【数学I】三角比

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　三角比

1.1　直角三角形と三角比の値

2 つの角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は相似です。直角三角形では、すでに 1 つの角が直角で等しくなっているので、1 つの鋭角が等しければ相似になります。

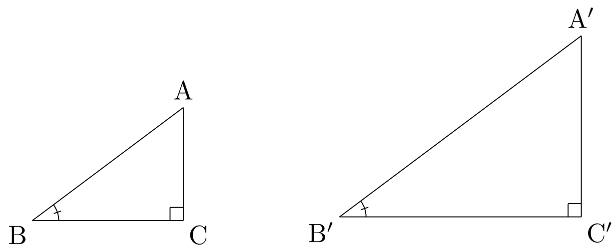
次の図のような直角三角形 ABC と A′B′C′ において、

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}', \qquad \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}' = 90^\circ$$

であれば、2 つの角が等しいので

$$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$$

となります。



相似な三角形では、対応する辺の長さの比はすべて等しくなります。上の図の三角形では、2 辺の長さの比の組合せは

① $\mathrm{AC} : \mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{C}' : \mathrm{A}'\mathrm{B}'$　　② $\mathrm{BC} : \mathrm{AB} = \mathrm{B}'\mathrm{C}' : \mathrm{A}'\mathrm{B}'$　　③ $\mathrm{AC} : \mathrm{BC} = \mathrm{A}'\mathrm{C}' : \mathrm{B}'\mathrm{C}'$

という 3 通りが考えられ、それぞれを

① $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$　　② $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$　　③ $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$

のように表すことができます。

このように、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$, $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$, $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ の値は $\triangle\mathrm{ABC}$ の大きさにはよらず、∠B（鋭角）の大きさだけで決まり、また、∠B の大きさは単に B と表されるので、それぞれの比の値は次のように定義されます。

① $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を B の**正弦**または**サイン**といい、$\sin B$ と表す。
　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ は、頂点 B から筆記体で「sin」の頭文字 s を三角形の辺に沿って書くときに重なる 2 辺の比

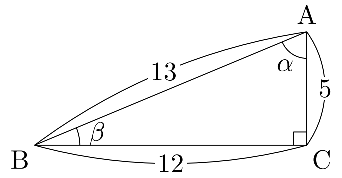
② $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を B の**余弦**または**コサイン**といい、$\cos B$ と表す。
　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ は、頂点 B をはさむように筆記体で「cos」の頭文字 c を三角形の辺の比に沿って書くときに重なる 2 辺の比

③ $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ を B の**正接**または**タンジェント**といい、$\tan B$ と表す。
　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ は、頂点 B から筆記体で「tan」の頭文字 t を三角形の辺に沿って書くときに重なる 2 辺の比

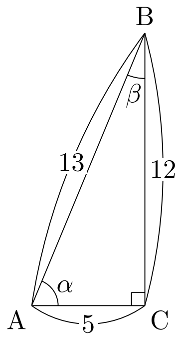
また、正弦、余弦、正接をまとめて**三角比**といいます。

【例題１－１】

下の図の直角三角形で、$\angle A = \alpha,\ \angle B = \beta$ とするとき、$\alpha,\ \beta$ の正弦、余弦、正接の値をそれぞれ求めなさい。



＜解説＞



三角比の値を求めるときには、着目する角が左、直角が右になるような直角三角形を基準にして考えます。そこで、α の三角比の値を考えるために、$\angle A$ が左、直角が右になるように三角形の向きを変えます。

この三角形において、頂点 A から筆記体の s を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると、

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$$

頂点 A をはさむように筆記体で c を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると、

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

頂点 A から筆記体の t を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると、

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$$

となります。

同じようにして、β の三角比の値も求めますが、β の三角比の値は例題で与えられている図を利用して、頂点 B から筆記体の s を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると、

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

頂点 B をはさむように筆記体で c を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると、

$$\cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$$

頂点 B から筆記体の t を三角形の辺の比に沿うようにして書き、辺と重なった順に分母、分子とすると

$$\tan\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$$

1.2　30°，45°，60° の三角比の値

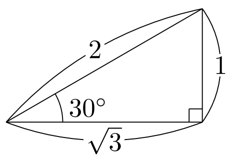
【例題 1 − 2】

30°，45°，60° の正弦、余弦、正接の値を求めなさい。

＜解説＞

30°，45°，60° が左に、直角が右にある直角三角形は次のようになるので、その長さの関係から、それぞれの角度における三角比の値を求めます。

(i) 30°

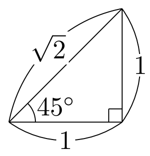


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) 45°

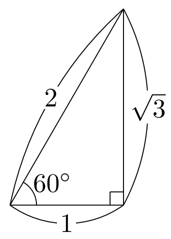


$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

(iii) 60°



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

この三角比の値は非常によく用いられます。これらの値を覚えておくといいですが、この例題のように簡単に求めることができるので、使いながら覚えるようにしていきましょう。

1.3　三角比の表の利用

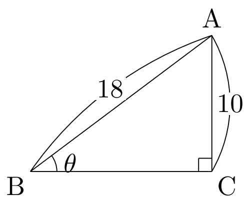
$1°$ から $60°$ まで $1°$ おきの角に対する三角比の値を表にすると次のようになります。ただし、小数第 5 位を四捨五入し、小数第 4 位までを示したものです。(θ は「シータ」と読みます。)

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	30°	0.5000	0.8660	0.5774
1°	0.0175	0.9998	0.0175	31°	0.5150	0.8572	0.6009
2°	0.0349	0.9994	0.0349	32°	0.5299	0.8480	0.6249
3°	0.0523	0.9986	0.0524	33°	0.5446	0.8387	0.6494
4°	0.0698	0.9976	0.0699	34°	0.5592	0.8290	0.6745
5°	0.0872	0.9962	0.0875	35°	0.5736	0.8192	0.7002
6°	0.1045	0.9945	0.1051	36°	0.5878	0.8090	0.7265
7°	0.1219	0.9925	0.1228	37°	0.6018	0.7986	0.7536
8°	0.1392	0.9903	0.1405	38°	0.6157	0.7880	0.7813
9°	0.1564	0.9877	0.1584	39°	0.6293	0.7771	0.8098
10°	0.1736	0.9848	0.1763	40°	0.6428	0.7660	0.8391
11°	0.1908	0.9816	0.1944	41°	0.6561	0.7547	0.8693
12°	0.2079	0.9781	0.2126	42°	0.6691	0.7431	0.9004
13°	0.2250	0.9744	0.2309	43°	0.6820	0.7314	0.9325
14°	0.2419	0.9703	0.2493	44°	0.6947	0.7193	0.9657
15°	0.2588	0.9659	0.2679	45°	0.7071	0.7071	1.0000
16°	0.2756	0.9613	0.2867	46°	0.7193	0.6947	1.0355
17°	0.2924	0.9563	0.3057	47°	0.7314	0.6820	1.0724
18°	0.3090	0.9511	0.3249	48°	0.7431	0.6691	1.1106
19°	0.3256	0.9455	0.3443	49°	0.7547	0.6561	1.1504
20°	0.3420	0.9397	0.3640	50°	0.7660	0.6428	1.1918
21°	0.3584	0.9336	0.3839	51°	0.7771	0.6293	1.2349
22°	0.3746	0.9272	0.4040	52°	0.7880	0.6157	1.2799
23°	0.3907	0.9205	0.4245	53°	0.7986	0.6018	1.3270
24°	0.4067	0.9135	0.4452	54°	0.8090	0.5878	1.3764
25°	0.4226	0.9063	0.4663	55°	0.8192	0.5736	1.4281
26°	0.4384	0.8988	0.4877	56°	0.8290	0.5592	1.4826
27°	0.4540	0.8910	0.5095	57°	0.8387	0.5446	1.5399
28°	0.4695	0.8829	0.5317	58°	0.8480	0.5299	1.6003
29°	0.4848	0.8746	0.5543	59°	0.8572	0.5150	1.6643
30°	0.5000	0.8660	0.5774	60°	0.8660	0.5000	1.7321

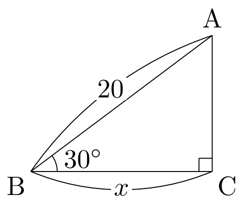
【例題 1 − 3】

三角比の表から、次の図の $\theta,\ x,\ y$ のおよその値を整数で求めなさい。

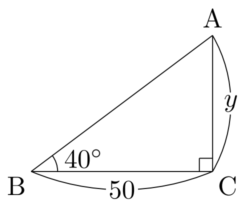
(1)



(2)



(3)



＜解説＞

(1) 長さのわかる 2 つの辺が、頂点 B を基準にして筆記体の s の字に沿うようにあるので、

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$
$$= \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{18}^{\,9}} \fallingdotseq 0.5556$$

（「≒」は「ほぼ等しい」ことを示す記号）

となります。この値に最も近い正弦の値を三角比の表から探すと

$$\sin 34° = 0.5592$$

が見つかるので、θ のおよその値は

$$\theta \fallingdotseq 34°$$

となります。

(2) 長さのわかる辺と求めたい辺が、$\angle$B をはさむようにあるので

$$\cos 30° = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$
$$= \frac{x}{20}$$
$$x = 20\cos 30°$$

となります。三角比の表から

$$\cos 30° = 0.8660$$

であることがわかるので、この値から

$$x = 20 \times 0.8660$$
$$= 17.32 \fallingdotseq 17$$

となります。

(3) 長さのわかる辺と求めたい辺が、頂点 B を基準にして筆記体の t の字に沿うようにあるので、

$$\tan 40° = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$
$$= \frac{y}{50}$$
$$y = 50\tan 40°$$

となります。三角比の表から

$$\tan 40^\circ = 0.8391$$

であることがわかるので、この値から

$$\begin{aligned} y &= 50 \times 0.8391 \\ &= 41.955 \fallingdotseq 42 \end{aligned}$$

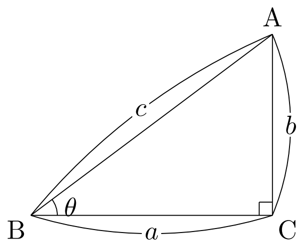
となります。

2　三角比の相互関係

2.1　三角比の基本公式

右の図のような直角三角形 ABC を考えます。

このとき、



$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{b}{c} \quad \cdots\cdots \text{①}$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{a}{c} \quad \cdots\cdots \text{②}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{b}{a} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

となり、①，②より

$$b = c\sin\theta \quad \cdots\cdots \text{④} \qquad\qquad a = c\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

となります。④，⑤を③に代入すると

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{b}{a}\\ &= \frac{\cancel{c}^{1}\sin\theta}{\cancel{c}^{1}\cos\theta}\\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cdots\cdots \text{⑥}\end{aligned}$$

という関係が導き出されます。

また、△ABC は直角三角形であるので、三平方の定理より

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立ちます。この式に④，⑤を代入すると

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2\\ (c\cos\theta)^2 + (c\sin\theta)^2 &= c^2\\ \cancel{c^2}^{1}(\cos\theta)^2 + \cancel{c^2}^{1}(\sin\theta)^2 &= \cancel{c^2}^{1}\\ (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 &= 1 \quad \cdots\cdots \text{⑦}\end{aligned}$$

となります。ここで、$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$ はそれぞれ

$$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta, \qquad (\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$$

と表すので、⑦の式は

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \cdots\cdots \text{⑧} \qquad \text{（三角比を用いた三平方の定理）}$$

と表すことができます。（$\sin\theta^2$ は θ^2 の正弦の値という意味になるので、$\sin^2\theta$ と $\sin\theta^2$ の違いに注意してください。）

さらに、⑧の式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cancel{\cos^2\theta}^{\,1}}{\cancel{\cos^2\theta}^{\,1}}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

となり、⑥の式より

$$(\tan\theta)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad\cdots\cdots\ ⑨$$

という関係を導くことができます。

⑥, ⑧, ⑨の式は、三角比では基本となる重要な公式になります。導出過程も含めてしっかり理解しておいてください。

【例題２－１】

θ が鋭角のとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\cos\theta=\dfrac{8}{17}$ のとき、$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めなさい。

(2) $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ のとき、$\sin\theta,\ \cos\theta$ の値を求めなさい。

＜解説＞

三角比の基本公式を用いることで、三角比の 1 つの値から他の 2 つの三角比の値を求めることができます。

(1) ① $\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=1-\cos^2\theta\\&=1-\left(\frac{8}{17}\right)^2\\&=1-\frac{64}{289}\\&=\frac{225}{289}\end{aligned}$$

$\sin\theta>0$ であるので

$$\sin\theta=\frac{15}{17}$$

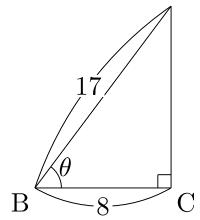
② $\tan\theta$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

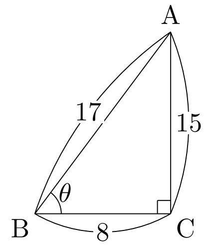
$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{15}{17}\div\frac{8}{17}\\&=\frac{15}{\cancel{17}^{\,1}}\times\frac{\cancel{17}^{\,1}}{8}\\&=\frac{15}{8}\end{aligned}$$

これが一般的な解き方になりますが、分数の計算が多くやや面倒です。それは、三角比は辺の比の値であるので、ほぼ分数になるからです。利用している公式は三平方の定理から導出したものなので、元の三平方の定理を利用すれば分数でなくなるはずです。

そこで、$\cos\theta=\dfrac{8}{17}$ を満たす直角三角形考えると、右のようなものがあります。



三平方の定理より



$$\begin{aligned} \mathrm{AC} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2} \\ &= \sqrt{17^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

となります。よって、この直角三角形 ABC から

$$\sin\theta = \frac{15}{17}, \qquad \tan\theta = \frac{15}{8}$$

となります。

(2) ① $\cos\theta$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\theta} &= 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{16}{9} \\ &= \frac{25}{9} \\ \cos^2\theta &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$\cos\theta > 0$ であるので

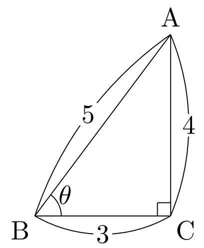
$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

② $\sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \tan\theta\cos\theta \\ &= \frac{4}{\cancel{3}^1} \times \frac{\cancel{3}^1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

また、直角三角形を利用すると、$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ を満たす直角三角形には右のようなものがあるので、三平方の定理より



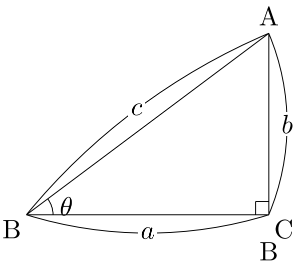
$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

となるので、この直角三角形 ABC から

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \qquad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

直角三角形を利用して解くと、公式を利用するよりも簡単に解くことができ、しかも、公式を覚える必要もありません。ただし、公式を利用しないと解けない問題も今後出てくるので、どちらの方法でも解けるようにしておいてください。

2.2　$90^\circ - \theta$ の三角比



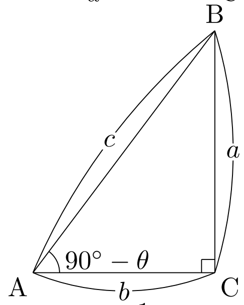
右のような直角三角形 ABC を考えます。図のように、$\angle \mathrm{B} = \theta$ とすると、θ の三角比は次のように表せます。

① $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{b}{c}$　　② $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{a}{c}$

③ $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{b}{a}$

また、このときもう 1 つの鋭角である $\angle\mathrm{A}$ は

$$\angle \mathrm{A} = 90^\circ - \theta$$



と表されるので、$\angle\mathrm{A}$ を左に、直角を右にして直角三角形向きを変えると右のようになり、この図を利用すると、$90^\circ - \theta$ の三角比は次のように表せます。

④ $\sin(90^\circ - \theta) = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{a}{c}$　　⑤ $\cos(90^\circ - \theta) = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{b}{c}$

⑥ $\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{a}{b}$

よって、①〜⑥から

(i) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$　　(ii) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$　　(iii) $\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

という関係が成り立つことがわかります。この公式を用いることで、45° 以上の鋭角の三角比を 45° 以下の角の三角比で表すことができます。

【例題 2 − 2】

次の三角比を 45° 以下の鋭角の三角比で表しなさい。

(1) $\sin 62^\circ$　　(2) $\cos 84^\circ$　　(3) $\tan 56^\circ$

＜解説＞

$90^\circ - \theta$ の公式は、

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \quad (\sin \longrightarrow \cos), \qquad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \quad (\cos \longrightarrow \sin)$$

のように、sin と cos が入れ替わるのが特徴です。このことさえ覚えておけば

$$\begin{aligned}\tan(90^\circ - \theta) &= \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

のようにしてタンジェントの公式も導くことができます。

(1) $\sin 62^\circ$　　(2) $\cos 84^\circ$　　(3) $\tan 56^\circ$

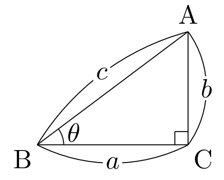
$$\begin{aligned}&\sin 62^\circ \\ &= \sin(90^\circ - 28^\circ) \\ &= \cos 28^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos 84^\circ \\ &= \cos(90^\circ - 6^\circ) \\ &= \sin 6^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tan 56^\circ \\ &= \tan(90^\circ - 34^\circ) \\ &= \frac{1}{\tan 34^\circ}\end{aligned}$$

3　三角比の拡張

3.1　三角比の定義



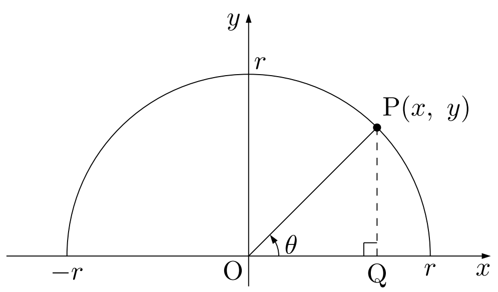
直角三角形の三角比は、右の図のような直角三角形の場合（$0° < \theta < 90°$）、

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{c}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

と定義されることを学習しました。しかし、直角三角形では、直角以外の残りの 2 つの角は必ず鋭角になるため、今までの三角比の定義では鈍角の三角比を考えることができません。

そこで、座標を用いることにより、三角比の定義を $0° \leqq \theta \leqq 180°$ となる鋭角以外の範囲にまで拡張します。

座標平面上に、原点 O を中心として半径 r の半円をかき、x 軸の正の向きから反時計回り（左回り）に角 θ をとったときの半径を OP とし、点 P の座標を $(x,\ y)$ とします。



点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とすると、△POQ は直角三角形になり

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{OQ} = x, \quad \mathrm{PQ} = y$$

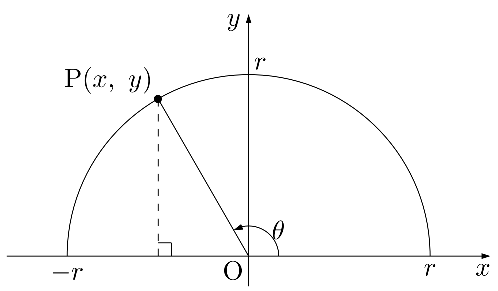
であるので、三角比の値をそれぞれ

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}} = \frac{y}{x}$$

と表すことができ、$0° \leqq \theta \leqq 180°$ にある角 θ の三角比をこれにより定義します。つまり、θ が次の図のように鈍角であっても、三角比の値は同じように、

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

となります。

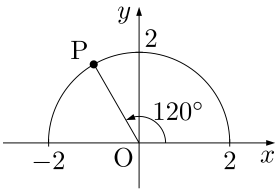


また、直角三角形のときと同じように、大きさが変わっても比の値は変わらないので、三角比の値は半径 r の大きさによらず、θ だけで決まります。

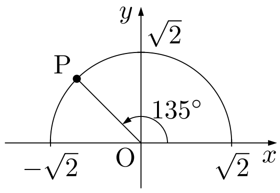
【例題 3 − 1】

次の図を用いて、120°, 135°, 150° の三角比の値を求めなさい。

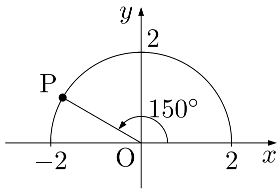
(1) 120°



(2) 135°



(3) 150°

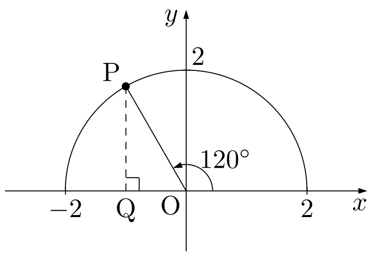


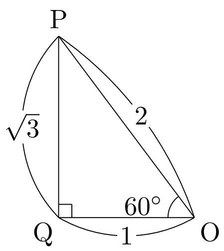
＜解説＞

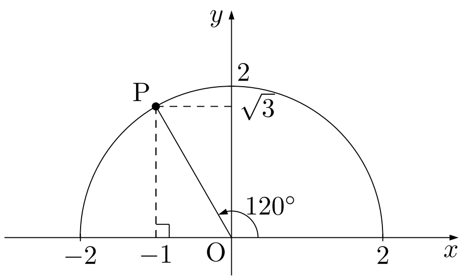
(1) 点 P の座標を求めるために、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とします。すると、△PQO は

$$\mathrm{OP} = 2, \qquad \angle\mathrm{POQ} = 60^\circ$$

の直角三角形であるので、それぞれの辺の長さは次のようになり、点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ となることがわかります。







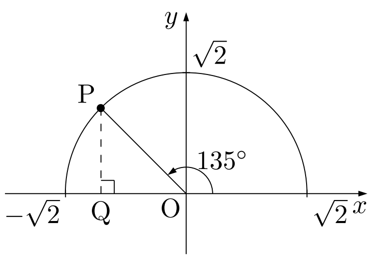
このことから三角比の値は、

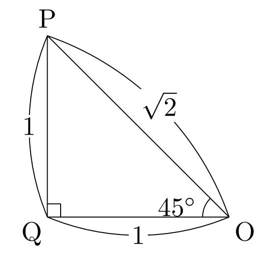
$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 120^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \tan 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

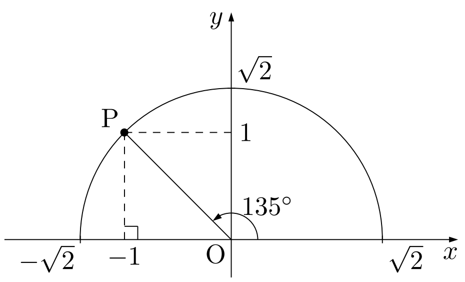
(2) 点 P の座標を求めるために、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とします。すると、△PQO は

$$\mathrm{OP} = \sqrt{2}, \qquad \angle\mathrm{POQ} = 45^\circ$$

の直角三角形であるので、それぞれの辺の長さは次のようになり、点 P の座標は $(-1,\ 1)$ となることがわかります。







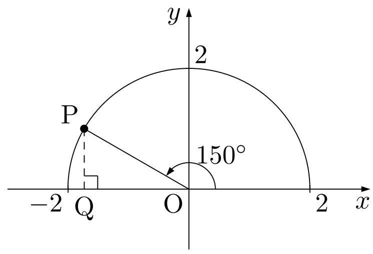
このことから三角比の値は、

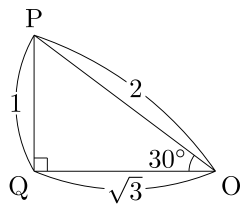
$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

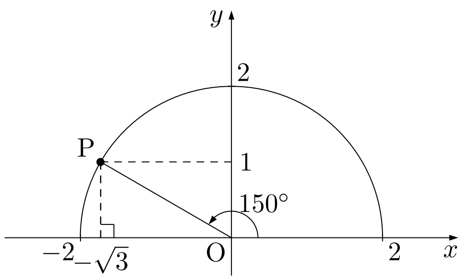
(3) 点 P の座標を求めるために、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とします。すると、△PQO は

$$\mathrm{OP} = 2, \qquad \angle \mathrm{POQ} = 30^\circ$$

の直角三角形であるので、それぞれの辺の長さは次のようになり、点 P の座標は $(-\sqrt{3},\ 1)$ となることがわかります。





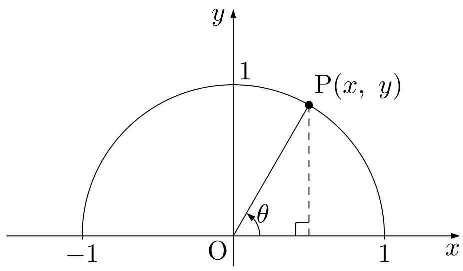


このことから三角比の値は、

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3.2 単位円周上の点の座標

三角比の値は、半径 r の大きさにはよらないので任意の大きさにすることができます。そこで、簡単になるように $r=1$、つまり、原点を中心とする半径 1 の円（これを「**単位円**」といいます）で三角比を考えてみます。



すると、$r=1$ であるので、三角比の定義から

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\qquad \cos\theta=\frac{x}{1}=x,\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

のようになり、

$$\sin\theta=（単位円周上の点の\ y\ 座標の値）,\qquad \cos\theta=（単位円周上の点の\ x\ 座標の値）$$

と考えることができます。

また、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき、

$$-1\leqq x\leqq 1,\qquad 0\leqq y\leqq 1$$

であるので、

$$-1\leqq \cos\theta\leqq 1,\qquad 0\leqq \sin\theta\leqq 1$$

となります。

【例題 3 − 2】

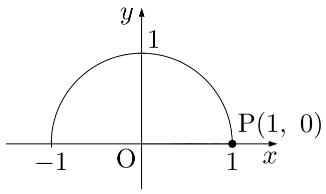
次の表を完成させなさい。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

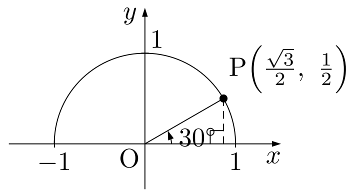
<解説>

単位円周上の点を P$(x,\ y)$、半径 OP の x 軸の正の部分となす角を θ として、点 P の座標を求めます。そして、その x 座標の値、y 座標の値がそれぞれ $\cos\theta,\ \sin\theta$ の値になり、さらに、x と y の比の値が $\tan\theta$ の値になります。

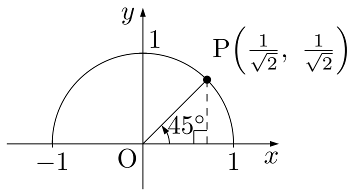
(i) $\theta = 0°$



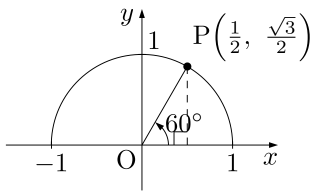
(ii) $\theta = 30°$



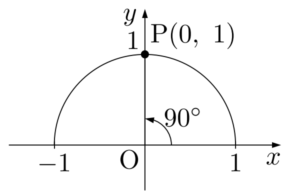
(iii) $\theta = 45°$



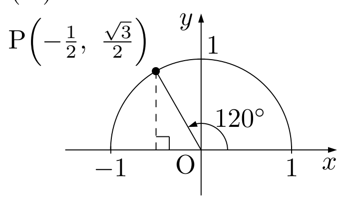
(iv) $\theta = 60°$



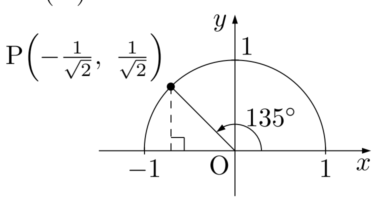
(v) $\theta = 90°$



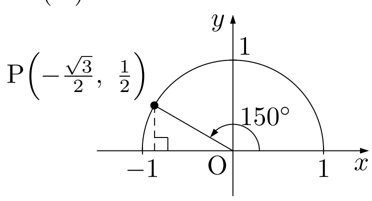
(vi) $\theta = 120°$



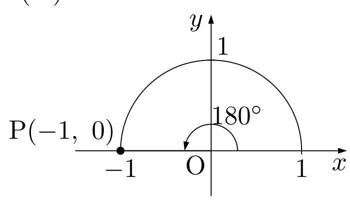
(vii) $\theta = 135°$



(viii) $\theta = 150°$



(ix) $\theta = 180°$



以上のことから

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

となります。ただし、$\tan 90°$ の値は

$$\tan 90° = \frac{1}{0}$$

と分母が 0 になってしまうので、このような値は定義されません。そのため表では「×」としています。

$\sin\theta$ が単位円周上の点の y 座標の値で、$\cos\theta$ が単位円周上の点の x 座標の値であることから、θ が鋭角（$0° < \theta < 90°$）のとき

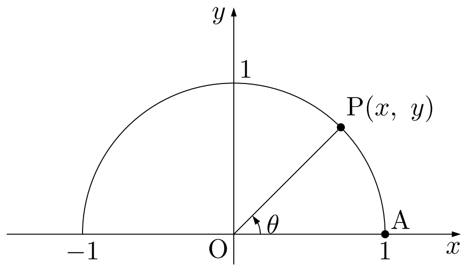
$$\sin\theta > 0, \qquad \cos\theta > 0, \qquad \tan\theta > 0$$

となり、θ が鈍角（$90° < \theta < 180°$）のとき

$$\sin\theta > 0, \qquad \cos\theta < 0, \qquad \tan\theta < 0$$

となっていることもわかります。

3.3　$180^\circ - \theta$ の三角比



右の図のように、点 A を (1, 0)、単位円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$、$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ とします。このとき、三角比の定義から、

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

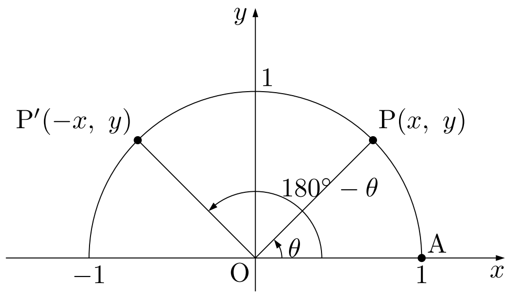
となります。

また、単位円周上に

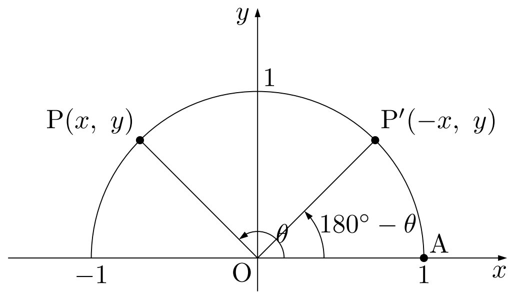
$$\angle\mathrm{AOP}' = 180^\circ - \theta$$

をみたす点 P′ をとると

(i) θ が鋭角のとき



(ii) θ が鈍角のとき



のようになり、θ が鋭角でも鈍角でも、点 P と点 P′ は y 軸に関して対称になります。

このことから、

$$\sin(180^\circ - \theta) = y = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -x = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

つまり、

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta, \qquad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

という関係が成り立ち、このことは三角比の表でも確認することができます。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

この公式を利用することで、鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができます。

【例題 3 − 3】

次の三角比を 90° 以下の鋭角の三角比で表しなさい。

(1) $\sin 138^\circ$　　(2) $\cos 146^\circ$　　(3) $\tan 102^\circ$

＜解説＞

公式

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta, \qquad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

を利用しますが、

① 式変形してから公式を利用（公式を左辺から右辺の変形に利用）
② 公式を利用してから計算（公式を右辺から左辺の変形に利用）

という 2 通りの考え方があります。

(1) $\sin 138^\circ$

① 式変形してから公式を利用

$$\begin{aligned}\sin 138^\circ &= \sin(180^\circ - 42^\circ)\\ &= \sin 42^\circ\end{aligned}$$

② 公式を利用してから計算

$$\begin{aligned}\sin 138^\circ &= \sin(180^\circ - 138^\circ)\\ &= \sin 42^\circ\end{aligned}$$

(2) ① 式変形してから公式を利用

$$\begin{aligned}\cos 146^\circ &= \cos(180^\circ - 34^\circ)\\ &= -\cos 34^\circ\end{aligned}$$

② 公式を利用してから計算

$$\begin{aligned}\cos 146^\circ &= \cos(180^\circ - 146^\circ)\\ &= -\cos 34^\circ\end{aligned}$$

(3) ① 式変形してから公式を利用

$$\begin{aligned}\tan 102^\circ &= \tan(180^\circ - 78^\circ)\\ &= -\tan 78^\circ\end{aligned}$$

② 公式を利用してから計算

$$\begin{aligned}\tan 102^\circ &= \tan(180^\circ - 102^\circ)\\ &= -\tan 78^\circ\end{aligned}$$

3.4 三角方程式①

次の式のような三角比を用いた方程式を**三角方程式**といい、三角比の等式を満たす θ を求めます。

（例）$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

単位円を利用することで、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ における角 θ を決めれば、三角比（$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$）の値を求めることができたので、これとは逆に、三角比（$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$）の値が決まれば、角 θ を求めることもできます。

【例題 3 − 4】

次の式を満たす θ の値を求めなさい。ただし、$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とします。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

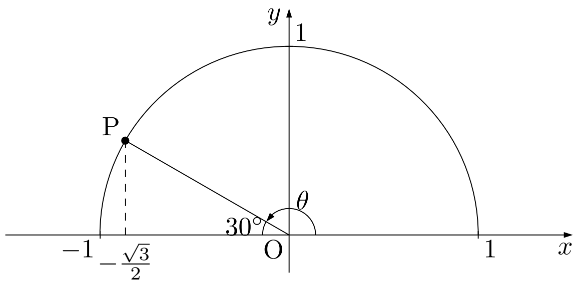
<解説>

(1) 単位円周上では、$\cos\theta$ の値は x 座標の値になるので、単位円周上で x 座標が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる点を考えると、右図のような点Pになります。

よって、求める角 θ は

$$\theta = 150^\circ$$

となります。

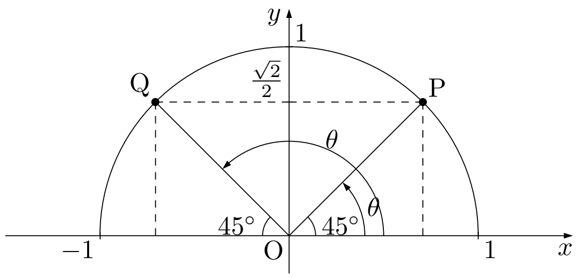


(2) 単位円周上では、$\sin\theta$ の値は y 座標の値になるので、単位円周上で y 座標が $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる点を考えると、右図のような点P, Q になります。

よって、求める角 θ は

$$\theta = 45^\circ,\ 135^\circ$$

となります。

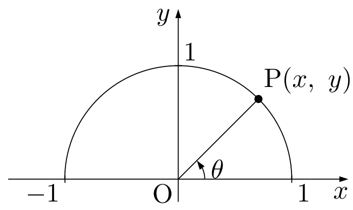


いろいろな角における三角比の値の表を覚えておけば、単位円を利用しなくても θ の値は簡単に求めることができます。しかし、複雑な問題になったとき、単位円を利用した解法が威力を発揮することになります。そのため、表に関しては基本的な値を覚えておく程度にとどめ、単位円を利用した解法をしっかりマスターしておくようにしましょう。

3.5　三角方程式②

右図のように単位円周上の点 P を考えることで、

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x$$

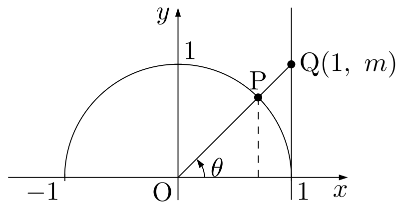


と簡単になりましたが、正接の値は

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

と簡単にはなりません。

そこで、OP を延長して、直線 $x = 1$ との交点を Q とします。このとき、点 Q の座標が $(1,\ m)$ であったとすると、



$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1}$$

つまり、

$$\tan\theta = m$$

という関係が成り立つことになります。

このことから、直線 OQ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると、$\tan\theta$ の値は直線 $x = 1$ 上の点 Q の y 座標の値になります。

【例題 3 − 5】

次の式を満たす θ の値を求めなさい。ただし、$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とします。

(1) $\tan\theta = \sqrt{3}$　　(2) $\tan\theta = -1$

<解説>

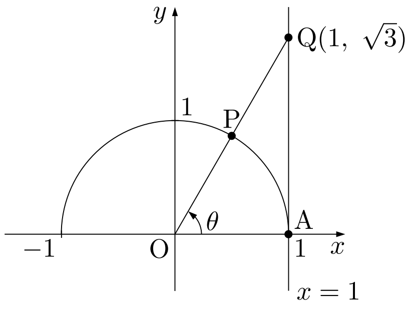
(1) 直線 $x = 1$ 上に y 座標が $\sqrt{3}$ となる点 $\mathrm{Q}(1,\ \sqrt{3})$ をとり、点 $(1,\ 0)$ を A、直線 OQ と単位円との交点を P とします。求める角 θ は

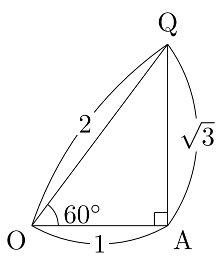
$$\theta = \angle\mathrm{POA} = \angle\mathrm{QOA}$$

であり、$\triangle\mathrm{QOA}$ の 3 辺の長さの関係から、

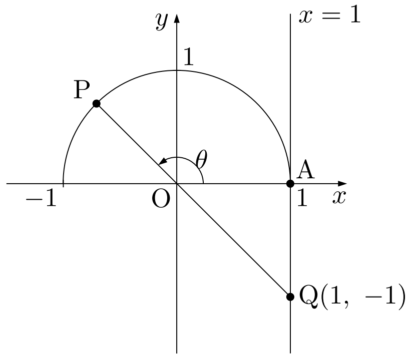
$$\theta = 60^\circ$$

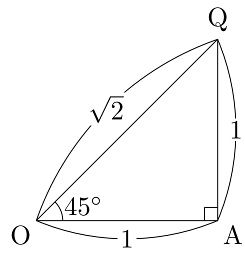
となることがわかります。





(2) 直線 $x = 1$ 上に y 座標が -1 となる点 Q(1, −1) をとり、点 (1, 0) を A、直線 OQ と単位円との交点を P とします。





求める角 θ は

$$\theta = \angle \mathrm{POA} = 180^\circ - \angle \mathrm{QOA}$$

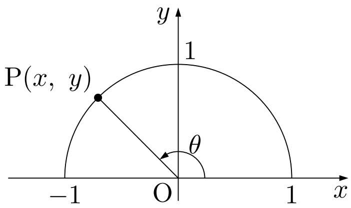
であり、△QOA の 3 辺の長さの関係から、

$$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

となります。

3.6 三角比の相互関係

単位円を利用することで、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ における三角比は、



$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

となりました。

このとき、

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となり、また、$\mathrm{OP} = 1$ であるので、

$$\begin{aligned}
\mathrm{OP}^2 &= 1 \\
x^2 + y^2 &= 1 \\
\cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1 \\
\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\
1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\
1 + \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

となります。

このことから、鋭角のときだけでなく $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲においても、

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

の公式が成り立ちます。この公式を利用することで、鋭角のときと同様にして、$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のどれか 1 つの値が分かれば、他の三角比の値を求めることができます。

【例題 3 − 6】

$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$ のとき、$\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を求めなさい。ただし、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とします。

＜解説＞

$\tan\theta < 0$ より、θ は鈍角であるので

$$\sin\theta > 0, \qquad \cos\theta < 0$$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\begin{aligned}1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2&=\frac{1}{\cos^2\theta}\\1+\frac{16}{9}&=\frac{1}{\cos^2\theta}\\\frac{25}{9}&=\frac{1}{\cos^2\theta}\\\cos^2\theta&=\frac{9}{25}\end{aligned}$$

$\cos\theta<0$ より　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

また、$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

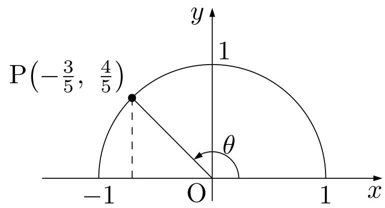
$$\begin{aligned}\sin\theta&=\tan\theta\cos\theta\\&=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

以上より

$$\sin\theta=\frac{4}{5},\qquad\cos\theta=-\frac{3}{5}$$

直角三角形の三角比のときと同じようにして、導出した公式は三角比の値が分数になるので、計算が面倒になります。そのため、右図のように、

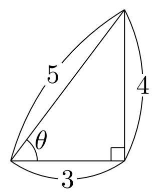
$$\tan\theta=-\frac{4}{3}=\frac{4}{-3}\quad\left(=\frac{y}{x}\right)$$



を満たすような点 P を考えることでも求めることもできます。

さらには、$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$ の符号を無視し、$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ となるような直角三角形（右図）を考えますが、$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ となることを反映させることで、

$$\sin\theta=\frac{4}{5}\longrightarrow\frac{4}{5},\qquad\cos\theta=\frac{3}{5}\longrightarrow-\frac{3}{5}$$



と求めることもできます。