【数学 I】式の計算

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 多項式の加法と減法

1.1 単項式の次数と係数

2, x, $-12a^2b$ のように、数、文字、数といくつかの文字の積で表された式のことを**単項式**といいます。要は、足し算や引き算を含まない式のことです。そして、この単項式において、掛けられている文字の個数を、その単項式の**次数**といい、文字以外の部分を**係数**といいます。

【例題 1 − 1】

1. 次の単項式の次数と係数をいいなさい。

(1) $3x$　　(2) $-5x^2$　　(3) a　　(4) 8

2. ［　］内の文字に着目したとき、次の単項式の次数と係数をいいなさい。

(1) $-5a^5b^3c^4$　［b］　　(2) $-5a^5b^3c^4$　［a と c］

<解説>

掛け算を省略しない形で表すと、次数や係数を判断しやすくなります。

1. (1)

$$3x = 3 \times x$$

となるので、文字は「x」の 1 個、文字以外の部分は「3」です。よって、

次数：1　　係数：3

となります。

(2)

$$-5x^2 = -5 \times x \times x$$

となるので、「x」が 2 つのあることから文字は 2 個、文字以外の部分は「-5」です。よって、

次数：2　　係数：− 5

となります。次数は文字の種類ではなく、文字の個数なので注意してください。

(3)

$$a = 1 \times a$$

となるので、文字は「a」の 1 個、文字以外の部分は「1」です。よって、

次数：1　　係数：1

となります。省略されている「1」を見落とさないように気をつけましょう。

(4) 文字は含まれないので、文字の個数は 0 個、文字以外の部分は「8」です。よって、

次数：0　　係数：8

となります。

2. 2 種類以上の文字を含む単項式では、特定の文字に着目して次数を考えることがあります。「特定の文字に着目する」とは、着目している文字は通常通り文字として考えますが、着目する文字以外の文字は、文字とは考えないで数と同じように扱います。
掛け算を省略しないで表すと、

$$-5a^5b^3c^4 = -5 \times a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times c \times c \times c \times c$$

となるので、これを参考に次数と係数を考えます。

(1) 「b」に着目すると、「b」は 3 個あるので、文字の個数は 3 個になります。そして、それ以外が係数になるので、

次数：3　　係数：$-5a^5c^4$

となります。このように、着目している文字以外は、たとえ文字であっても数と同様に扱います。

(2) 「a」と「c」に着目すると、「a」は 5 個、「c」は 4 個あるので、文字の個数は全部で 9 個になります。そして、それ以外が係数になるので、

次数：9　　係数：$-5b^3$

となります。

1.2 多項式の同類項

ax^2+bx+c のように、「ax^2」、「bx」、「c」というようないくつかの単項式の和の形で表されている式を**多項式**といいます。そして、「+」でつながれた 1 つ 1 つの単項式「ax^2」、「bx」、「c」のことを**項**といいます。「単」には「1 つ」という意味があるので、単項式とは「1 つの項でできた式」と言い換えることができます。同様にすると多項式は、「多くの項でできた式」となります。

ある多項式において、文字の部分が同じ（文字の種類も数も同じ）である項のことを**同類項**といいます。

また、中学ですでに学習しているように、同類項は分配法則を用いて、

$$mx+nx=(m+n)x$$

のように、同類項どうしであれば係数を計算してまとめることができ、このようにして、同類項をまとめて式を簡単にすることを、**多項式を整理する**といいます。

【例題 1 − 2】

次の多項式の同類項をまとめなさい。

(1) $-3x+5+2x-6$

(2) $b-2a+7b-4a$

(3) $x-\dfrac{1}{3}y-2+y$

(4) $\dfrac{1}{4}x^2+2-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{3}x+x^2$

<解説>

(1)

$$\begin{aligned}-3x+5+2x-6&=(-3+2)x+(5-6)\\&=-x-1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}b-2a+7b-4a&=(-2-4)a+(1+7)b\\&=-6a+8b\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}x-\frac{1}{3}y-2+y&=x+\left(-\frac{1}{3}+1\right)y-2\\&=x+\frac{2}{3}y-2\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}x^2+2-\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}x+x^2\\&=\left(\frac{1}{4}+1\right)x^2+\left(-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)x+2\\&=\frac{5}{4}x^2+\left(-\frac{6}{15}-\frac{5}{15}\right)x+2\\&=\frac{5}{4}x^2-\frac{11}{15}x+2\end{aligned}$$

1.3　整式の次数・定数項

単項式や多項式には整数と似たような性質があるので、それらをまとめて**整式**ということもあります。

整式（多項式）に含まれる項の次数のうちで、最大のものをその整式の**次数**といい、次数が n である整式を n **次式**といいます。

また、その整式において、次数が 0 の項（文字を含まない項）のことを**定数項**といいます。

【例題 1 − 3】

1. 次の整式は何次式か答えなさい。
   (1) $-x^2 - 3xy + 4x^2y - 2y^2$　　(2) $2xy + 3x^2y - y^3 - 4x^2$
2. x に着目したとき、次の整式は何次式になりますか。また、定数項はどれか答えなさい。
   (1) $-x^2 - 3xy + 4x^2y - 2y^2$　　(2) $2xy + 3x^2y - y^3 - 4x^2$

＜解説＞

1. まず、各項の次数を確認し、次数の最大のものを探します。
   (1) 与えられた整式は

$$-x^2 - 3xy + 4x^2y - 2y^2 \longrightarrow -x^2,\ -3xy,\ 4x^2y,\ -2y^2$$

のように 4 つの項があります。この各項の次数は

項	$-x^2$	$-3xy$	$4x^2y$	$-2y^2$
次数	2	2	3	2

となるので、最大の次数は「3 次」です。つまり、この整式は

3 次式

になります。

   (2) 与えられた整式は

$$2xy + 3x^2y - y^3 - 4x^2 \longrightarrow 2xy,\ 3x^2y,\ -y^3,\ -4x^2$$

のように 4 つの項があり、この各項の次数は

項	$2xy$	$3x^2y$	$-y^3$	$-4x^2$
次数	2	3	3	2

となるので、最大の次数は「3 次」になります。このことから、この整式は

3 次式

になります。

2. 着目した文字以外の文字は、数と同じように扱います。
   (1) 「x」に着目すると、各項の次数は

項	$-x^2$	$-3xy$	$4x^2y$	$-2y^2$
次数	2	2	3	2
次数（x に着目）	2	1	2	0

となるので、最大の次数は「2 次」です。つまり、この整式は

2 次式

になります。また、定数項は 0 次の項（着目している文字を含まない項）であるので、

定数項：$-2y^2$

となります。

(2) 「x」に着目すると、各項の次数は

項	$2xy$	$3x^2y$	$-y^3$	$-4x^2$
次数	2	3	3	2
次数（x に着目）	1	2	0	2

となるので、最大の次数は「2 次」になります。このことから、この整式は

2 次式

になります。また、定数項は

定数項：$-y^3$

となります。

1.4 降べきの順

整式（多項式）を整理するとき、項の次数が高い方から低くなるような順に整理することを、**降べきの順**に整理するといいます。また、これとは逆に、項の次数が低い方から高くなるような順に整理することを**昇べきの順**に整理するといいます。しかし、昇べきの順で解答するということはほとんどないので、多項式が与えられたら、基本的に降べきの順で整理するという習慣をつけて下さい。

【例題 1 − 4】

1. 次の整式の同類項をまとめ、降べきの順に整理しなさい。
   (1) $-3+2x^2-4+4x^2-x$　　(2) $3x^2-7+x^3-2-5x^2+x-3x^3$
2. 次の整式を x について降べきの順に整理しなさい。
   (1) $-x^2-3xy+4x^2y-2y^2$　　(2) $2xy+3x^2y-y^3-4x^2$

＜解説＞

1. 次数の高いものから順に同類項をまとめていくと、自然に降べきの順に並びます。

(1)

$$\begin{aligned}-3+2x^2-4+4x^2-x &= (2+4)x^2-x+(-3-4)\\ &= 6x^2-x-7\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}3x^2-7+x^3-2-5x^2+x-3x^3 &= (1-3)x^3+(3-5)x^2+x+(-7-2)\\ &= -2x^3-2x^2+x-9\end{aligned}$$

2. x に着目して、降べきの順に整理します。

(1) x の 2 次の項、1 次の項、定数項（0 次の項）をそれぞれまとめて、

$$-x^2-3xy+4x^2y-2y^2=(-1+4y)x^2-3xy-2y^2$$

となります。これでもいいですが、かっこの中（x^2 の係数）に文字が含まれているので、その部分も降べきの順にして、

$$(-1+4y)x^2-3xy-2y^2 \longrightarrow (4y-1)x^2-3xy-2y^2$$

としておく方がいいでしょう。

(2) (1) と同様にして、

$$2xy+3x^2y-y^3-4x^2=(3y-4)x^2+2xy-y^3$$

となります。

1.5 整式の加法・減法

【例題 1 − 5】

1. $P = 2x^2 + 5x + 8$、$Q = 6x^2 - 3x - 10$ のとき、次の計算をしなさい。

   (1) $P + Q$　　(2) $P - Q$

2. 次の整式を簡単にしなさい。

$$3x - [5y - 2\{2x + y + (3x + 5y)\}]$$

<解説>

1. 多項式の和や差は、同類項をまとめることにより計算できます。このとき、降べきの順に整理します。

(1)

$$\begin{aligned} P + Q &= (2x^2 + 5x + 8) + (6x^2 - 3x - 10) \\ &= 2x^2 + 5x + 8 + 6x^2 - 3x - 10 \\ &= (2 + 6)x^2 + (5 - 3)x + (8 - 10) \\ &= 8x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P - Q &= (2x^2 + 5x + 8) - (6x^2 - 3x - 10) \\ &= 2x^2 + 5x + 8 - 6x^2 + 3x + 10 \\ &= (2 - 6)x^2 + (5 + 3)x + (8 + 10) \\ &= -4x^2 + 8x + 18 \end{aligned}$$

2. 括弧を囲むように複数の括弧を使う場合には、

$$[\{(\quad)\}]$$

のように、「(丸括弧)」を囲むように「{ 波括弧 }」、「{ 波括弧 }」を囲むように「[角括弧]」を使います。そして、そのとき

(丸括弧) $\longrightarrow$ { 波括弧 } $\longrightarrow$ [角括弧]

と内側のかっこの中身から順に計算していきますが、文字を含む式の場合では、内側のかっこの中身を計算することができない場合があります。そのような場合には、内側のかっこから順にはずしていきます。かっこの前に「−」の符号がある場合に注意しましょう。

$$\begin{aligned} 3x - [5y - 2\{2x + y + (3x + 5y)\}] &= 3x - \{5y - 2(2x + y + 3x + 5y)\} \\ &= 3x - \{5y - 2(5x + 6y)\} \\ &= 3x - (5y - 10x - 12y) \\ &= 3x - (-10x - 7y) \\ &= 3x + 10x + 7y \\ &= 13x + 7y \end{aligned}$$

2 整式の乗法

2.1 指数法則

x を n 個掛け合わせたものを「x の n 乗」といい、「x^n」と表します。

（例）$x = x^1, \quad x \times x = x^2, \quad x \times x \times x = x^3, \quad x \times x \times x \times x = x^4, \quad \cdots$

このとき、「x^n」の「n」を x の**指数**といいます。ただし、「x^1」の「1」は通常省略されて、「x」と表します。

また、同じ数をいくつか掛け合わせることや、それによって得られる数のことを**累乗**といい、

$x^1, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad \cdots$

をまとめて「x の累乗」といいます。

ここで、次のような累乗の計算をしてみると

①

$$\begin{aligned} 5^2 \times 5^3 &= (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \\ &= 5^{2+3} \\ &= 5^5 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} (5^2)^3 &= (5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5) \\ &= 5^{2 \times 3} \\ &= 5^6 \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} (3 \times 5)^2 &= (3 \times 5) \times (3 \times 5) \\ &= (3 \times 3) \times (5 \times 5) \\ &= 3^2 \times 5^2 \end{aligned}$$

となり、以上のことから、m、n を正の整数（自然数）としたとき、

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　② $(a^m)^n = a^{mn}$　　③ $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立ち、これを**指数法則**といいます。この指数法則のイメージがつかみにくかったり、また、忘れてしまった場合には、先ほどのように、具体的な数を当てはめて考えてみるようにしてください。

【例題 2 − 1】

次の計算をしなさい。

(1) $x^3 \times x^2$　　(2) $(a^3)^2$　　(3) $(-3x)^3$

＜解説＞

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　② $(a^m)^n = a^{mn}$　③ $(ab)^n = a^n b^n$

(1) 指数法則の①を用いて

$$\begin{aligned} x^3 \times x^2 &= x^{3+2} \\ &= x^5 \end{aligned}$$

(2) 指数法則の②を用いて

$$\begin{aligned} (a^3)^2 &= a^{3\times 2} \\ &= a^6 \end{aligned}$$

(3) 指数法則の③を用いて

$$\begin{aligned} (-3x)^3 &= (-3)^3 \times x^3 \\ &= -27x^3 \end{aligned}$$

2.2 単項式の乗法

（単項式）×（単項式）の場合には、乗法のみの式で表されるので、乗法の交換法則や結合法則を利用することで、係数どうしの積、文字どうしの積というように、別々に計算することができます。また、このときの計算には指数法則を用いて、速く正確に計算できるようにしてください。

【例題 2 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $xy^3 \times (-2x^2y)$　　(2) $(2a^2b)^3 \times (-2a^4b)^2$

<解説>

(1)

$$\begin{aligned} xy^3 \times (-2x^2y) &= -2 \times (x \times x^2) \times (y^3 \times y) \\ &= -2 \times x^{1+2} \times y^{3+1} \\ &= -2x^3y^4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (2a^2b)^3 \times (-2a^4b)^2 &= 2^3(a^2)^3b^3 \times (-2)^2(a^4)^2b^2 \\ &= 8a^{2\times3}b^3 \times 4a^{4\times2}b^2 \\ &= 8a^6b^3 \times 4a^8b^2 \\ &= (8 \times 4) \times (a^6 \times a^8) \times (b^3 \times b^2) \\ &= 32a^{6+8}b^{3+2} \\ &= 32a^{14}b^5 \end{aligned}$$

2.3 多項式の乗法

多項式どうしの積を計算して、1 つの多項式（単項式の和の形）にすることを**展開する**といいます。また、積の記号「×」は、

$$x \times y \longrightarrow x \cdot y$$

のように、記号「·」を用いて省略して表すこともあります。

（単項式）×（多項式）の計算では、まず分配法則を用いて、

$$A(B+C) = AB + AC, \qquad (A+B)C = AC + BC \qquad \text{（※ } A,\ B,\ C,\ D \text{ は単項式）}$$

同じように、（多項式）×（多項式）の計算においても分配法則を利用して、次のように展開することができます。

$$(A+B)\ (C+D) = AC + AD + BC + BD$$

そのことで、「AB」,「AC」,「AD」,「BC」,「BD」などのような（単項式）×（単項式）の和の形を作ることができるので、それぞれを、（単項式）×（単項式）の計算手順によって計算して展開することになります。このとき、答えは必ず降べきの順に整理するよう心がけてください。

【例題 2 − 3】

次の式を展開しなさい。

(1) $2x^2y(x+3y-1)$　　(2) $(x+2)(x^2-x-3)$

<解説>

(1)

$$\begin{aligned} 2x^2y(x+3y-1) &= 2x^2y \cdot x + 2x^2y \cdot 3y + 2x^2y \cdot (-1) \\ &= 2x^{2+1}y + (2 \cdot 3)x^2y^{1+1} - 2x^2y \\ &= 2x^3y + 6x^2y^2 - 2x^2y \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (x+2)(x^2-x-3) &= x \cdot x^2 + x \cdot (-x) + x \cdot (-3) + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-x) + 2 \cdot (-3) \\ &= x^3 - x^2 - 3x + 2x^2 - 2x - 6 \\ &= x^3 + (-1+2)x^2 + (-3-2)x - 6 \\ &= x^3 + x^2 - 5x - 6 \end{aligned}$$

2.4 多項式の展開公式

積の形をした多項式を展開するには、分配法則を利用することで展開することができますが、似たような形の式をいつも分配法則を利用して展開するのは面倒なので、それを展開公式（乗法公式）として覚え利用します。

また、それぞれの展開公式は分配法則を利用することで導くことができます。

(ｉ) 平方の公式：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

(ii) 和と差の積：$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 \cancel{-ab+ab} - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

(iii) 1 次式の積①：$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + bx + ax + ab\\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}$$

(iv) 1 次式の積②：$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= acx^2 + adx + bcx + bd\\ &= acx^2 + (ad+bc)x + bd\end{aligned}$$

これらの公式を利用しなくても、公式を導出したように、分配法則を利用すれば式を展開することができます。しかし、速く正確に計算できるようにするためにも公式は必要ですし、次の単元で学習する因数分解は、この展開公式を覚えていなければできません。そのためにも、式の形を見たときにどの公式が利用できるのか瞬時に判断できるようにしてください。

また、

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

の公式は、

$$(a-b)^2 \quad\longrightarrow\quad \{a+(-b)\}^2$$

のように、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

の「b」を「$-b$」にしたものだと考えることで、

$$\begin{aligned}\{a+(-b)\}^2 &= a^2 + 2a\cdot(-b) + (-b)^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

と公式を導出することもできます。

【例題 2 − 4】

次の式を展開しなさい。

(1) $(3x+4y)^2$ (2) $(2x-5y)^2$ (3) $(a+2b)(a-2b)$

(4) $(x+6)(x-8)$ (5) $(2x-5)(3x+4)$

<解説>

(1) 展開公式 (i) を利用して

$$\begin{aligned}&(3x+4y)^2\\=&(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 4y+(4y)^2\\=&9x^2+24xy+16y^2\end{aligned}$$

(2) 展開公式 (i) を利用して

$$\begin{aligned}&(2x-5y)^2\\=&(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2\\=&4x^2-20xy+25y^2\end{aligned}$$

(3) 展開公式 (ii) を利用して

$$\begin{aligned}&(a+2b)(a-2b)\\=&a^2-(2b)^2\\=&a^2-4b^2\end{aligned}$$

(4) 展開公式 (iii) を利用して

$$\begin{aligned}&(x+6)(x-8)\\=&x^2+(6-8)x+6\cdot(-8)\\=&x^2-2x-48\end{aligned}$$

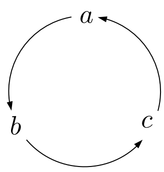
(5) 展開公式 (iv) を利用して

$$\begin{aligned}(2x-5)(3x+4)&=2x\cdot 3x+\{2\cdot 4+(-5)\cdot 3\}x+(-5)\cdot 4\\&=6x^2-7x-20\end{aligned}$$

2.5 置き換えによる式の展開

式を整理するときは、基本的に降べきの順で整理しますが、次数が同じ項の場合には、アルファベット順に整理するのが基本になります。しかし、式を見やすくするために、**輪環の順**と呼ばれる順に式を整理する場合があります。

3 つ以上の文字（ここでは、$a,\ b,\ c$）をアルファベット順に輪の形に並べたとき、その文字がぐるぐる回るような順に整理するのが輪環の順です。



2 乗：$a^2 \longrightarrow b^2 \longrightarrow c^2$　　積：$ab \longrightarrow bc \longrightarrow ca$

和：$a+b \longrightarrow b+c \longrightarrow c+a$　　差：$a-b \longrightarrow b-c \longrightarrow c-a$

【例題 2 － 5】

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-y+z)(x-y-z)$　　(2) $(a+b+c)^2$

＜解説＞

分配法則を利用することで展開することができますが、複雑な式を展開する場合、共通な部分を置き換えたりすることで公式が使えるように工夫します。

(1) 式の展開の基本である「分配法則」を利用して展開してみると、

$$\begin{aligned}(x-y+z)(x-y-z) &= x^2-xy-xz-xy+y^2+yz+xz-yz-z^2\\ &= x^2-2xy+y^2-z^2\end{aligned}$$

となります。もちろん、このように展開しても問題ありませんが、式が複雑になると、このように分配法則を利用して展開するのが面倒になります。そこで、それぞれのかっこの中身において、「$x-y$」が共通であることに着目し、

$$x-y=A$$

とおくと、

$$(x-y+z)(x-y-z)=(A+z)(A-z)$$

と表すことができます。すると、展開公式 (ii) が利用できる形になるので、

$$(A+z)(A-z)=A^2-z^2$$

最後に、A を元に戻して、再度展開公式を利用すると

$$\begin{aligned}A^2-z^2 &= (x-y)^2-z^2\\ &= x^2-2xy+y^2-z^2\end{aligned}$$

と展開することができ、分配法則を利用するよりも見た目の計算量は増えているように感じますが、公式を利用することで、計算はだいぶ楽になります。また、慣れてきたら文字で置き換えるのではなく、かたまりを意識して展開してみましょう。

$$\begin{aligned}(x-y+z)(x-y-z) &= \{(x-y)+z\}\{(x-y)-z\} \\ &= (x-y)^2 - z^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - z^2\end{aligned}$$

(2) 工夫することに気づけない場合は、分配法則を利用して展開すればいいですが、

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$

であるので、それぞれのかっこで「$a+b$」が共通になっています。そこで、

$$a+b=A$$

とおいて、展開公式が利用できる形に変形すれば、

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (A+c)^2 \\ &= A^2 + 2Ac + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2\end{aligned}$$

と展開することができます。
これでも答えとしては問題ありませんが、このままでは式が読みづらく感じます。この式は、すべて 2 次の項であるので、文字はアルファベット順（辞書引きの順）

$aa \longrightarrow ab \longrightarrow ac \longrightarrow bb \longrightarrow bc \longrightarrow cc$ (ただし、a^2などは「aa」という文字であると考えます)

になるように式を並べ直すと、

$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

となりますが、このままでもやはり式は読みづらいので、学習した「輪環の順」で整理すると

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

となり、式がすっきりと見やすくなると思います。ただし、必ずこのような式を輪環の順で書かなければいけないという決まりがあるわけではなく、どの形で答えを書いても問題ありません。しかし、この輪環の順で書くと、式が読みやすくなり、書きもらしなどをチェックすることができるようになるので、ぜひ、覚えるようにしてください。
また、

$$(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

という展開はよく利用されるので、公式として覚えておきましょう。

2.6　式の展開の工夫

分配法則や展開公式を複数回利用して式を展開するような問題では、途中の計算の段階で項が多くなってしまうと、展開公式が利用できなくなってしまい、計算が面倒になってしまいます。そこで、なるべく項の数が増えないように、計算の順序や組み合わせを工夫することで、公式を利用して速く正確に解けるようにします。

【例題 2 − 6】

次の式を展開しなさい。

(1) $(x^2+y^2)(x-y)(x+y)$　　(2) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(x-y)(x+y) &= \{(x+y)(x-y)\}(x^2+y^2)\\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)\\ &= (x^2)^2-(y^2)^2\\ &= x^4-y^4\end{aligned}$$

(2) 平方の公式を利用して展開してしまうと、項の数が多くなってしまい計算が大変そうです。そこで、指数法則③

$$a^nb^n=(ab)^n$$

を用いて

$$(x-1)^2(x+1)^2=\{(x-1)(x+1)\}^2$$

とまとめてしまいます。すると、

$$\{(x-1)(x+1)\}^2=(x^2-1)^2$$

と項の数を増やすことなく計算できます。つまり、与えられた式（与式）は、

$$(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2=(x^2-1)^2(x^2+1)^2$$

と変形できることになります。そして、再度指数法則③を利用することで

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2(x^2+1)^2 &= \{(x^2-1)(x^2+1)\}^2\\ &= \{(x^2)^2-1^2\}^2\\ &= (x^4-1)^2\end{aligned}$$

とできるので、あとは平方の公式を利用して

$$\begin{aligned}(x^4-1)^2 &= (x^4)^2-2\cdot x^4\cdot 1+1^2\\ &= x^8-2x^4+1\end{aligned}$$

のように計算できます。

3　因数分解

因数分解するとは字の通り、

「**因数**に分解する」

ことです。

数の場合の「因数」とは

因数（数）: ある数を積の形で表したとき、その積を作っている個々の数

のことをいい、「12」という数なら、

（例）$12 = 2 \times 6$

と積の形にでき、「2」と「6」が因数ということになります。

同じようにして、式の場合の「因数」は、

因数（式）: ある整式を積の形で表したとき、その積を作っている個々の式

のことをいい、「$(x+6)(x-8)$」は

$$(x+6)(x-8) = x^2 - 2x - 48$$

と展開できましたが、逆にいうと、「$x^2 - 2x - 48$」は

$$x^2 - 2x - 48 = (x+6)(x-8)$$

のように「$x+6$」と「$x-8$」という 2 つの整式の積の形で表すことができ、この 2 つの整式が**因数**になります。そして、「2 つ以上の整式の積の形に表す」ことが「**因数分解する**」ということだといえます。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

のように、積の形で書かれた式を計算して、和の形の式（1 つの多項式）に書き表すことが式の展開であったので、式の展開の逆の計算が因数分解ということになります。つまり、

$$(x+a)(x+b) \longrightarrow x^2 + (a+b)x + ab$$

のように、左から右の変形（いくつかの単項式や多項式の積を 1 つの整式で表す）が式の展開になり、

$$(x+a)(x+b) \longleftarrow x^2 + (a+b)x + ab$$

のように、右から左の変形（1 つの整式をいくつかの単項式や多項式の積で表す）が因数分解になります。

3.1　共通因数

因数分解をする上でまず第 1 に考えることは、すべての項に共通な因数がないか見つけ出すことです。もしあれば、分配法則を利用して、

$$AB + AC = A(B+C) \qquad (A \text{ が共通因数})$$

のようにして多項式の積の形になるように変形します。このことを**共通因数でくくる**といいます。

【例題 3 − 1】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x + 3y$　　(2) $8ax + 6ay + 2az$

＜解説＞

(1) すべての項に「3」という共通な因数があるので、それをかっこの外にくくり出して、

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 3 \cdot x + 3 \cdot y \\ &= 3(x + y) \end{aligned}$$

となります。

(2) すべての項に共通な因数には、数には「2」、文字には「a」があるので、「$2a$」でくくると

$$\begin{aligned} 8ax + 6ay + 2az &= 2 \cdot 4 \cdot a \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot a \cdot y + 2 \cdot a \cdot z \\ &= 2a(4x + 3y + z) \end{aligned}$$

と因数分解できます。

「因数分解」は、「これ以上因数分解できない」形まで変形する必要があります。文字の因数「a」は簡単に見つけられると思いますが、各項の数も因数分解できる場合もあるので、くくり出すことを忘れないように注意してください。

3.2 因数分解の公式

因数分解することは、

「ある整式を 2 つ以上の整式の積としてあらわす」

ことで、展開することは、

「整式どうしの積を計算して 1 つの整式にする」

ことだったので、因数分解することと展開することはちょうど反対の操作をすることになります。そのため、因数分解の公式は展開公式（乗法公式）と全く同じものになります。

(ｉ) 平方の公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

(ii) 和と差の積

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

(iii) 1 次式の積 ①

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

(iv) 1 次式の積 ②

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

【例題 3 − 2】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2+9x+6$　　(2) $49x^2-81y^2$　　(3) $4x^2+8x+4$

＜解説＞

因数分解は基本的に

① 共通因数でくくる　　② 公式を利用する

という手順で行います。また、因数分解を行う問題では、それ以上因数分解できないところまで行います。そのため、式の形によっては複数回因数分解できることもあるので、必ずもうこれ以上因数分解できないかどうか確認しましょう。

まなびの学園　http://www.manabino-academy.com

(1) まず、共通因数の「3」が存在するのでくくり出します。

$$3x^2 + 9x + 6 = 3(x^2 + 3x + 2)$$

次にかっこの中身を公式を利用して因数分解できないかを考えると、因数分解の公式 (iii) が利用できる形です。そこで、

$$a + b = 3, \qquad ab = 2$$

となる 2 つの整数 $a,\ b$ を探します。このとき、足して 3 になる数は

$$1 + 2, \quad 0 + 3, \quad -1 + 4, \quad -2 + 5, \quad \cdots$$

のように無数に存在するので、見当をつけるのが難しくなります。そのため、まずは「$ab = 2$」となる 2 つの整数 $a,\ b$ の候補を考えて、その中から「$a + b = 3$」になる数を見つけるようにします。すると、「$ab = 2$」を満たす 2 つの整数は

$$1 \times 2, \quad (-1) \times (-2)$$

のどちらかです。そのうち、「$a + b = 3$」を満たすのは

1 と 2

の組み合わせになります。よって、

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

と因数分解できることになり、式全体としては

$$\begin{aligned} 3x^2 + 9x + 6 &= 3(x^2 + 3x + 2) \\ &= 3(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

のようにして因数分解できます。

(2) 共通因数は存在しないので、公式を利用して因数分解します。

$$49x^2 - 81y^2 = (7x)^2 - (9y)^2$$

と考えることができるので、因数分解の公式 (ii) が利用できます。すると、

$$\begin{aligned} 49x^2 - 81y^2 &= (7x)^2 - (9y)^2 \\ &= (7x + 9y)(7x - 9y) \end{aligned}$$

と因数分解することができます。

(3) まず、共通因数の「4」があるのでくくり出します。

$$4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1)$$

次にかっこの中は

$$a = x, \quad b = 1$$

として因数分解の公式 (i) が利用できる形です。よって、

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 4 &= 4(x^2 + 2x + 1) \\ &= 4(x+1)^2 \end{aligned}$$

と因数分解できます。

3.3 たすきがけによる因数分解

因数分解の公式には、次の示すように 4 つあることを学習しましたが、因数分解の公式 (iv) を利用するためには「**たすきがけ**」という方法を習得する必要があります。

(i) 平方の公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

(ii) 和と差の積

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

(iii) 1 次式の積 ①

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

(iv) 1 次式の積 ②

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

因数分解の公式 (iv) の右辺にある係数を下の図のように並べ、それぞれの係数を交差するように掛け算し（これが「たすき」のような見た目で掛け算をしているので、「たすきがけ」という名の由来になっています)、その結果を横に記します。そして、その計算結果の和を計算すると、左辺の x（1 次の項）の係数になります。

$$\begin{array}{ccccr} a & & b & \longrightarrow & bc \\ c & \times & d & \longrightarrow & ad \\ \cline{5-5} & & & & ad+bc \end{array}$$

このことを利用して、x^2 の係数を因数分解しそれを縦に並べ、さらに定数項も因数分解しそれも縦に並べます。そして、それをたすき掛けをしてその和を計算したときに、x の係数となる整数の組を探すことにより、因数分解をすることになります。

【例題 3 − 3】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2+11x+6$　　(2) $6x^2+x-12$

＜解説＞

(1) 共通因数は存在しないので、公式を利用して因数分解します。因数分解の公式 (iv) から

$$ac=3, \quad ad+bc=11, \quad bd=6$$

を満たす 4 つの整数 a, b, c, d を探します。とはいっても、そのような整数を見つけるのは困難であるので「たすきがけ」を利用します。「$ac=3$」となるのは、

$$1\times 3$$

で、「$bd = 6$」となるのは

$$1 \times 6, \quad 2 \times 3, \quad (-1) \times (-6), \quad (-2) \times (-3)$$

があります。このことから、

①

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \times & 6 & \longrightarrow & 6 \\ \cline{5-5} & & & & 9 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & \longrightarrow & 18 \\ 3 & \times & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \cline{5-5} & & & & 19 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & \times & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \cline{5-5} & & & & 9 \end{array}$$

④

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & \times & 2 & \longrightarrow & 2 \\ \cline{5-5} & & & & 11 \end{array}$$

⑤

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -1 & \longrightarrow & -3 \\ 3 & \times & -6 & \longrightarrow & -6 \\ \cline{5-5} & & & & -9 \end{array}$$

⑥

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -6 & \longrightarrow & -18 \\ 3 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \cline{5-5} & & & & -19 \end{array}$$

⑦

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & \longrightarrow & -6 \\ 3 & \times & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \cline{5-5} & & & & -9 \end{array}$$

⑧

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & \times & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \cline{5-5} & & & & -11 \end{array}$$

という 8 つのたすきがけのパターンがあります。この中で条件を満たすのは④になるので、

$$3x^2 + 11x + 6 = (x + 3)(3x + 2)$$

のように因数分解することができます。ただし、①, ③, ⑤, ⑦のパターンは、

① $(x + 1)(3x + 6)$ ③ $(x + 2)(3x + 3)$ ⑤ $(x - 1)(3x - 6)$ ⑦ $(x - 2)(3x - 3)$

という因数分解を表しますが、それぞれ共通因数があるので、さらに、

① $(x + 1)(3x + 6) = 3(x + 1)(x + 2)$ ③ $(x + 2)(3x + 3) = 3(x + 2)(x + 1)$

⑤ $(x - 1)(3x - 6) = 3(x - 1)(x - 2)$ ⑦ $(x - 2)(3x - 3) = 3(x - 2)(x - 1)$

のように因数分解できることになってしまいます。しかし、因数分解の手順において、先に共通因数でくくり、次の公式を利用するので、公式を利用する段階で共通因数が出てくることはありません。そのため、最初から①, ③, ⑤, ⑦のパターンをやる必要はありません。

さらに、「$bd = 6$」となる整数の組合せで

$$(-1) \times (-6), \qquad (-2) \times (-3)$$

の場合は、たすき掛けをすると x の係数は負になってしまい、絶対に x の係数が「11」になることはありえません。そのため、⑤〜⑧のパターンもやる必要はないので、結局、実際にたすき掛けを行うのは、②, ④の場合のみでいいことになります。

(2) 共通因数は存在しないので、公式を利用して因数分解します。因数分解の公式 (iv) から

$$ac = 6, \quad ad + bc = 1, \quad bd = -12$$

を満たす 4 つの整数 $a,\ b,\ c,\ d$ を探すので、たすきがけを利用します。「$ac = 6$」となるのは、

$$1 \times 6, \qquad 2 \times 3$$

という 2 つの場合があり、「$bd = -12$」となるのは

$$(-1) \times 12, \quad 1 \times (-12), \quad (-2) \times 6, \quad 2 \times (-6), \quad (-3) \times 4, \quad 3 \times (-4)$$

という 6 つの場合があります。このことから、

①
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -1 & \longrightarrow & -6 \\ 6 & \times & 12 & \longrightarrow & 12 \\ \cline{5-5} & & & & 6 \end{array}$$

②
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 12 & \longrightarrow & 72 \\ 6 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \cline{5-5} & & & & 71 \end{array}$$

③
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 1 & \longrightarrow & 6 \\ 6 & \times & -12 & \longrightarrow & -12 \\ \cline{5-5} & & & & -6 \end{array}$$

④
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -12 & \longrightarrow & -72 \\ 6 & \times & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \cline{5-5} & & & & -71 \end{array}$$

⑤
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -2 & \longrightarrow & -12 \\ 6 & \times & 6 & \longrightarrow & 6 \\ \cline{5-5} & & & & -6 \end{array}$$

⑥
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 6 & \longrightarrow & 36 \\ 6 & \times & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \cline{5-5} & & & & 34 \end{array}$$

⑦
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 2 & \longrightarrow & 12 \\ 6 & \times & -6 & \longrightarrow & -6 \\ \cline{5-5} & & & & 6 \end{array}$$

⑧
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -6 & \longrightarrow & -36 \\ 6 & \times & 2 & \longrightarrow & 2 \\ \cline{5-5} & & & & -34 \end{array}$$

⑨
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -3 & \longrightarrow & -18 \\ 6 & \times & 4 & \longrightarrow & 4 \\ \cline{5-5} & & & & -14 \end{array}$$

⑩
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 4 & \longrightarrow & 24 \\ 6 & \times & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \cline{5-5} & & & & 21 \end{array}$$

⑪
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & 3 & \longrightarrow & 18 \\ 6 & \times & -4 & \longrightarrow & -4 \\ \cline{5-5} & & & & 14 \end{array}$$

⑫
$$\begin{array}{rcrcr} 1 & & -4 & \longrightarrow & -24 \\ 6 & \times & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \cline{5-5} & & & & -21 \end{array}$$

⑬
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -1 & \longrightarrow & -3 \\ 3 & \times & 12 & \longrightarrow & 24 \\ \cline{5-5} & & & & 21 \end{array}$$

⑭
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 12 & \longrightarrow & 36 \\ 3 & \times & -1 & \longrightarrow & -2 \\ \cline{5-5} & & & & 34 \end{array}$$

⑮
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \times & -12 & \longrightarrow & -24 \\ \cline{5-5} & & & & -21 \end{array}$$

⑯
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -12 & \longrightarrow & -36 \\ 3 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ \cline{5-5} & & & & -34 \end{array}$$

⑰
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -2 & \longrightarrow & -6 \\ 3 & \times & 6 & \longrightarrow & 12 \\ \cline{5-5} & & & & 6 \end{array}$$

⑱
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 6 & \longrightarrow & 18 \\ 3 & \times & -2 & \longrightarrow & -4 \\ \cline{5-5} & & & & 14 \end{array}$$

⑲
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & & -6 & \longrightarrow & -12 \\ \cline{5-5} & & & & -6 \end{array}$$

⑳
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -6 & \longrightarrow & -18 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \cline{5-5} & & & & -14 \end{array}$$

㉑
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 4 & \longrightarrow & 8 \\ \cline{5-5} & & & & -1 \end{array}$$

㉒
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 4 & \longrightarrow & 12 \\ 3 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ \cline{5-5} & & & & 6 \end{array}$$

㉓
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & 3 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \cline{5-5} & & & & 1 \end{array}$$

㉔
$$\begin{array}{rcrcr} 2 & & -4 & \longrightarrow & -12 \\ 3 & & 3 & \longrightarrow & 6 \\ \cline{5-5} & & & & -6 \end{array}$$

という 24 個のパターンがありますが、共通因数を含む

①, ③, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬, ⑭, ⑮, ⑯, ⑰, ⑱, ⑲, ⑳, ㉒, ㉔

については候補から外してもかまわないので、実際にたすきがけを行うのは、

②, ④, ㉑, ㉓

という 4 つの場合についてのみ行えばよいことになります。その中で、問題の条件に合うのは㉓になるので、

$$6x^2 + x - 12 = (2x+3)(3x-4)$$

のように因数分解できることになります。

3.4　置き換えによる因数分解

因数分解のときだけに限らず、式の展開でもそうであったように、式を変形する際は、まとまった式はそのまま扱った方が計算しやすいことが多くあります。そのため、まとまりの部分を適当な文字で置き換え、後は通常の因数分解の手順により問題を解きます。ただし、置いた文字を元に戻す作業を忘れないようにしましょう。また、元に戻した時に再度因数分解できることもあるので、これ以上因数分解できないかのチェックも忘れずに行うようにします。

【例題 3 − 4】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $(x^2+4)^2-16x^2$　　　(2) $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$

＜解説＞

式が複雑になっても、因数分解の手順は変わりません。また、使う因数分解の公式も次の通り同じです。

(i) 平方の公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

(ii) 和と差の積

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

(iii) 1 次式の積 ①

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

(iv) 1 次式の積 ②

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

(1) $x^2+4=A$ とすると

$$(x^2+4)^2-16x^2=A^2-(4x)^2$$

とでき、因数分解の公式 (ii) を利用することができます。よって

$$A^2-(4x)^2=(A+4x)(A-4x)$$

となり、A を元に戻して

$$\begin{aligned}(A+4x)(A-4x)&=\{(x^2+4)+4x\}\{(x^2+4)-4x\}\\&=(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)\end{aligned}$$

となります。それぞれのかっこの中身は、因数分解の公式 (i) を利用することができるので、

$$(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)=(x+2)^2(x-2)^2$$

となります。慣れてきたら文字で置き換えず、まとまりを意識すれば、

$$\begin{aligned}(x^2+4)^2-16x^2 &= (x^2+4)^2-(4x)^2 \\ &= \{(x^2+4)+4x\}\{(x^2+4)-4x\} \\ &= (x^2+4x+4)(x^2-4x+4) \\ &= (x+2)^2(x-2)^2\end{aligned}$$

のように因数分解できます。

(2) $x^2-4x=A$ とすると

$$(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15 = A^2-2A-15$$

と表せます。すると、因数分解の公式 (iii) が利用できるので、

$$\begin{aligned}A^2-2A-15 &= (A-5)(A+3) \\ &= \{(x^2-4x)-5\}\{(x^2-4x)+3\} \\ &= (x^2-4x-5)(x^2-4x+3)\end{aligned}$$

となり、それぞれのかっこの中身も同様に、因数分解の公式 (iii) が利用できるので

$$(x^2-4x-5)(x^2-4x+3) = (x-5)(x+1)(x-1)(x-3)$$

となります。また、文字で置き換えず、まとまりを意識して因数分解すれば、

$$\begin{aligned}(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15 &= \{(x^2-4x)-5\}\{(x^2-4x)+3\} \\ &= (x^2-4x-5)(x^2-4x+3) \\ &= (x-5)(x+1)(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

となります。

3.5 複 2 次式の因数分解

a, b, c, d, e を定数としたとき、x の 4 次式は、

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \qquad (\text{ただし、}a \fallingdotseq 0)$$

のように表すことができます。このとき、x の 3 次の項と 1 次の項をもたないような x の 4 次式は、

$$ax^4+cx^2+e$$

のように表され、この式は

$$ax^4+cx^2+e=a(x^2)^2+c\cdot x^2+e$$

のように、「x^2 の 2 次式」の形で表すことができるため、x の**複 2 次式**といいます。

【例題 3 − 5】

次の式を因数分解しなさい。

(1) x^4-10x^2+16 (2) $2x^4-7x^2-4$

＜解説＞

(1) x の複 2 次式、つまり、x^2 の 2 次式になっているので、$x^2=t$ のように適当な文字でおけば、

$$x^4-10x^2+16=(x^2)^2-10\cdot x^2+16=t^2-10t+16$$

のように、t の 2 次式で表すことができます。そのため、この 2 次式を今まで学習した因数分解の手順で、因数分解を行っていきます。

共通因数は存在しないので、因数分解の公式を利用して

$$t^2-10t+16=(t-2)(t-8)$$

と因数分解でき、t を元に戻せば、

$$(t-2)(t-8)=(x^2-2)(x^2-8)$$

となります。これ以上因数分解できないことを確認し、この式が答えになります。

(2) x の複 2 次式であるので、(1) と同じように、$x^2=t$ のように適当な文字でおけば、

$$2x^4-7x^2-4=2(x^2)^2-7\cdot x^2-4=2t^2-7t-4$$

と、t の 2 次式で表すことができます。共通因数がないことを確認し、因数分解の公式（たすきがけ）を利用して、

$$\begin{array}{ccrcr} 2 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$$

より、

$$2t^2-7t-4=(2t+1)(t-4)$$

と因数分解でき、t を元に戻せば、

$$(2t+1)(t-4) = (2x^2+1)(x^2-4)$$

「x^2-4」の部分は、さらに因数分解することができるので、

$$(2x^2+1)(x^2-4) = (2x^2+1)(x+2)(x-2)$$

3.6 複数の文字を含む式の因数分解

式に複数の文字が含まれている場合、同時にその複数の文字を処理するのは無理があります。今まで学習した中でも、「2 元 1 次方程式」では、2 つの文字を含むことで方程式を解くことが困難になってしまったので、代入法や加減法を用いて、「1 つの文字を消去」することで解決しました。

しかし、方程式以外の式では、「文字を消去する」ことは難しいので、「**1 つの文字に着目する**」ということをします。こうすることによって、複雑なものをシンプルに扱うことができるようになります。でも、「1 つの文字に着目する」場合、どの文字に着目したらよいでしょう。

1 次式, 2 次式, 3 次式, $\cdots$

とあった時、1 次式が 1 番因数分解しやすいはずです。つまり、次数が低ければ低いほど因数分解がしやすくなるので、**最低次数の文字に着目して整理**すれば、その式は 1 番因数分解しやすくなります。そこで、

(ｉ) 最低次数の文字について整理
(ii) 各項を因数分解
(iii) 式全体を因数分解

という手順で行うと、スムーズに因数分解をすることができます。

【例題 3 − 6】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $xy+x-y-1$　　(2) $a^2-b^2+ac+bc$

(3) $2x^2-3x+5xy+2y^2-3y+1$

<解説>

(1) x に着目すると 1 次式、y に着目しても 1 次式です。

	xy	x	$-y$	-1	
x に着目	1 次	1 次	0 次	0 次	x の 1 次式
y に着目	1 次	0 次	1 次	0 次	y の 1 次式

(i) x に着目する場合

$$xy+x-y-1=(y+1)x-(y+1)$$

と整理できます。すると、「$y+1$」が共通因数になるのでくくり出して

$$(y+1)x-(y+1)=(y+1)(x-1)$$

と因数分解することができます。

(ii) y に着目する場合

$$xy+x-y-1=(x-1)y+(x-1)$$

と整理できるので、共通因数である「$x-1$」をくくり出して

$$(x-1)y+(x-1)=(x-1)(y+1)$$

と因数分解することができます。

このように、次数が同じになる式では、どちらか好きな方の文字にそろえれば問題ありません。ただし、最高次数の係数が簡単なもののほうが因数分解しやすい傾向にあります。

(2) a に着目すると 2 次式、b に着目すると 2 次式、c に着目すると 1 次式になります。

	a^2	$-b^2$	ac	bc	
a に着目	2 次	0 次	1 次	0 次	a の 2 次式
b に着目	0 次	2 次	0 次	1 次	b の 2 次式
c に着目	0 次	0 次	1 次	1 次	c の 1 次式

そこで、最低次数の文字である c に着目して整理します。

$$a^2 - b^2 + ac + bc = (a+b)c + (a^2 - b^2)$$

次に、各項を因数分解して、

$$(a+b)c + (a+b)(a-b)$$

最後に、式全体を因数分解するために、共通因数である「$a+b$」をくくり出して

$$(a+b)c + (a+b)(a-b) = (a+b)(a-b+c)$$

と因数分解できることになります。

(3) x に着目すると 2 次式、y に着目しても 2 次式であるので、どちらかの文字に着目して整理します。

	$2x^2$	$-3x$	$5xy$	$2y^2$	$-3y$	1	
x に着目	2 次	1 次	1 次	0 次	0 次	0 次	x の 2 次式
y に着目	0 次	0 次	1 次	2 次	1 次	0 次	y の 2 次式

ここでは、x に着目して整理してみたいと思います。

$$2x^2 + (5y-3)x + (2y^2 - 3y + 1)$$

次に、各項を因数分解しますが、定数項はたすき掛けを利用して

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & & -1 & \longrightarrow & \underline{-2} \\ & & & & -3 \end{array}$$

とできるので

$$2x^2 + (5y-3)x + (2y-1)(y-1)$$

となります。最後に式全体を因数分解しますが、やや複雑な形をしているので、ここでもたすき掛けを利用すると、

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ 1 & & 2y-1 & \longrightarrow & \underline{4y-2} \\ & & & & 5y-3 \end{array}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 2x^2+(5y-3)x+(2y-1)(y-1) &= \{2x+(y-1)\}\{x+(2y-1)\} \\ &= (2x+y-1)(x+2y-1) \end{aligned}$$

のようにして因数分解することができます。