になりますが、直線は通る 2 点が決まるとただ 1 つに決まるので、直線のグラフをかくときには、通る 2 点を明記することがポイントです。

(1) 1 次関数 $y = 3x + 1$ のグラフは、傾きが 3 で、点 $(0,\ 1)$ を通る直線です。



このグラフは、$y = 3x + 1$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体から作られる図形です。

(2) 1 次関数 $y = -3x + 4$ のグラフは、傾きが -3 で、点 $(0,\ 4)$ を通る直線です。



このグラフは、$y = -3x + 4$ を満たす $(x,\ y)$ を座標とする点全体から作られる図形です。

1.3 関数の定義域と値域

関数 $y=f(x)$ において、変数 x のとりうる値の範囲のことを、この関数の**定義域**といい、関数を表す式の横にかっこを添えてしましします。ただし、特に断りがないときは、その関数の定義域は実数全体になります。

これに対し変数 y のとりうる値の範囲を、この関数の**値域**といいます。

また、与えられた関数 $y=f(x)$ に対し、その値域の中で最大の値が存在すれば、その値を関数 $y=f(x)$ の**最大値**といい、同様に、最小の値が存在すれば、その値を**最小値**といいます。

【例題 1 − 3】

次の関数のグラフをかき、値域、最大値、最小値を求めなさい。

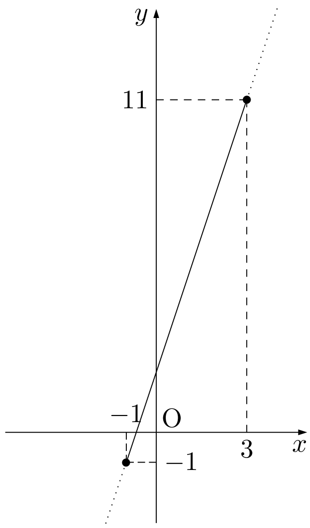
(1) $y=3x+2 \quad (-1 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y=-x+2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

＜解説＞

定義域から値域を考えますが、y がどのような値をとるのかはグラフをかけば一目瞭然です。そのため、値域、最大値、最小値を求めるような問題では、「関数のグラフをかき」と指示が出されていなくても、グラフをかいたり、グラフをイメージして考えることが大切です。

また、定義域が与えられている関数のグラフをかくときには、定義域の範囲内のグラフは実線に、範囲外のグラフは点線でかくようにします。

(1) 関数 $y=3x+2$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは、次のようになります。



グラフより、値域は

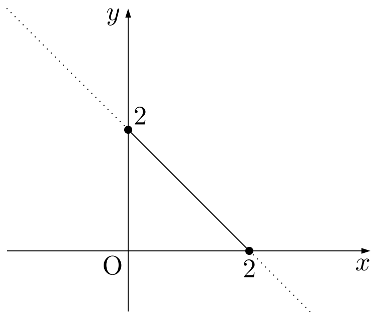
$$-1 \leqq y \leqq 11$$

となり、

$x=3$ のとき最大値 11、$x=-1$ のとき最小値 -1

をとります。

(2) 関数 $y = -x + 2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ におけるグラフは、次のようになります。



グラフより、値域は

$$0 \leqq y \leqq 2$$

となり、

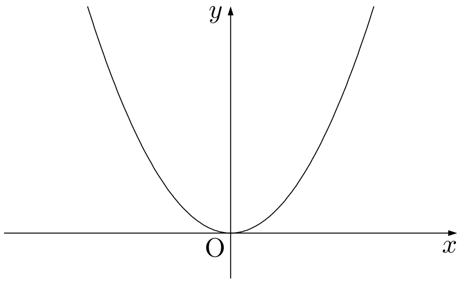
$$x = 0 \text{ のとき最大値 } 2\text{、} x = 2 \text{ のとき最小値 } 0$$

をとります。

2　2次関数のグラフ

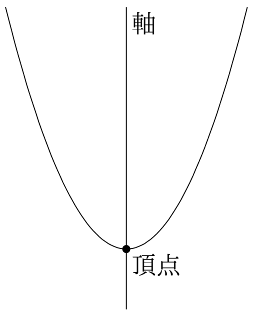
2.1　$y = ax^2$ のグラフ

2 次関数 $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$ のグラフは、y 軸に関して対称で、原点を通る曲線です。この曲線は、ちょうど**物**を**放**り投げたときにえがく曲**線**と同じになるので、**放物線**といいます。

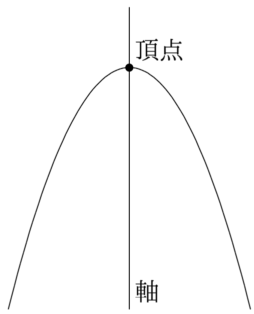


この $y = ax^2$ のグラフは、$a > 0$ のとき下に出っ張っている放物線で、$a < 0$ のときには上に出っ張っている放物線になり、このことを

(i) $a > 0$ のとき、**下に凸**の放物線



(ii) $a < 0$ のとき、**上に凸**の放物線



といいます。(「凸」とは、「出っ張っている」という意味です。)

また、上の図のように、放物線の対称軸を**軸**、軸と放物線の交点を**頂点**といいます。このことから、$y = ax^2$ のグラフは、

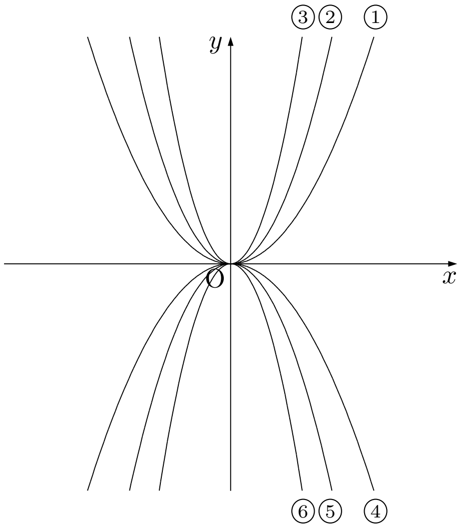
「軸が y 軸で、頂点が原点である放物線である」

ということができます。

さらに、

① $y = \dfrac{1}{2}x^2$　② $y = x^2$　③ $y = 2x^2$　④ $y = -\dfrac{1}{2}x^2$　⑤ $y = -x^2$　⑥ $y = -2x^2$

のグラフをかいてみると



のようになり、$|a|$の値が大きいほど、頂点での曲がり方が急になるという特徴があります。

【例題 2 − 1】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = 2x^2$　　(2) $y = -2x^2$

＜解説＞

グラフをかくときには、

x 軸（横軸）、y 軸（縦軸）、原点 O

をかいて、グラフをかく前の準備を行います。

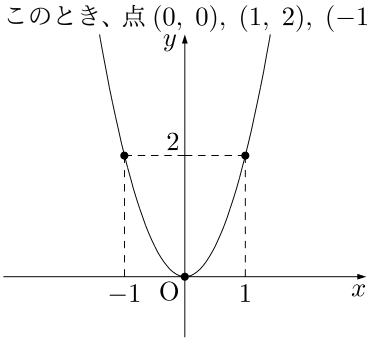
関数 $y = ax^2$ のグラフは、原点、求めやすいある 1 点、その点と y 軸に関して対称な点という 3 点をなめらかに結ぶとうまくかくことができます。

(1) x^2 の係数が「2」であるので、$y = 2x^2$ のグラフは、

軸が y 軸で、頂点が原点である下に凸の放物線

になります。

このとき、点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(-1,\ 2)$ を通るので、

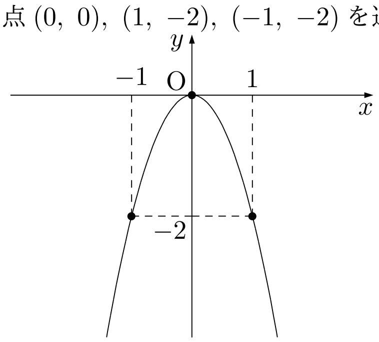


(2) x^2 の係数が「-2」であるので、$y = -2x^2$ のグラフは、

軸が y 軸で、頂点が原点である上に凸の放物線

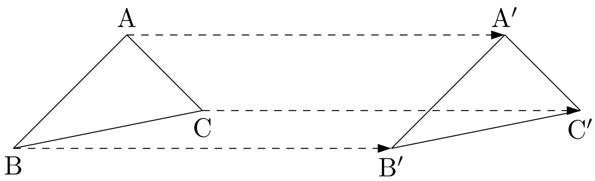
になります。

点 $(0,\ 0)$, $(1,\ -2)$, $(-1,\ -2)$ を通るので、



2.2　$y = ax^2 + q$ のグラフ

次の図のように、ある図形を、一定の方向に、一定の距離だけ動かす移動を**平行移動**といいます。



グラフが平行移動するときは、

x 軸の正（負）の方向に○、y 軸の正（負）の方向に□だけ平行移動

のように表すことができますが、一般的に、x 軸や y 軸の正の方向を基準にして、

x 軸方向に○、y 軸方向に□だけ平行移動

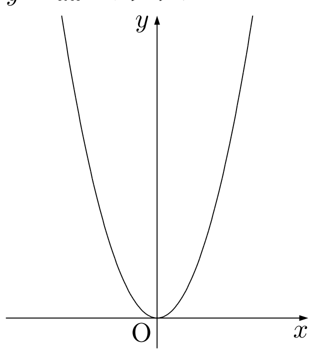
というように表します。

$y = ax^2$ のグラフは、軸が y 軸、頂点は原点になりましたが、$y = ax^2 + q$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを

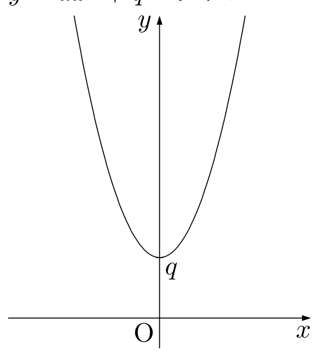
「y 軸の方向に q だけ平行移動」

した放物線になり、その軸は y 軸、頂点は点 $(0,\ q)$ になります。

(i) $y = ax^2$ のグラフ



(ii) $y = ax^2 + q$ のグラフ



【例題 2 − 2】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = x^2 + 3$　　(2) $y = x^2 - 3$　　(3) $y = -x^2 + 3$　　(4) $y = -x^2 - 3$

＜解説＞

グラフをかくときの基本は、x と y の対応表を作り、それらに対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶことです。

また、グラフをかく前の準備として、

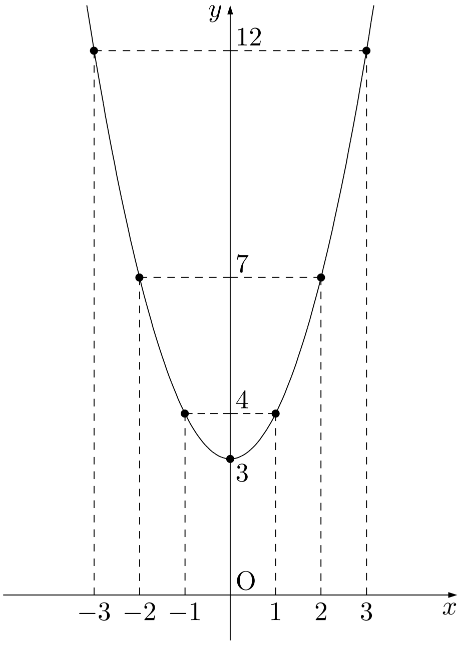
x 軸（横軸）、y 軸（縦軸）、原点

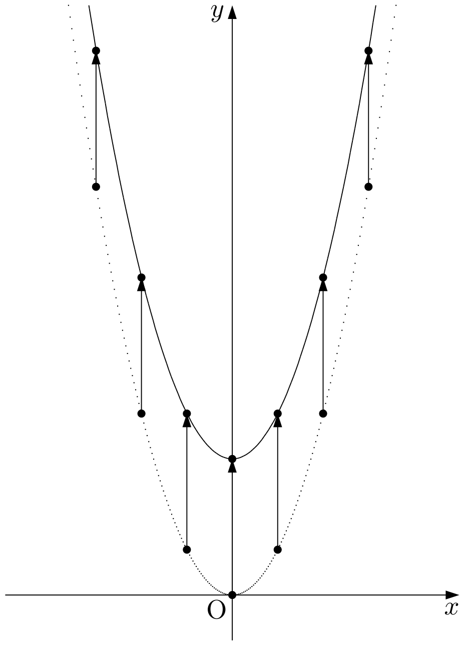
を忘れずにかくようにします。

(1) まず、x と y の対応表を作成します。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$y\ (=x^2+3)$	$\cdots$	12	7	4	3	4	7	12	$\cdots$

この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと左下図のようになります。



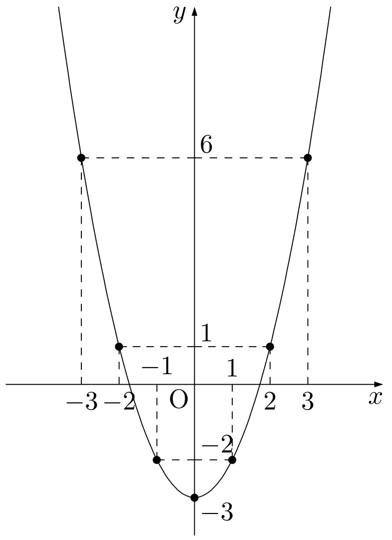


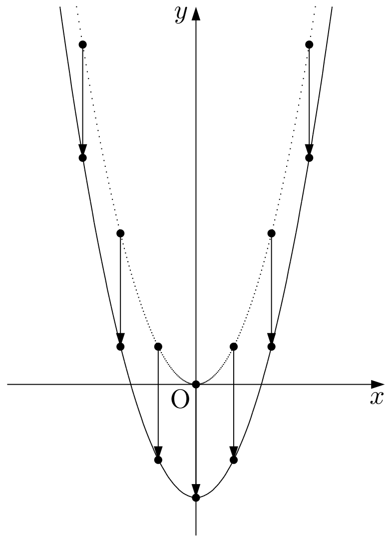
このとき、$y=x^2$ のグラフ（点線）と $y=x^2+3$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y=x^2+3$ のグラフは、$y=x^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動していることがわかります。

(2) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$y\ (=x^2-3)$	$\cdots$	6	1	-2	-3	-2	1	6	$\cdots$

となるので、この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと次の図（左）のようになります。



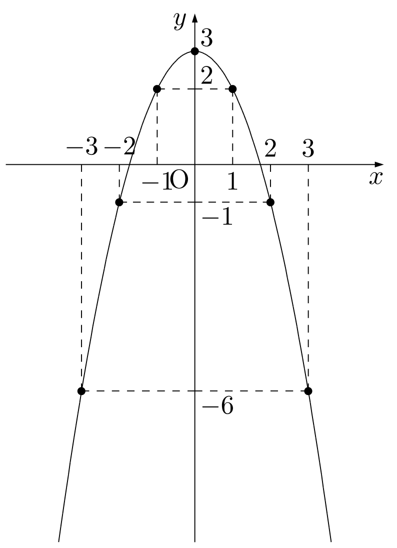


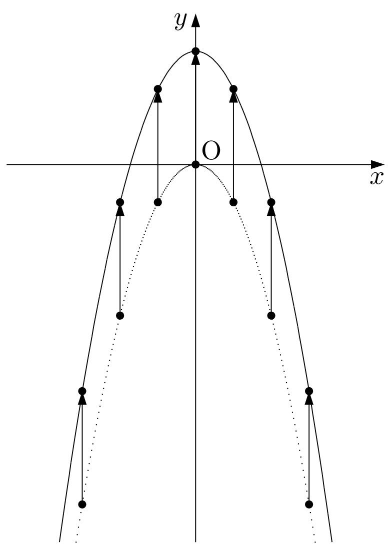
このとき、$y = x^2$ のグラフ（点線）と $y = x^2 - 3$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y = x^2 - 3$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを y 軸方向に -3 だけ平行移動していることがわかります。

(3) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$
$y\ (= -x^2 + 3)$	$\cdots$	-6	-1	2	3	2	-1	-6	$\cdots$

この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと左下図のようになります。



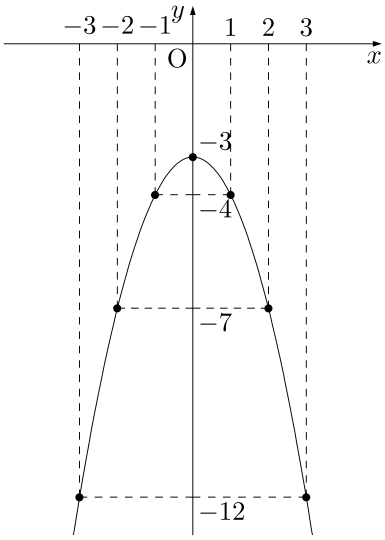


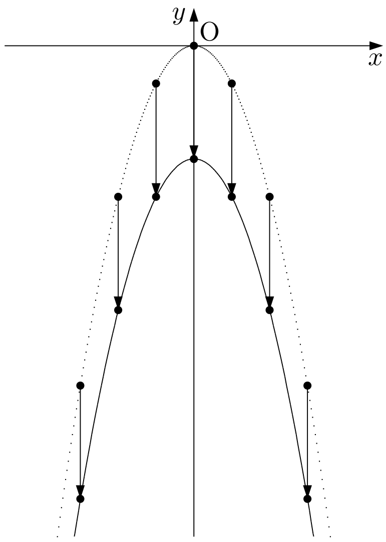
このとき、$y = -x^2$ のグラフ（点線）と $y = -x^2 + 3$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y = -x^2 + 3$ のグラフは、$y = -x^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動していることがわかります。

(4) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$
$y\ (=-x^2-3)$	$\cdots$	-12	-7	-4	-3	-4	-7	-12	$\cdots$

この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと左下図のようになります。





このとき、$y=-x^2$ のグラフ（点線）と $y=-x^2-3$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y=-x^2-3$ のグラフは、$y=-x^2$ のグラフを y 軸方向に -3 だけ平行移動していることがわかります。

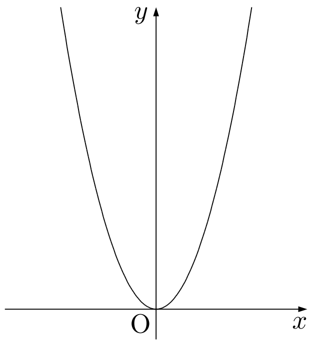
2.3　$y=a(x-p)^2$ のグラフ

$y=ax^2$ のグラフは、軸が y 軸、頂点は原点になりましたが、$y=a(x-p)^2$ のグラフは、$y=ax^2$ のグラフを

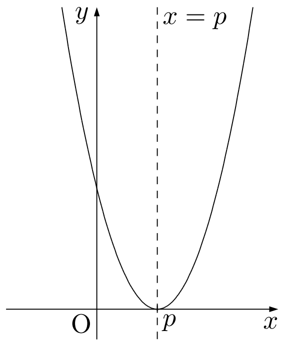
「x 軸の方向に p だけ平行移動」

した放物線になります。そして、その軸は直線 $x=p$、頂点は点 $(p,\ 0)$ になります。

(i) $y=ax^2$ のグラフ



(ii) $y=a(x-p)^2$ のグラフ



【例題 2 − 3】

次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=(x-2)^2$　　(2) $y=(x+2)^2$　　(3) $y=-(x-2)^2$　　(4) $y=-(x+2)^2$

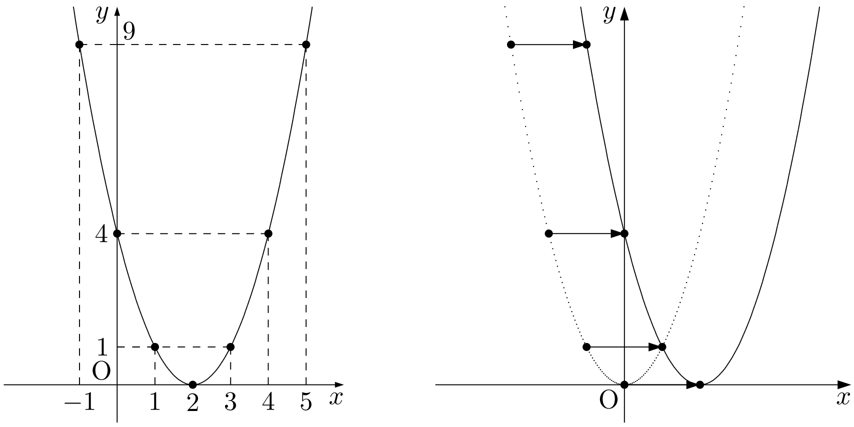
＜解説＞

x と y の対応表を作り、それらに対応する点 $(x,\ y)$ を座標平面にかき入れ、その点をなめらかに結ぶことでグラフをかきます。

(1) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
x^2	$\cdots$	1	0	1	4	9	16	25	$\cdots$
$y\ (=(x-2)^2)$	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

となるので、この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと次の図（左）のようになります。

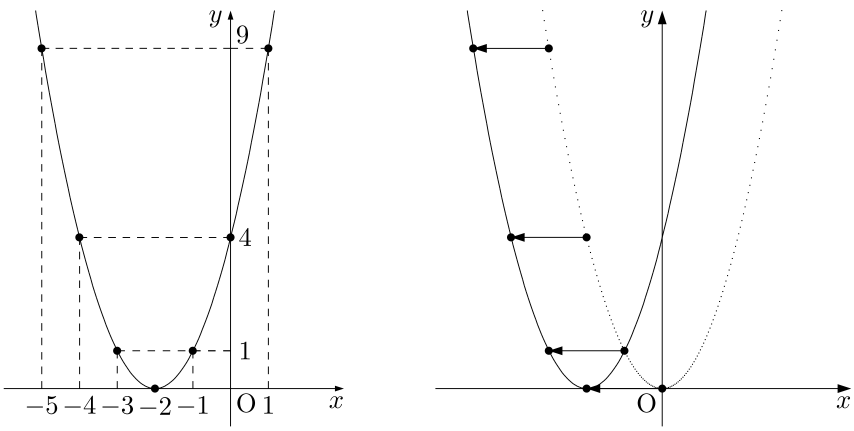


このとき、$y = x^2$ のグラフ（点線）と $y = (x-2)^2$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y = (x-2)^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動していることがわか

(2) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
x^2	$\cdots$	25	16	9	4	1	0	1	$\cdots$
$y\ (=(x+2)^2)$	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

となるので、この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと次の図（左）のようになります。

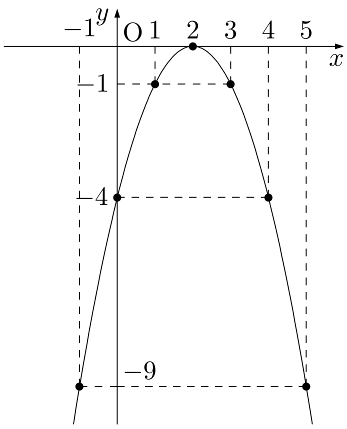


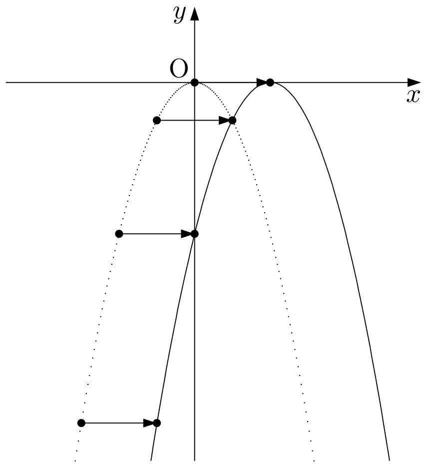
このとき、$y = x^2$ のグラフ（点線）と $y = (x+2)^2$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y = (x+2)^2$ のグラフは、$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動していることがわかります。

(3) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	$\cdots$
$y\ (=-(x-2)^2)$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

となるので、この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと次の図（左）になります。



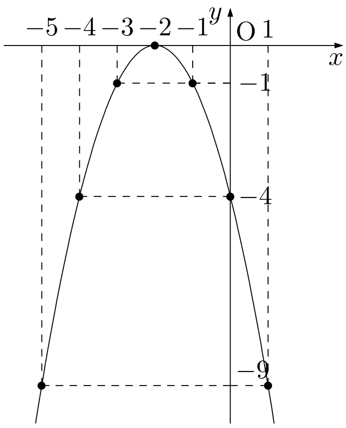


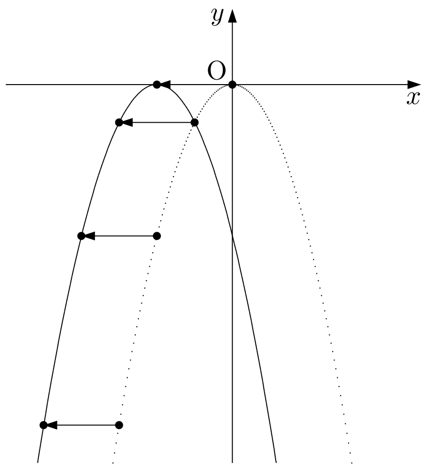
このとき、$y=-x^2$ のグラフ（点線）と $y=-(x-2)^2$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y=-(x-2)^2$ のグラフは、$y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動していることがわかります。

(4) x と y の対応表を作成すると

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	$\cdots$
$y\ (=-(x+2)^2)$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

となるので、この表から、対応する点 $(x,\ y)$ をなめらかに結ぶと次の図（左）のようになります。

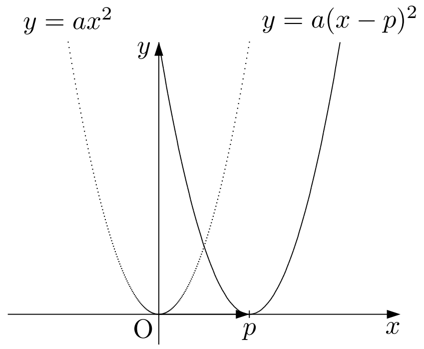




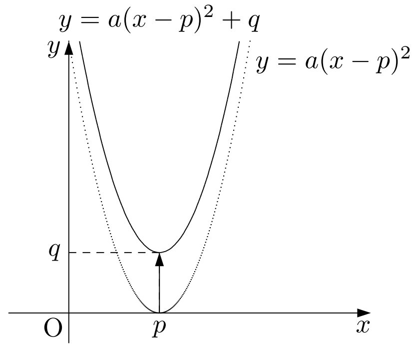
このとき、$y=-x^2$ のグラフ（点線）と $y=-(x+2)^2$ のグラフ（実線）をまとめてグラフをかくと右上図のようになり、$y=-(x+2)^2$ のグラフは、$y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動していることがわかります。

2.4 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフ（点線）を x 軸の方向に p だけ平行移動すると $y = a(x-p)^2$ のグラフ（実線）になりました。



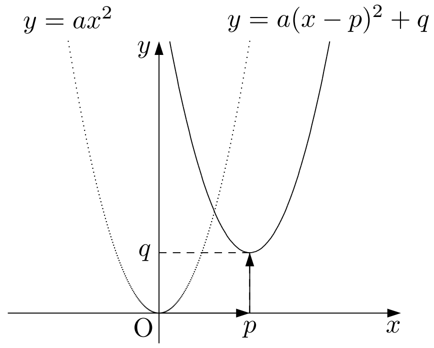
さらに、$y = a(x-p)^2$ のグラフ（点線）を y 軸の方向に q だけ平行移動すると $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ（実線）になります。



つまり、$y = ax^2$ のグラフ（点線）を

x 軸の方向に p, y 軸の方向に q

だけ平行移動すると $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ（実線）になるので、$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、軸が直線 $x = p$、頂点が点 $(p,\ q)$ の放物線になります。



【例題 2 − 4】

次の関数のグラフについて、頂点と軸を求め、そのグラフをかきなさい。

(1) $y = 2(x+1)^2 + 2$　　(2) $y = -(x-2)^2 + 3$

＜解説＞

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点の座標は点 $(p,\ q)$ ですが、これは、2 乗の中身を 0 にするような x の値、つまり、$x - p = 0$ より

$$x = p$$

を求め、さらに、このときの y の値

$$y = a\cancel{(p-p)}^2 + q = q$$

を求めることにより、頂点の座標が

$$(x,\ y) = (p,\ q)$$

になっていると考えることができます。

また、軸は頂点を通り、y 軸に平行な直線（x 軸に垂直な直線）であることから、

直線 $x = p$

になります。

$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、次のような手順で行うとスムーズにかくことができます。

(i) 頂点の座標を求める。
グラフがどのあたりにできるのかの見当をつけます。

(ii) x 軸、y 軸、原点をかく。
(i) の頂点の位置と x^2 の係数（上に凸か下に凸のどちらの放物線になるのか）を参考に、グラフがおさまるように x 軸、y 軸、原点を定めます。

(iii) 頂点の座標、y 軸との交点、その点と軸について対称な点をかき入れ、その 3 点をなめらかに結ぶ。
頂点と求めやすい 2 点をとって 3 点をなめらかに結びます。

(1) $x + 1 = 0$ より

$$x = -1$$

このとき、y の値は

$$\begin{aligned} y &= 2\cancel{(-1+1)}^2 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

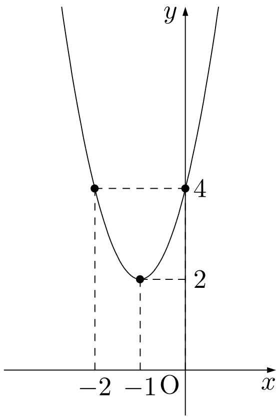
となるので、

頂点 : $(-1,\ 2)$　　軸 : 直線 $x = -1$

になることがわかります。また、$x=0$ のとき

$$y=2(0+1)^2+2=4$$

となるので、この点 $(0,\ 4)$ と直線 $x=-1$ に対称な点は $(-2,\ 4)$ になります。このことから、頂点 $(-1,\ 2)$ と 2 点 $(0,\ 4),\ (-2,\ 4)$ をかき入れ、その 3 点をなめらかに結ぶと、グラフは次のようになります。



(2) $x-2=0$ より

$$x=2$$

このとき、y の値は

$$y=-\cancel{(2-2)}^2+3=3$$

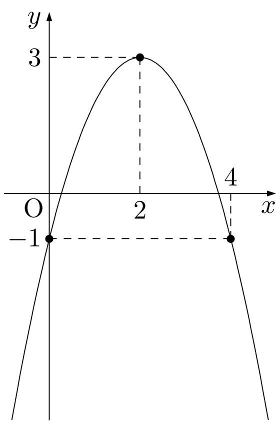
となるので、

頂点 : $(2,\ 3)$　　軸 : 直線 $x=2$

になることがわかります。また、$x=0$ のとき

$$y=-(0-2)^2+3=-1$$

となるので、この点 $(0,\ -1)$ と直線 $x=2$ に対称な点は $(4,\ -1)$ になります。このことから、頂点 $(2,\ 3)$ と 2 点 $(0,\ -1),\ (4,\ -1)$ をかき入れ、その 3 点をなめらかに結ぶと、グラフは次のようになります。



2.5　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかくには、$y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形（この変形を「**平方完成**」といいます）すれば、すでに学習した手順によりグラフをかくことができます。

$y = ax^2 + bx + c$ を平方完成するには、まず、x^2 の係数で x^2, x を含む項をくくります。

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

次に、平方の形を作るために、x の係数の半分の 2 乗を加えて、引きます。

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c$$

そして、この式を整理すると

$$\begin{aligned} y &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

とできるので、$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、$y = ax^2$ のグラフを

$$x \text{ 軸方向に } -\frac{b}{2a},\ y \text{ 軸方向に } -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

だけ平行移動した放物線で、

$$\text{頂点}:\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \qquad \text{軸}:\text{直線 } x = -\frac{b}{2a}$$

になります。これを公式として覚える必要はありませんが、平方完成の手順はしっかり把握しておきましょう。

【例題 2 − 5】

次の関数の頂点と軸を求め、グラフをかきなさい。

(1) $y = x^2 - 6x + 6$　　　　(2) $y = x^2 + x + 1$

＜解説＞

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、次のような手順でスムーズにかくことができます。

(i) $y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形（平方完成）する。
(ii) 頂点の座標を求める。
(iii) x 軸、y 軸、原点をかく。
(iv) 頂点の座標と 2 点（y 軸との交点、その点と軸について対称な点のような読み取りやすい点）をかき入れ、その 3 点をなめらかに結ぶ。

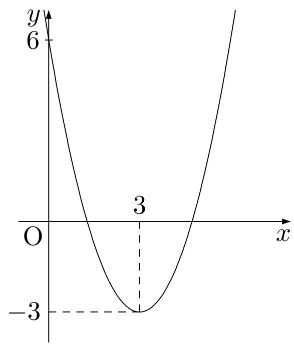
(1) $y=x^2-6x+6$ を平方完成すると

$$\begin{aligned}y&=(x^2-6x)+6\\&=(x^2-6x+3^2-3^2)+6\\&=(x^2-6x+9)-9+6\\&=(x-3)^2-3\end{aligned}$$

とできるので、

頂点 : $(3,\ -3)$　　軸 : 直線 $x=3$

となり、x^2 の係数が正であることから、グラフは下に凸の放物線になります。



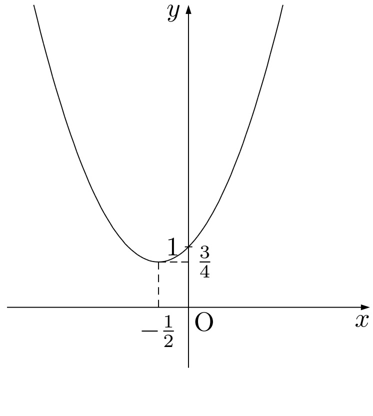
(2) $y=x^2+x+1$ を平方完成すると

$$\begin{aligned}y&=(x^2+x)+1\\&=\left\{x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+1\\&=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

とできるので、

頂点 : $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　軸 : 直線 $x=-\dfrac{1}{2}$

となり、x^2 の係数が正であることから、グラフは下に凸の放物線になります。



2.6　放物線の平行移動①

形や大きさのあるものの移動の様子を考えるとき、特徴的なある 1 点に着目するのが効果的です。2 次関数のグラフ（放物線）の特徴的な点は頂点になるので、放物線の平行移動を考えるときには、頂点がどのように移動したのかを考えます。

【例題 2 − 6】

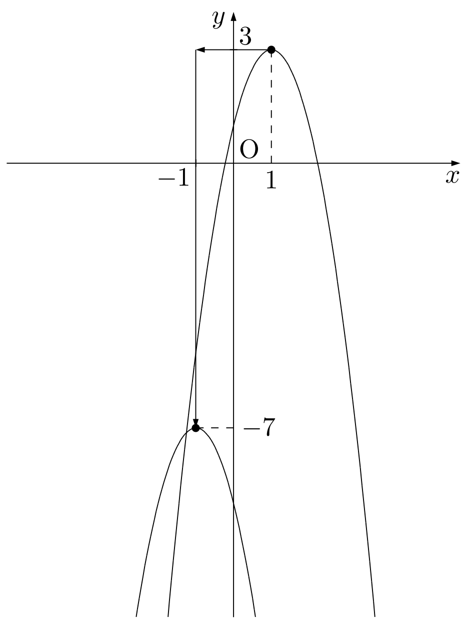
関数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ のグラフを平行移動したら、$y = -2x^2 - 4x - 9$ になりました。どのように平行移動しましたか。

＜解説＞

頂点の移動の様子を把握するため、まずは平方完成をして頂点を読み取れるようにします。

$y = -2x^2 + 4x + 1$ を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &- 2x^2 + 4x + 1 \\ &= -2(x^2 - 2x) + 1 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 \\ &= -2(x - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$



となるので、頂点 (1, 3) となります。

また、$y = -2x^2 - 4x - 9$ を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4x - 9 \\ &= -2(x^2 + 2x) - 9 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9 \\ &= -2(x + 1)^2 - 7 \end{aligned}$$

となるので、頂点 $(-1,\ -7)$ となります。

よって、

x 軸方向の変化量：$-1 - 1 = -2$,　　y 軸方向の変化量：$-7 - 3 = -10$

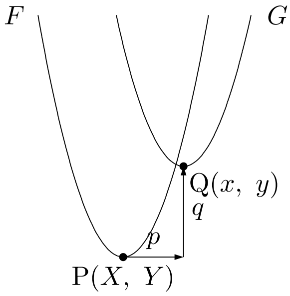
であるので、$y = -2x^2 - 4x - 9$ のグラフは $y = -2x^2 + 4x + 1$ のグラフを

x 軸方向に -2, y 軸方向に -10 だけ平行移動

したことがわかります。

2.7　放物線の平行移動②

次の図のように、関数 $y = f(x)$ のグラフを F とし、そのグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを G とします。



ここで、グラフ F 上の任意の点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とします。その点が x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動して、グラフ G 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移ったとすると、

$$X + p = x, \qquad Y + q = y$$

という関係が成り立つので、

$$X = x - p, \qquad Y = y - q$$

と表すことができます。また、点 P はグラフ F（$y = f(x)$）上の点であるので、

$$Y = f(X)$$

と表すことができ、この式に

$$X = x - p, \qquad Y = y - q$$

を代入すれば、

$$y - q = f(x - p)$$

という関係式を導くことができます。この式は x と y に関する関係式、つまり、点 Q に関する関係式を表しているので、グラフ G の表す式ということになります。

以上のことから、$y = f(x)$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動すると、その平行移動後の関数は、

$$y - q = f(x - p)$$

と表され、x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x - p, \qquad y \longrightarrow y - q$$

と置き換えたものになります。

この関係は一般的な関数すべてにおいて成り立つもので、2 次関数の場合においても、2 次関数 $y = ax^2$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した関数の式は、

$$y = a(x - p)^2 + q \longrightarrow y - q = a(x - p)^2$$

のように表され、x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x-p, \qquad y \longrightarrow y-q$$

と置き換えたものになっていることからも確認できます。

【例題 2 − 7】

関数 $y=-x^2+4x-9$ のグラフを、x 軸方向に -1、y 軸方向に 2 だけ平行移動したとき、その関数の式を求めなさい。

<解説>

平行移動の基本は、

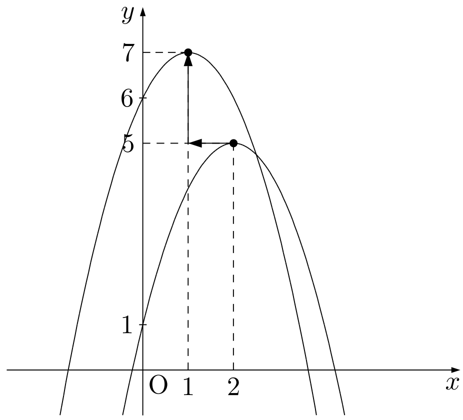
「特徴的なある 1 点に着目する」

ことであったので、まずは、2 次関数の特徴的な点である、「頂点」に着目することで問題を解いてみます。

頂点を読み取るために、$y=-x^2+4x-9$ を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= -x^2+4x+1 \\ &= -(x^2-4x)+1 \\ &= -(x^2-4x+4-4)+1 \\ &= -(x-2)^2+5 \end{aligned}$$

となり、頂点が点 (2, 5) であることが読み取れます。この点を、x 軸方向に -1、y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、



$$x: 2+(-1)=1, \qquad y: 5+2=7$$

より、点 (1, 7) に移ることになります。

平行移動では、図形の形は変わらないので関数の形は変わりません。2 次関数の場合は、x^2 の係数がグラフの形（尖り具合）を決めるので、平行移動前後で x^2 の係数は変わらないことになります。このことから、求める 2 次関数の式は、x^2 の係数が「-1」で、頂点 (1, 7) となる式になるので、

$$y=-(x-1)^2+7$$

と表すことができます。また、この式を展開して整理をすれば、

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)^2+7 \\ &= -(x^2-2x+1)+7 \\ &= -x^2+2x+6 \end{aligned}$$

となり、この式を求める関数の式としても問題ありません。（ただし、計算ミスをしてしまう可能性もあるので、あえて計算する必要もありません。）

<別解>

x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した式は、元の関数の式の x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x - p, \qquad y \longrightarrow y - q$$

と置き換えたものになるので、この問題では、x と y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x - (-1), \qquad y \longrightarrow y - 2$$

と置き換えればよいことになります。

このことから、求める関数の式は、

$$\begin{aligned} y - 2 &= -(x+1)^2 + 4(x+1) + 1 \\ y &= -(x^2 + 2x + 1) + 4x + 4 + 1 + 2 \\ &= -x^2 - 2x - 1 + 4x + 7 \\ &= -x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

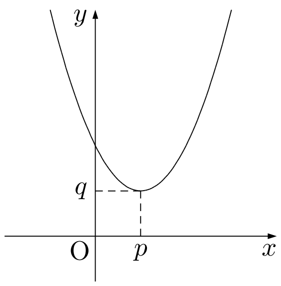
3　2次関数の最大・最小

3.1　2次関数の最大値・最小値

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値と最小値を考えます。

(i) $a>0$（下に凸の放物線）のとき

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは次の図のようになります。



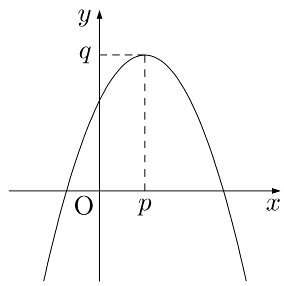
グラフからわかるように、$x=p$ のとき y の値は最小となり、最小値は q になりますが、y の値はいくらでも大きくなることができるので、最大値は存在しません。よって、

$$x=p\text{ のとき最小値 } q,\ \text{最大値なし}$$

となります。

(ii) $a<0$（上に凸の放物線）のとき

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは次の図のようになります。



グラフからわかるように、$x=p$ のとき y の値は最大となり、最大値は q になりますが、y の値はいくらでも小さくなることができるので、最小値は存在しません。よって、

$$x=p\text{ のとき最大値 } q,\ \text{最小値なし}$$

となります。

このように、定義域に特に断りがない（定義域が実数全体の）場合、2次関数の最大・最小となる点は頂点になります。

最大値や最小値を求める問題では、問題文に指示がされていなくても、最大・最小となるときの x の値も合わせて書いておくことが基本になるので、注意してください。

【例題 3 − 1】

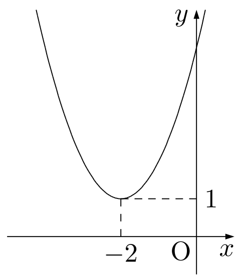
次の2次関数の最大値、または最小値を求めなさい。

(1) $y=(x+2)^2+1$　　(2) $y=-(x+3)^2-1$

＜解説＞

最大値、最小値を求める（値域に関する）問題であるので、グラフをかいて（もしくはイメージして）判断します。

(1) $y=(x+2)^2+1$ のグラフは、頂点 $(-2,\ 1)$ で下に凸の放物線であるので、グラフをかくと

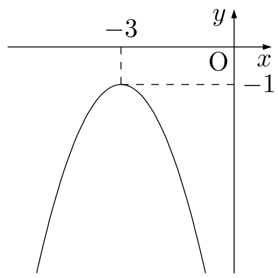


よって

$x=-2$ のとき最小値 1, 最大値なし

となります。

(2) $y=-(x+3)^2-1$ のグラフは、頂点 $(-3,\ -1)$ で上に凸の放物線であるので、グラフをかくと



よって

$x=-3$ のとき最大値 -1, 最小値なし

となります。

3.2 定義域がかぎられたときの最大値・最小値

すでに学習したように、最大値や最小値のように値域に関する問題では、グラフをかく、もしくは、イメージして考えるのが基本になります。

そのため、2 次関数の問題では、次のような手順で最大値・最小値を求めます。

(i) 平方完成をする。($y = ax^2 + bx + c \longrightarrow y = a(x-p)^2 + q$)
グラフをかくためには頂点が必要になるので、必要に応じて平方完成を行います。

(ii) グラフをかく。(もしくはイメージする。)
最大値・最小値を読み取るために、グラフをかきます。

(iii) グラフから最大値・最小値を求める。(最大・最小となる点の候補:頂点、端点)
定義域が限られた関数では、1 次関数の場合は、基本的に、端点で最大・最小になりますが、2 次関数の場合は、頂点を境に折れ曲がったような形になるので、端点で最大・最小とは限らず、すでに学習したように、頂点においても最大・最小になる場合があります。

【例題 3 − 2】

次の 2 次関数の最大値、最小値を求めなさい。

(1) $y = x^2 + 4x + 3 \quad (x \leqq -2)$
(2) $y = -x^2 + 6x - 4 \quad (x \geqq 2)$
(3) $y = -x^2 + 2x + 1 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$
(4) $y = -x^2 + 2x + 1 \quad (-2 < x < 3)$

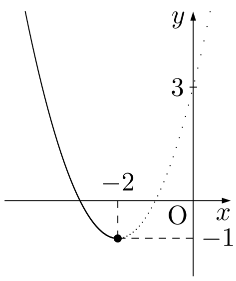
＜解説＞

最大値、最小値の問題であるので、グラフをかいて考えます。ただし、定義域が与えられているので、範囲に注意してグラフをかきます。

(1) 平方完成をすると

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + 4x) + 3 \\ &= (x^2 + 4x + 4 - 4) + 3 \\ &= (x+2)^2 - 1 \end{aligned}$$

とできるので、この関数のグラフは、頂点が $(-2,\ -1)$ で下に凸の放物線です。
このグラフを $x \leqq -2$ の範囲でかくと右図のようになるので、

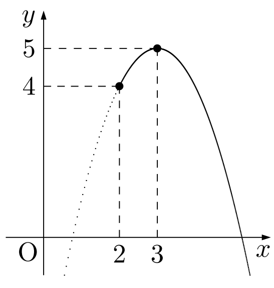


$x = -2$ のとき最小値 -1, 最大値なし

(2) 平方完成をすると

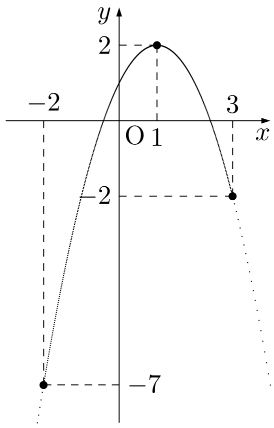
$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 6x) - 4 \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4 \\ &= -(x-3)^2 + 5 \end{aligned}$$

とできるので、この関数のグラフは、頂点が $(3,\ 5)$ で上に凸の放物線です。
このグラフを $x \geqq 2$ の範囲でかくと右図のようになるので、



$x = 3$ のとき最大値 5, 最小値なし

(3) 平方完成をすると

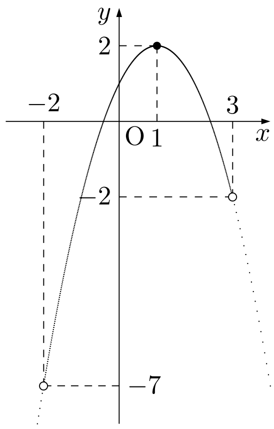


$$\begin{aligned} y &= -(x^2-2x)+1 \\ &= -(x^2-2x+1-1)+1 \\ &= -(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

とできるので、この関数のグラフは、頂点が $(1,\ 2)$ で上に凸の放物線です。このグラフを $-2 \leqq x \leqq 3$ の範囲でかくと右図のようになるので、

$x=1$ のとき最大値 $2,\ x=-2$ のとき最小値 -7

(4) (3) と関数の式が同じなので、関数のグラフは頂点が $(1,\ 2)$ で上に凸の放物線です。このグラフを $-2<x<3$ の範囲でかくと右図のようになります。ぱっと見は（3）と全く同じに見えるので、



$x=1$ のとき最大値 $2,\ x=-2$ のとき最小値 -7

としたくなりますが、グラフでも白丸になっているように、$x=-2$ は定義域に含まれていないのでその値をとることはできません。$x=-2$ 付近で最も y の値は小さくなりそうですが、明確に「この値」ということができないので、このような場合には最大値や最小値を求めることができません。つまり、

$x=1$ のとき最大値 2, 最小値なし

となります。

3.3　最大値から係数決定

【例題 3 − 3】

関数 $y = x^2 + 4x + k \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 15 であるとき、定数 k の値を求めなさい。

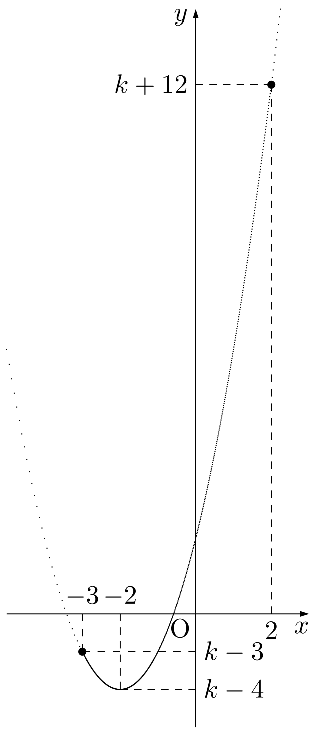
＜解説＞

　最大値に関する問題なので、グラフをかいて（もしくはイメージして）考えます。

　$y = x^2 + 4x + k$ を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + k \\ &= (x^2 + 4x + 4 - 4) + k \\ &= (x + 2)^2 + k - 4 \end{aligned}$$

となるので、頂点 $(-2,\ k - 4)$ で下に凸の放物線になります。しかし、k の値がわからないので正確なグラフをかくことはできませんが、$-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲において右のようなグラフになります。（どこで最大になるのかがわかればよいので、正確なグラフをかく必要はありません。）



　このことから、$x = 2$ のとき関数 $y = x^2 + 4x + k$ は最大となり、その最大値は

$$\begin{aligned} y &= 2^2 + 4 \cdot 2 + k \\ &= k + 12 \end{aligned}$$

になります。よって、最大値が 15 となるためには

$$k + 12 = 15$$

となればよいので、

$$k = 3$$

であることがわかります。

4　2次関数の決定

y が x の 2 次関数であるとき、

$y=$（x の 2 次式）

という形になっていれば、x の 2 次式はどのような形でも問題ありませんが、主に、

① $y=a(x-p)^2+q$　　$(a,\ p,\ q$ は定数$)$
② $y=ax^2+bx+c$　　$(a,\ b,\ c$ は定数$)$

という 2 通りの表し方があり、そのような式について今まで学習してきました。それぞれの式において、①では $a,\ p,\ q$、②では $a,\ b,\ c$ が特定できれば、2 次関数の式が決まることになります。
ここでは、どのような条件のときにどちらの式を用いて 2 次関数の式を求めるのかを学習します。

4.1　頂点や軸に関する条件

2 次関数の式が

$y=a(x-p)^2+q$

と表される場合、この式から頂点が $(p,\ q)$ であることを読み取ることができました。逆に言えば、頂点が $(p,\ q)$ であれば、a を定数として、

$y=a(x-p)^2+q$

と 2 次関数の式を表すことができます。
このように、2 次関数のグラフについて、頂点や軸に関する条件が与えられたとき、

$y=a(x-p)^2+q$

とおくことで、条件から $a,\ p,\ q$ の値を特定し、2 次関数の式を求めることができます。

【例題 4 − 1】

グラフが次の条件を満たす放物線のとき、その関数の式を求めなさい。
(1) 頂点の座標が $(-4,\ 2)$ で、y 軸との交点が $(0,\ -2)$ である。
(2) 軸が $x=1$ で、2 点 $(0,\ -2)$, $(-1,\ -11)$ を通る。

<解説>

(1) 頂点が点 $(-4,\ 2)$ であるので、求める放物線の式を

$$y=a(x+4)^2+2 \ \cdots\cdots\ ①$$

と表すことができます。また、点 $(0,\ -2)$ を通るので、①の式に、$x=0,\ y=-2$ を代入して

$$\begin{aligned} a(0+4)^2+2&=-2\\ 16a&=-4\\ a&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となるので、この値を①に代入すれば、求める放物線の式は

$$y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 2$$

となります。

(2) 放物線の軸（頂点の x 座標）が $x = 1$ であるので、求める放物線の式を

$$y = a(x-1)^2 + q \quad \cdots\cdots \text{②}$$

と表すことができます。グラフが 2 点 $(0,\ -2)$, $(-1,\ -11)$ を通るので、②の式に、$x = 0$, $y = -2$ および、$x = -1$, $y = -11$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} a(0-1)^2 + q = -2 \\ a(-1-1)^2 + q = -11 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a + q = -2 & \cdots\cdots \text{③} \\ 4a + q = -11 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

となるので、④ − ③ より

$$\begin{aligned} 3a &= -9 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

これを③に代入して

$$\begin{aligned} -3 + q &= -2 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

となるので、これらの値を②に代入することで、求める放物線の式は

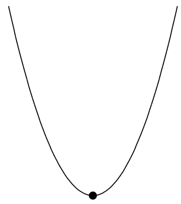
$$y = -3(x-1)^2 + 1$$

となります。

4.2 最大値・最小値に関する条件

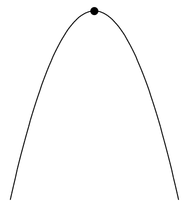
2 次関数では、頂点や端点が最大・最小の候補になることを学習しましたが、定義域に特に断りがない場合、端点が存在しないので、次の図のように頂点で最大・最小になります。

(i) $a > 0$（下に凸の放物線）



頂点で最小

(ii) $a < 0$（上に凸の放物線）



頂点で最大

このことから、定義域に特に断りがない場合、最大値や最小値に関する条件は、頂点に関する条件と同じであると考えることができるので、2 次関数のグラフについて、頂点や軸に関する条件が与えられたときと同じように、

$$y = a(x-p)^2 + q$$

とおくことで、条件から $a,\ p,\ q$ の値を特定し、2 次関数の式を求めることができます。

【例題 4 − 2】

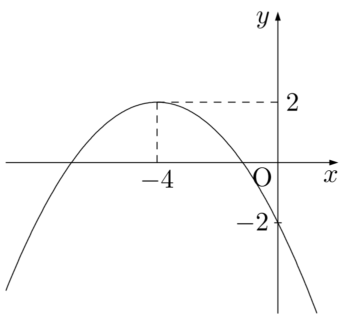
グラフが次の条件を満たす放物線のとき、その関数の式を求めなさい。

(1) $x = -4$ のとき最大値 2 をとり、$x = 0$ のとき $y = -2$ となる。

(2) $x = 1$ で最大となり、そのグラフが 2 点 $(0,\ -2),\ (-1,\ -11)$ を通る。

＜解説＞

(1) $x = -4$ のとき最大値 2 をとるので、右のグラフのような上に凸の放物線になります。このことから、放物線の頂点の座標が $(-4,\ 2)$ であることがわかり、さらに上に凸の放物線であるので、求める放物線の式を a を定数として、



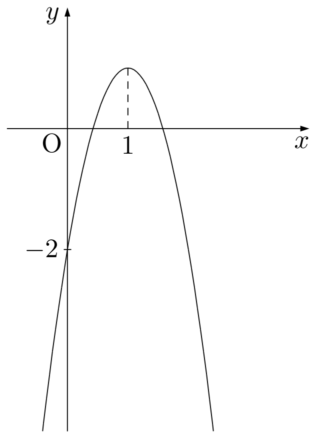
$$y = a(x+4)^2 + 2 \quad (a < 0)$$

と表すことができます。そして、$x = 0$ のとき $y = -2$ となるので、

$$\begin{aligned} a(0+4)^2 + 2 &= -2 \\ 16a + 2 &= -2 \\ 16a &= -4 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

これは、$a < 0$ という条件を満たすので、求める放物線の式は

$$y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 2$$



(2) $x=1$ のとき最大となるので、右のグラフのような上に凸の放物線になります。このことから、放物線の軸（頂点の x 座標）が $x=1$ であることがわかり、さらに上に凸の放物線であるので、求める放物線の式を a, q を定数として、

$$y=a(x-1)^2+q \quad (a<0) \ \cdots\cdots ①$$

と表すことができます。そして、グラフが 2 点 $(0,\ -2)$, $(-1,\ -11)$ を通るので、①の式に、$x=0$, $y=-2$ および、$x=-1$, $y=-11$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} a(0-1)^2+q=-2 \\ a(-1-1)^2+q=-11 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a+q=-2 & \cdots\cdots ② \\ 4a+q=-11 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

となるので、③ − ② より

$$\begin{aligned} 3a &= -9 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

これは $a<0$ を満たすので、②に代入すると

$$\begin{aligned} -3+q &= -2 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

となり、これらの値を①に代入することで、求める放物線の式

$$y=-3(x-1)^2+1$$

が得られます。

4.3　グラフ上の 3 点が与えられたとき

2 次関数のグラフについて、グラフ上の 3 点が与えられたとき、

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくことで、条件から a, b, c の値を特定し、2 次関数の式を求めることができます。

例題 4 − 3

3 点 $(1,\ 11)$, $(-1,\ 7)$, $(0,\ 8)$ を通る放物線の式を求めなさい。

＜解説＞

求める放物線の式を、a, b, c を定数として、

$$y = ax^2 + bx + c \ \cdots\cdots \ ①$$

とおくと、3 点 $(1,\ 11)$, $(-1,\ 7)$, $(0,\ 8)$ 通ることから、

$$\begin{cases} a + b + c = 11 & \cdots\cdots \ ② \\ a - b + c = 7 & \cdots\cdots \ ③ \\ c = 8 & \cdots\cdots \ ④ \end{cases}$$

という連立方程式を作ることができます。

④を②に代入して

$$a + b + 8 = 11$$
$$a + b = 3 \ \cdots\cdots \ ⑤$$

また、④を③に代入して

$$a - b + 8 = 7$$
$$a - b = -1 \ \cdots\cdots \ ⑥$$

⑤ + ⑥ より

$$2a = 2$$
$$a = 1$$

これを⑤に代入して

$$1 + b = 3$$
$$b = 2$$

よって、これらの値を①に代入すれば、求める放物線の式は、

$$y = x^2 + 2x + 8$$

となります。