

【中2数学】図形の性質と証明

まなびの学園

<http://www.manabino-academy.com>

目次

1	合同と証明	1
1.1	合同な図形	1
1.2	三角形の合同条件	2
1.3	仮定と結論	4
1.4	定義と定理	5
1.5	証明のしくみ	6
2	三角形	9
2.1	二等辺三角形の性質	9
2.2	二等辺三角形になるための条件	11
2.3	正三角形の性質	13
2.4	正三角形になるための条件	15
2.5	ことがらの逆	16
2.6	直角三角形の合同条件	17
3	平行四辺形	19
3.1	平行四辺形の性質	19
3.2	平行四辺形になるための条件	21
3.3	長方形	23
3.4	ひし形	25
3.5	正方形	26

1 合同と証明

1.1 合同な図形

ある図形を他の図形にぴったり重ね合わせることができるとき、2つの図形は合同であるといいます。図形をぴったり重ねるには、

- ① 平行移動（ずらす） ② 回転移動（回す） ③ 対称移動（裏返す）

という方法があり、これらを組み合わせることによって、2つの図形を重ね合わせることができます。このとき、重なり合う頂点、辺、角をそれぞれ、対応する頂点、対応する辺、対応する角といい、合同な図形では、対応する線分の長さ、対応する角の大きさは等しくなります。

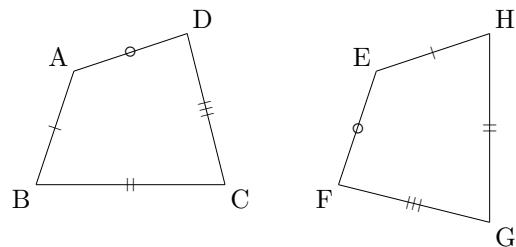
また、2つの図形が合同であることを、記号「 \equiv 」を使って次のように表します。

(例) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であるとき : $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

このとき、対応する頂点を順に並べるようにします。

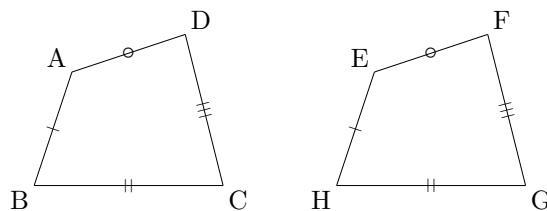
【例題 1-1】

以下の2つの四角形は合同です。合同の関係を合同の記号を使って表しなさい。



＜解説＞

四角形 EFGH を切り取って、同じ長さの辺どうしが重なるように四角形 ABCD にうまく重ね合わせてみます。重なり合った2つの図形を横に並べると、



となり、

頂点 A と頂点 E, 頂点 B と頂点 H, 頂点 C と頂点 G, 頂点 D と頂点 F

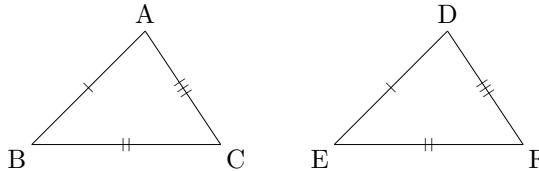
がそれぞれ対応することになります。そこで、四角形 ABCD と頂点の順番が対応するようにして、次のように表すことができます。

四角形 ABCD \equiv 四角形 EFGH

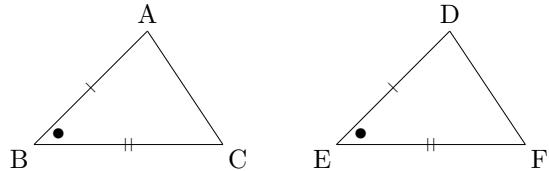
1.2 三角形の合同条件

2つの三角形は、次の3つの各場合において合同 ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$) になります。

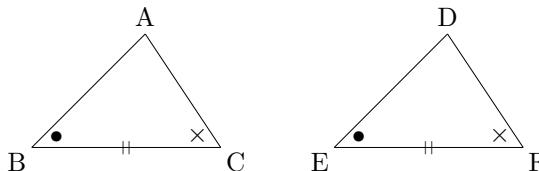
① 3辺がそれぞれ等しい



② 2辺とその間の角がそれぞれ等しい



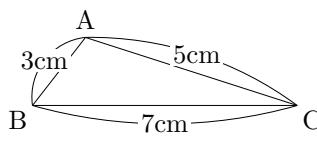
③ 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい



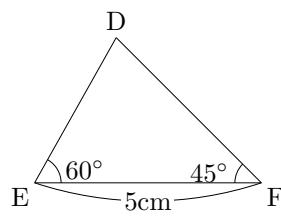
【例題 1-2】

下の図で、合同な三角形はどれとどれですか。合同な関係を合同の記号を使って表しなさい。また、そのとき使った合同条件をいいなさい。

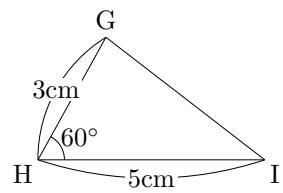
①



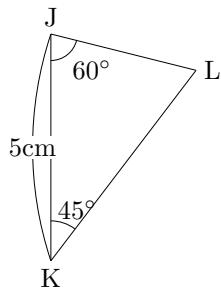
②



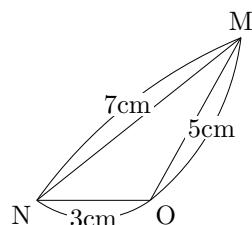
③



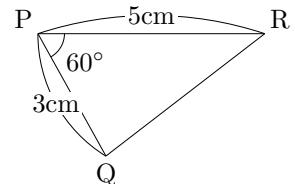
④



⑤

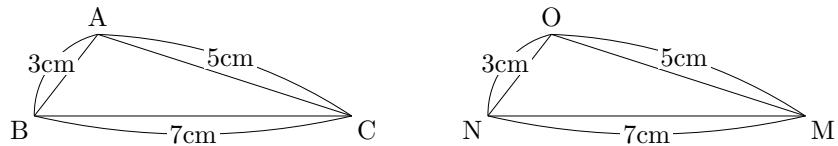


⑥



＜解説＞

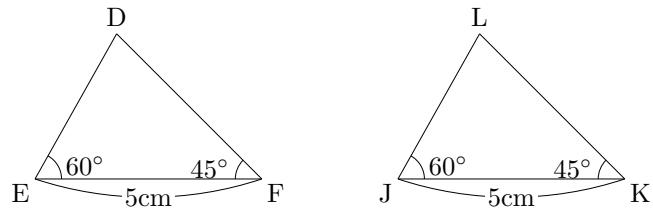
①の三角形は、3辺の長さがわかっています。残りの三角形の中から3辺の長さが与えられているものを探してみると、⑤の三角形が見つかります。考えやすいように向きをそろえて横に並べてみると



となり、3辺の長さがそれぞれ等しいので、2つの三角形は合同になります。よって、

$$\triangle ABC \equiv \triangle ONM \text{ (合同条件: 3辺がそれぞれ等しい)}$$

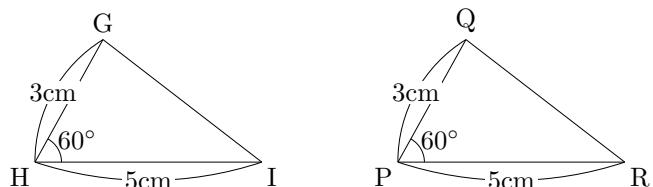
②の三角形は、1辺とその両端の角がわかっています。残りの三角形の中から1辺とその両端の角が与えられているものを探してみると、④の三角形が見つかります。考えやすいように向きをそろえて横に並べてみると



となり、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、2つの三角形は合同になります。よって、

$$\triangle DEF \equiv \triangle LJK \text{ (合同条件: 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい)}$$

③の三角形は、2辺とその間の角がわかっています。残りの三角形の中から2辺とその間の角が与えられているものを探してみると、⑥の三角形が見つかります。考えやすいように向きをそろえて横に並べてみると



となり、2辺とその間の角がそれぞれ等しいので、2つの三角形は合同になります。よって、

$$\triangle GHI \equiv \triangle QPR \text{ (合同条件: 2辺とその間の角がそれぞれ等しい)}$$

1.3 仮定と結論

あることがらを述べた文章では、「 p ならば q である」という形に書き直すことができます。このとき、 p の部分を仮定、 q の部分を結論といいます。

仮定と結論はそれぞれ、

- 仮定：はじめに与えられてわかっていること
- 結論：これから明らかにしたいこと（導こうとしていること）

を表しています。

【例題 1-3】

次のことがらについて、仮定と結論をいいなさい。

- (1) ある三角形が二等辺三角形であるならば、その三角形の 2 つの底角は等しい。
- (2) ある三角形が正三角形であるならば、その三角形は二等辺三角形である。

＜解説＞

「ならば」よりも前の部分が仮定で、後ろの部分が結論になります。

- (1) 「ならば」の前の部分と後ろの部分をそれぞれ抜き出して

仮定：ある三角形が二等辺三角形である

結論：その三角形の 2 つの底角は等しい

- (2) 「ならば」の前の部分と後ろの部分をそれぞれ抜き出して

仮定：ある三角形が正三角形である

結論：その三角形は二等辺三角形である

問題文の意味がわからなくても、ただ単に「ならば」の前の部分と後ろの部分を抜き出せば、仮定と結論を示すことはできますが、それでは正しく問題を解けていることにはなりません。用語の意味を正しく理解することが大切です。

【演習 1-3】

次のことがらを「 p ならば q である」の形におし、仮定と結論をいいなさい。

- (1) 直角三角形の 2 つの鋭角の和は直角である。
- (2) 9 の倍数は 18 の倍数である。
- (3) 偶数と奇数の和は奇数である。

1.4 定義と定理

用語の意味を述べた文章や式を定義といい、定義やこれまでに明らかにされたことがらを用いて示されたことがらを定理といいます。

「定義」はあることがらについて定めたものであるので「1つ」しかありませんが、「定理」は、その定義から導かれたことがらの特徴や性質になるので、1つだけではなく「複数」存在する場合があります。

【例題 1-4】

次の文章は定義ですか、それとも、定理ですか。

- ① 平行な2つの直線に、1つの直線が交わってできる同位角は等しい。
- ② 平行な2つの直線に、1つの直線が交わってできる錯角は等しい。
- ③ 対頂角は等しい。
- ④ 三角形の1つの外角は、その隣にない2つの内角の和に等しい。

＜解説＞

- ① 「平行な2つの直線に、1つの直線が交わってできる同位角は等しい。」と定めたのか、そのような性質があるのかを考えます。定めたのであれば「定義」ですが、これはそのような決まりであると定めたのではなく、平行線にはそのような性質があるということだったので、「定理」になります。
- ② 「平行な2つの直線に、1つの直線が交わってできる錯角は等しい。」と定めたのか、そのような性質があるのかを考えます。定めたのであれば「定義」ですが、これはそのような決まりであると定めたのではなく、平行線にはそのような性質があるということだったので、「定理」になります。
- ③ 「対頂角は等しい。」と定めたのか、そのような性質があるのかを考えます。定めたのであれば「定義」ですが、これはそのような決まりであると定めたのではなく、対頂角にはそのような性質があるということだったので、「定理」になります。
- ④ 「三角形の1つの外角は、その隣にない2つの内角の和に等しい。」と定めたのか、そのような性質があるのかを考えます。定めたのであれば「定義」ですが、これはそのような決まりであると定めたのではなく、「外角の定理」と言われるよう、そのような性質があるということだったので、「定理」になります。

1.5 証明のしくみ

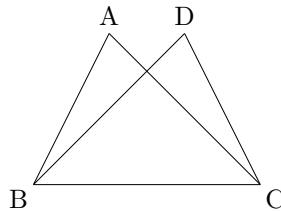
あることがらを仮定から出発し、すでに正しいと認められていることがらを根拠として、筋道を立てて結論を導くことを証明といいます。「証明」は、自分がだけが見ればわかるというものではなく、誰が見てもわかるものでなければいけません。

2つの三角形が合同であることを証明するためには、主に次のような手順で行います。

- (i) どの2つの三角形が合同であることを示すのか
- (ii) 仮定や図形の性質から等しいといえる辺や角は何か
- (iii) 三角形の合同条件のどれを使うのか
- (iv) 結論を示す

【例題1-5】

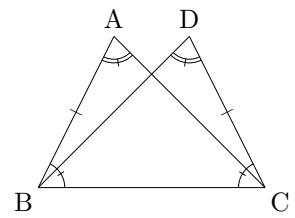
下の図で、 $\angle ABC = \angle DCB$, $AB = DC$ ならば、 $\angle A = \angle D$ であることを証明しなさい。



＜解説＞

合同な2つの三角形では、対応する辺の長さや角の大きさは等しくなります。そのことから、辺の長さや角の大きさが等しいことを証明するために、2つの図形が合同であることを利用します。そのとき、証明手順の逆から考えるようにします。

- (1) まずは、合同になりそうな2つの三角形を選び出します。しかし、合同になればどの三角形でもいいというわけではなく、結論を導き出せるものでなければいけません。また、はじめに与えられていること（仮定）を用いて証明をするので、その条件が使える図形でなくてはいけません。そこで、「はじめに与えられて分かっていること（仮定）」と「これから明らかにしたいこと（結論）」を右図のように記入します。

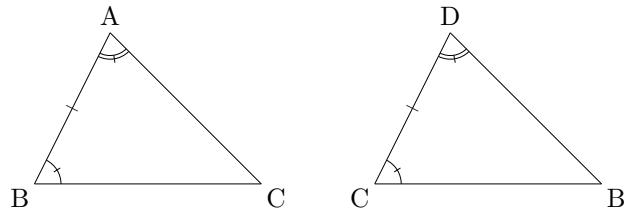


仮定 : $\angle ABC = \angle DCB$, $AB = DC$

結論 : $\angle A = \angle D$

すると、与えられた条件と、導き出したい結論が含まれている $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ という2つの三角形を見つけることができます。

このとき、対応する頂点がそろうように向きをそろえて三角形を並べると考えやすくなります。



- (2) 次に、三角形の合同条件の中からどれが使えそうかを考えます。与えられた条件（仮定）から、1つの辺と1つの角の大きさがそれぞれ等しいことがわかっています。このことから、

- 2辺とその間の角がそれぞれ等しい
- 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい

のどちらかの条件が使えそうです。しかし、「1辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という条件では、導きたい結論（ $\angle A = \angle D$ ）が両端の角の中に含まれてしまうので使うことができません。よって、「2辺とその間の角がそれぞれ等しい」という条件を使うことになります。

- (3) 仮定から

$$\angle ABC = \angle DCB, \quad AB = DC$$

のように1辺と1つの角が等しいことがわかっているので、「2辺とその間の角がそれぞれ等しい」ということを示すために、

$$BC = CB$$

であることが示せればよいことになります。問題で与えられた図を見てもわかるように、BCとCBは同じ辺のことなので、長さは等しくなります。

- (4) (1)～(3)によって、証明をするための道具をそろえることができました。

- (i) どの2つの三角形が合同であることを示すのか（頂点は対応する順に並べます）

$$\triangle ABC \text{ と } \triangle DCB$$

- (ii) 仮定や図形の性質から等しいといえる辺や角は何か（辺や角の名前も、頂点の対応する順に並べます）

$$\text{仮定 } \cdots \angle ABC = \angle DCB, \quad AB = DC$$

$$\text{図形の性質 } \cdots BC = CB$$

- (iii) 三角形の合同条件のどれを使うのか

2辺とその間の角がそれぞれ等しい

- (iv) 結論を示す

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB \longrightarrow \angle A = \angle D$$

- (5) (4)を用いて証明をします。

＜証明＞

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ で、仮定から

$$\angle ABC = \angle DCB \cdots \cdots \text{①}$$

$$AB = DC \dots \dots \quad ②$$

また、辺 BC と辺 CB は共通なので、

$$BC = CB \dots \dots \quad ③$$

①～③より、2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

よって、合同な図形では対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle A = \angle D$$

(証明終わり)

三角形の合同は以上のようにして証明することができます。問題によって、考え方の流れは異なる場合もありますが、大まかには以上のような流れになります。その流れをしっかりとおさえておきましょう。

また、証明をしっかりとできるようにするために、証明の仕方を真似るのが近道です。証明の流れ、書き方や考え方を真似て、どのような問題であってもそれと同じようにしてできるように練習をしてください。

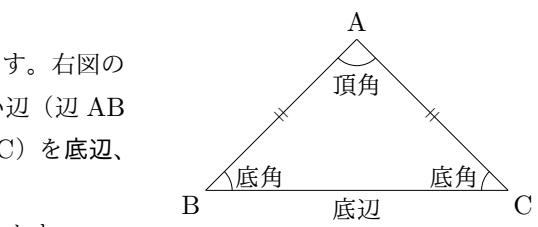
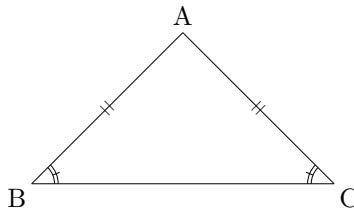
2 三角形

2.1 二等辺三角形の性質

2つの辺が等しい三角形（定義）を二等辺三角形といいます。右図のように、 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC では、等しい辺（辺 AB と辺 AC ）の作る角（ $\angle A$ ）を頂角、頂角に対する辺（辺 BC ）を底辺、底辺の両端の角（ $\angle B$ と $\angle C$ ）を底角といいます。

また、二等辺三角形には、次のような性質（定理）があります。

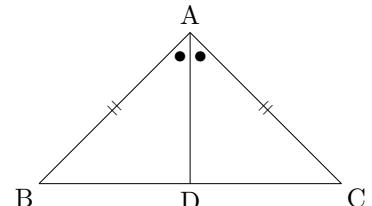
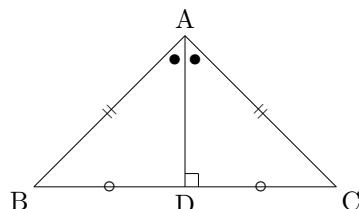
- ① 二等辺三角形の2つの底角は等しい。
 ② 二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する。



【例題 2-1】

図のように、 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC があり、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とします。この図を利用して、

「二等辺三角形の2つの底角は等しい」
 ことを証明しなさい。



＜解説＞

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を用いると、二等辺三角形の底角は、 $\angle B$ と $\angle C$ になるので、「二等辺三角形の2つの底角は等しい」ことは、

「 $\triangle ABC$ で、 $AB = AC$ ならば、 $\angle B = \angle C$ である」

のよう書き直すことができます。このことから、

仮定： $AB = AC$ 結論： $\angle B = \angle C$

となり、この結論を導くことが目標です。そこで、角の大きさが等しくなることを、三角形の合同を利用して証明します。

＜証明＞

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で、仮定から、

$AB = AC \dots \dots \textcircled{1}$

また、AD は $\angle A$ の二等分線なので、

$$\angle BAD = \angle CAD \dots\dots \textcircled{2}$$

さらに、辺 AD は共通なので、

$$AD = AD \dots\dots \textcircled{3}$$

①～③より、2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle B = \angle C$$

となり、二等辺三角形の 2 つの底角は等しい。

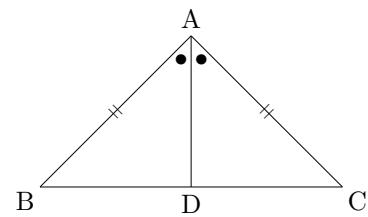
(証明終わり)

【演習 2-1】

図のように、 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC があり、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とします。この図を利用して、

「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に 2 等分する」

ことを証明しなさい。



2.2 二等辺三角形になるための条件

次の条件が成り立つとき、三角形は二等辺三角形になります。

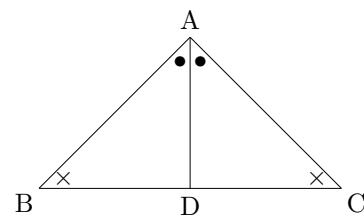
- ① 三角形の 2 つの辺が等しい（定義） ② 三角形の 2 つの角が等しい

【例題 2-2】

図のように、 $\angle B = \angle C$ である三角形 ABC があり、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とします。この図を利用して、

「2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」

ことを証明しなさい。



＜解説＞

三角形 ABC において、等しい 2 つの角は $\angle B$ と $\angle C$ になります。また、二等辺三角形は 2 つの辺が等しい三角形であるので、「2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」ということは、

「 $\triangle ABC$ で、 $\angle B = \angle C$ ならば、 $AB = AC$ である」

のように書き直すことができます。このことから、

仮定： $\angle B = \angle C$ 結論： $AB = AC$

となり、この結論を導くことが目標です。そこで、辺の長さが等しくなることを、三角形の合同を利用して証明をします。

＜証明＞

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で、仮定から、

$$\angle B = \angle C \quad \dots \dots \quad ①$$

また、AD は $\angle A$ の二等分線であるので、

$$\angle BAD = \angle CAD \quad \dots \dots \quad ②$$

さらに、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle B + \angle BAD) \quad \dots \dots \quad ③, \quad \angle ADC = 180^\circ - (\angle C + \angle CAD) \quad \dots \dots \quad ④$$

①～④より、

$$\angle ADB = \angle ADC \quad \dots \dots \quad ⑤$$

そして、辺 AD は共通な辺であるので、

$$AD = AD \quad \dots \dots \quad ⑥$$

よって、②, ⑤, ⑥より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

合同な図形の対応する辺の長さは等しいので、

$$AB = AC$$

となり、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。つまり、2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である。

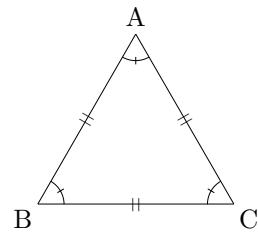
(証明終わり)

2.3 正三角形の性質

3つの辺がすべて等しい三角形（定義）を正三角形といいます。

正三角形は3つの辺がすべて等しいので、「2つの辺が等しい三角形」ということもでき、二等辺三角形の特別なものであると考えることができます。そのことから、次の二等辺三角形の定理は、正三角形においても成り立つことになります。

- ① 二等辺三角形の2つの底角は等しい
- ② 二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する
- ③ 2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である



また、正三角形には次の性質（定理）があります。

- 正三角形の3つの内角は等しい

【例題2-3】

正三角形は、二等辺三角形の特別なものと考えることができます。そのことを利用して、

「正三角形の3つの内角は等しい」

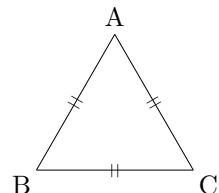
ことを証明しなさい。

＜解説＞

右の図のような正三角形ABCを利用して考えます。

正三角形は、3つの辺がすべて等しい三角形です。また、三角形ABCの3つの内角は $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ であるので、「正三角形の3つの内角は等しい」ことは、

「 $\triangle ABC$ で、 $AB = BC = CA$ ならば、 $\angle A = \angle B = \angle C$ である」



のように書き直すことができます。このことから、

仮定： $AB = BC = CA$

結論： $\angle A = \angle B = \angle C$

となり、この結論を導くことが目標です。問題文にも書いてある通り、正三角形は二等辺三角形の特別なものと考えることができるので、そのことを利用して証明します。

＜証明＞

$\triangle ABC$ は $AB = BC = CA$ である三角形なので、 $AB = AC$ である二等辺三角形であるとすると、二等辺三角形の2つの底角は等しいので、

$$\angle B = \angle C \dots \textcircled{1}$$

同じようにして、 $BC = CA$ である二等辺三角形であると考えると、二等辺三角形の2つの底角は等しいので、

$$\angle A = \angle B \dots \textcircled{2}$$

よって、①, ②より

$$\angle A = \angle B = \angle C$$

となり、正三角形の3つの内角は等しい。

(証明終わり)

2.4 正三角形になるための条件

次の条件が成り立つとき、三角形は正三角形になります。

- ① 三角形の3つの辺が等しい（定義） ② 三角形の3つの角が等しい

【例題2-4】

正三角形は、二等辺三角形の特別なものと考えることができます。そのことを利用して、

「3つの角が等しい三角形は正三角形である」

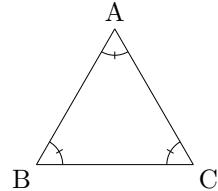
ことを証明しなさい。

＜解説＞

図のような $\triangle ABC$ を利用して考えます。

$\triangle ABC$ では、3つの角は $\angle A, \angle B, \angle C$ です。また、正三角形は、3つの辺がすべて等しい三角形であるので、「3つの角が等しい三角形は正三角形である」ことは、

「 $\triangle ABC$ で、 $\angle A = \angle B = \angle C$ ならば、 $AB = BC = CA$ である」



のように書き直すことができます。このことから、

仮定： $\angle A = \angle B = \angle C$ 結論： $AB = BC = CA$

となり、この結論を導くことが目標です。そこで、二等辺三角形の定理を利用して、そのことを証明します。

＜証明＞

2つの角が等しい三角形は二等辺三角形であるので、 $\angle A = \angle B$ より、

$$BC = CA \quad \dots \dots \quad ①$$

また、 $\angle B = \angle C$ より、

$$AB = CA \quad \dots \dots \quad ②$$

よって、①、②より

$$AB = BC = CA$$

となり、3つの角が等しい三角形は正三角形である。

（証明終わり）

2.5 ことがらの逆

あることがらの仮定と結論を入れかえたものを、もとのことがらの逆といいます。

また、あることがらが正しくないことを示すには、正しくない例（反例）を1つあげます。

【例題2-5】

次のことがらの逆を述べ、それが正しいかどうかを調べなさい。

- (1) $\triangle ABC$ で、 $AB = AC$ ならば、 $\angle B = \angle C$
- (2) 正三角形は二等辺三角形である

＜解説＞

(1) 与えられたことがらの仮定と結論は、

仮定： $AB = AC$ 結論： $\angle B = \angle C$

この仮定と結論を入れかえると、逆は、

$\triangle ABC$ で、 $\angle B = \angle C$ ならば $AB = AC$

となります。これは、「2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」という二等辺三角形の定理になるので、正しいことがらになります。

(2) 「ならば」が用いられていませんが、「ならば」を用いて書き直すと、「正三角形ならば二等辺三角形である」となります。このことから、仮定と結論は、

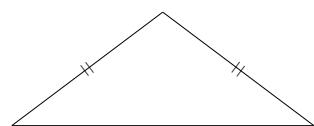
仮定：正三角形 結論：二等辺三角形

仮定と結論を入れかえると、逆は、

「二等辺三角形ならば正三角形である」

となります。

二等辺三角形は「2つの辺が等しい三角形」であるので、残りのもう1つの辺も等しければ正三角形になりますが、右の図のように、二等辺三角形であっても正三角形にはならないものは無数に存在します。つまり、反例が存在するので、正しくありません。もとのことがらが正しくても、その逆は正しいとは限らないので注意が必要です。

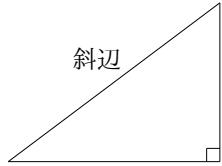


2.6 直角三角形の合同条件

直角三角形で、直角に対する辺を斜辺といいます。

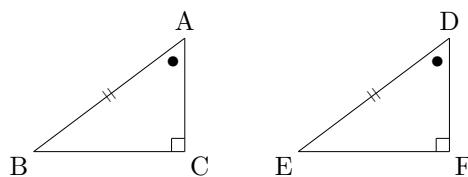
三角形の合同条件には次の3つの場合があります。

- (i) 3辺がそれぞれ等しい
- (ii) 2辺とその間の角がそれぞれ等しい
- (iii) 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい

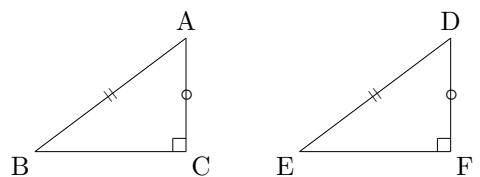


しかし、直角三角形では次の場合にも合同になり、これらを「直角三角形の合同条件」として利用することができます。

① 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい



② 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい



【例題2-6】

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

$$AB = DE, \quad \angle A = \angle D, \quad \angle C = \angle F = 90^\circ$$

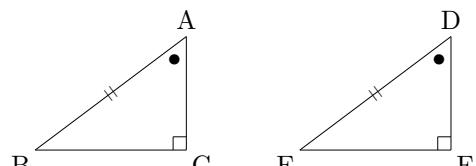
であるとき、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であることを証明しなさい。

＜解説＞

図形の問題なので、右図のような $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ をイメージしながら考えます。

問題文に与えられている条件

$$AB = DE, \quad \angle A = \angle D, \quad \angle C = \angle F = 90^\circ$$



から、直角三角形の「斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい」という場合について、2つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同になるのかを考える問題になっています。

つまり、

$$\text{仮定: } AB = DE, \quad \angle A = \angle D, \quad \angle C = \angle F = 90^\circ \quad \text{結論: } \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

となり、この結論を導くことが目標です。そこで、三角形の合同条件を利用して、そのことを証明していきます。

＜証明＞

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で、仮定より、

$$AB = DE \quad \dots \dots \quad ① \quad \angle A = \angle D \quad \dots \dots \quad ② \quad \angle C = \angle F = 90^\circ \quad \dots \dots \quad ③$$

また、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) \quad \dots \dots \quad ④ \qquad \qquad \qquad \angle E = 180^\circ - (\angle D + \angle F) \quad \dots \dots \quad ⑤$$

②～⑤より、

よって、①, ②, ⑥より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

(証明終わり)

【演習 2 - 6】 —

△ABC と △DEF において、

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad \angle C = \angle F = 90^\circ$$

であるとき、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であることを証明しなさい。

3 平行四辺形

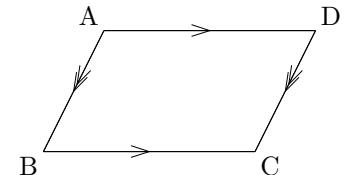
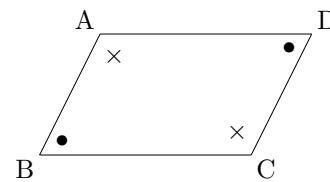
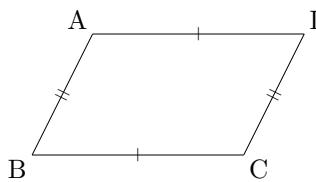
3.1 平行四辺形の性質

2組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形（定義）を、平行四辺形といい、平行四辺形 $ABCD$ は、記号を用いて $\square ABCD$ のように表すこともあります。

また、四角形の向かい合う辺を対辺、向かい合う角を対角といいます。

平行四辺形には次のような性質（定理）があります。

- (i) 2組の向かい合う辺（対辺）は (ii) 2組の向かい合う角（対角）は (iii) 対角線はそれぞれの中点で交わる
- それぞれ等しい それぞれ等しい

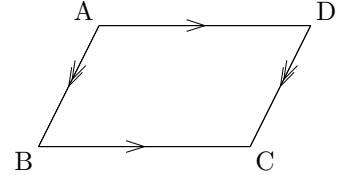


【例題 3-1】

右の図の平行四辺形 $ABCD$ において、

$$AB = DC, \quad AD = BC$$

となることを証明しなさい。



＜解説＞

四角形 $ABCD$ は平行四辺形であるので、向かい合う 2組の辺がそれぞれ平行です。つまり、

$$AD \parallel BC, \quad AB \parallel DC$$

であることになります。このことから、「四角形 $ABCD$ で、 $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$ ならば、 $AB = DC$, $AD = BC$ である」ことを証明すればよいことになります。辺の長さが等しいことを証明するので、三角形の合同の利用を考えます。そこで、対角線 BD （または、対角線 AC ）を引くことで、平行四辺形を 2つの三角形に分割します。

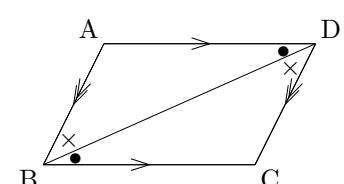
＜証明＞

四角形 $ABCD$ は平行四辺形であるので、

$$AD \parallel BC \dots \textcircled{1} \quad AB \parallel DC \dots \textcircled{2}$$

$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ で、①, ②より錯角は等しいので、

$$\angle ADB = \angle CBD \dots \textcircled{3} \quad \angle ABD = \angle CDB \dots \textcircled{4}$$



また、BD は共通なので、

$$BD = DB \dots \textcircled{5}$$

③～⑤より、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$$

よって、合同な図形の対応する辺の長さは等しいので、

$$AB = DC, \quad AD = BC$$

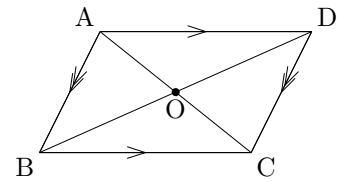
(証明終わり)

【演習 3 - 1】

右の図の平行四辺形 ABCD において、次のことを証明しなさい。

(1) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

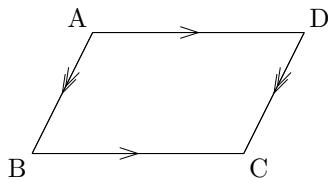
(2) $AO = CO, BO = DO$



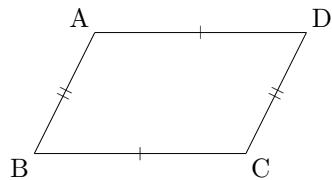
3.2 平行四辺形になるための条件

四角形は次の各場合に平行四辺形になります。また、平行四辺形の定理の逆は、すべて成り立ちます。

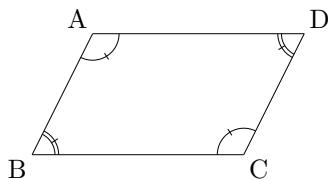
① 2組の対辺がそれぞれ平行であるとき（定義）



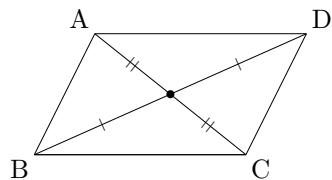
② 2組の対辺がそれぞれ等しいとき



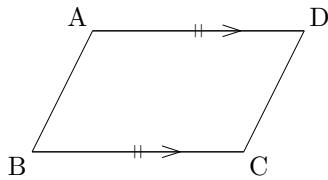
③ 2組の対角がそれぞれ等しいとき



④ 対角線がそれぞれの中点で交わるとき



⑤ 1組の対辺が等しくて平行であるとき

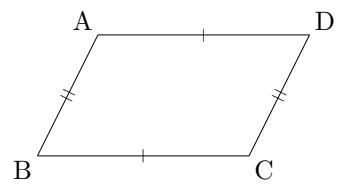


【例題 3-2】

四角形 ABCD において、 $AB = CD$, $BC = DA$ ならば、この四角形は平行四辺形であることを証明しなさい。

＜解説＞

まず、問題文に書かれていることを把握するためにも、問題文の条件に合う図をかいてみます。四角形 ABCD だけではどのような四角形なのかはわかりませんが、平行四辺形であることを証明するので、平行四辺形 ABCD をかきます。このとき、問題文に書かれている条件も図の中に書き入れるようにします。



平行四辺形は、「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行である四角形」なので、四角形が平行四辺形であることを示すためには、

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

のように、向かい合う辺が平行であることを示します。つまり、四角形 ABCD において、

仮定 : $AB = CD$, $BC = DA$

結論 : $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

となるので、この仮定から結論を導くことが目標です。

2辺が平行であることを示すには、同位角や錯角が等しくなることを示せればいいのですが、角の大きさが等しくなることを示すには、三角形の合同が利用できます。そこで、対角線 AC (または、対角線 BD) で四角形を2つの三角形に分割して考えます。

<証明>

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ で、仮定より、

$$AB = CD \dots \textcircled{1} \quad BC = DA \dots \textcircled{2}$$

また、AC は共通な辺であるので、

$$AC = CA \dots \textcircled{3}$$

①～③より、3辺の長さがそれぞれ等しいので、

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

合同な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$$\angle ACB = \angle CAD \dots \textcircled{4} \quad \angle BAC = \angle DCA \dots \textcircled{5}$$

④, ⑤より、錯角が等しいので、

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

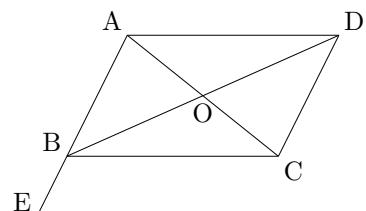
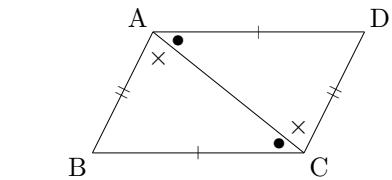
よって、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行なので、四角形 ABCD は平行四辺形である。

(証明終わり)

【演習 3-2】

右図の四角形 ABCD は、次のそれぞれの場合に平行四辺形になることを証明しなさい。ただし、点 E は AB の延長上の点で、点 O は対角線 AC, BD の交点とします。

- (1) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
- (2) $AO = CO, BO = DO$
- (3) $AD = BC, AD \parallel BC$



3.3 長方形

4つの内角が等しい四角形（定義）を長方形といいます。長方形（四角形）の内角の和は 360° であるので、長方形の1つの内角は、

$$360^\circ \div 4 = 90^\circ$$

になります。

長方形は、4つの内角が等しい四角形であることから、

$$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D$$

のようになります。つまり、長方形は、「2組の向かい合う角（対角）がそれぞれ等しい四角形」ということができるので、平行四辺形の特別なものと考えることができます。そのため、次の平行四辺形の定義や定理はすべて、長方形でも成り立ちます。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ① 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行 | ② 2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい |
| ③ 2組の向かい合う角はそれぞれ等しい | ④ 対角線はそれぞれの中点で交わる |

また、平行四辺形は次の各場合に長方形になります。

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (i) 1つの内角が直角であるとき | (ii) 対角線の長さが等しいとき |
|-------------------|-------------------|

【例題 3-3】

平行四辺形 ABCD で、 $\angle A$ が直角のとき、この平行四辺形は長方形であることを証明しなさい。

＜解説＞

長方形は、「4つの内角が等しい四角形」であるので、平行四辺形 ABCD において、

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D (= 90^\circ)$$

であることが示せればよいことになります。

このとき、平行四辺形は「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行」である四角形なので、平行な2直線 AD(AB), BC(DC) に1直線 AB(BC) が交わっていると考えると、同側内角の和は 180° になることから、

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \quad (\angle B + \angle C = 180^\circ)$$

という関係（平行四辺形の隣り合う内角の和は 180° ）が成り立つことになります。

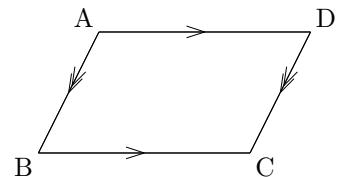
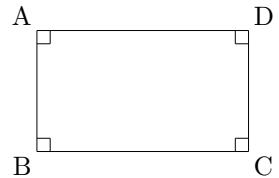
＜証明＞

四角形 ABCD は、 $\angle A = 90^\circ$ である平行四辺形なので、2組の向かい合う角がそれぞれ等しいことから、

$$\angle A = \angle C = 90^\circ \cdots \textcircled{1} \quad \angle B = \angle D \cdots \textcircled{2}$$

また、平行四辺形の隣り合う内角の和は 180° になるので、

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \cdots \textcircled{3}$$



よって、①, ③より、

$$\begin{aligned}90^\circ + \angle B &= 180^\circ \\ \angle B &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \dots\dots \quad ④\end{aligned}$$

①, ②, ④より、

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

と、4つの内角がすべて等しくなるので、平行四辺形 ABCD は長方形である。

(証明終わり)

【演習 3-3】

平行四辺形 ABCD で、 $AC = BD$ のとき、この平行四辺形は長方形であることを証明しなさい。

3.4 ひし形

4つの辺が等しい四角形（定義）をひし形といい、右の図のようなひし形ABCDでは、

$$AB = BC = CD = DA$$

となります。このとき、

$$AB = CD, \quad BC = DA$$

のようく表すことができるので、ひし形は、「2組の向かい合う辺が等しい四角形」になります。つまり、ひし形は平行四辺形の特別なものと考えることができますので、次の平行四辺形の定義や定理はすべて、ひし形でも成り立ちます。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ① 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行 | ② 2組の向かい合う辺はそれぞれ等しい |
| ③ 2組の向かい合う角はそれぞれ等しい | ④ 対角線はそれぞれの中点で交わる |

また、平行四辺形は次の各場合にひし形になります。

- | | |
|---------------------|------------------|
| (i) 1組の隣り合う2辺が等しいとき | (ii) 対角線が垂直であるとき |
|---------------------|------------------|

【例題3-4】

平行四辺形ABCDで、 $AB = BC$ ならば、この平行四辺形はひし形であることを証明しなさい。

＜解説＞

問題文の内容を把握するために図をかいてみます。

ひし形は「4つの辺が等しい四角形」であるので、平行四辺形の定理を利用して、

$$AB = BC = CD = DA$$

のようく、4つの辺の長さが等しいことを導きます。

＜証明＞

四角形ABCDは平行四辺形であるので、2組の向かい合う辺の長さは等しいことから、

$$AB = CD \quad \dots \dots \quad ① \qquad BC = DA \quad \dots \dots \quad ②$$

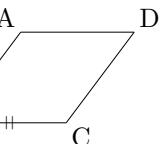
また、仮定から、

$$AB = BC \quad \dots \dots \quad ③$$

①～③より、

$$AB = BC = CD = DA$$

となり、平行四辺形ABCDは4つの辺が等しい四角形であるので、ひし形である。



（証明終わり）

【演習3-4】

平行四辺形ABCDで、 $AC \perp BD$ ならば、この平行四辺形はひし形であることを証明しなさい。

3.5 正方形

4つの角が等しく、4つの辺が等しい四角形（定義）を正方形といいます。

「4つの角が等しい四角形」は長方形で、「4つの辺が等しい四角形」がひし形であるので、「4つの角が等しく、4つの辺が等しい四角形」である正方形は、長方形でありひし形である四角形になります。

平行四辺形は次の各場合に長方形になります。

(i) 1つの内角が直角であるとき

また、次の各場合にはひし形になります。

(i) 1組の隣り合う2辺が等しいとき

このことから、長方形でありひし形である正方形は、これらの条件を組み合わせ、

- 1つの内角が直角で、1組の隣り合う2辺が等しい

- 対角線の長さが等しく、垂直である

場合に、平行四辺形は正方形になります。そして、平行四辺形と、その特別な四角形である長方形、ひし形、正方形の関係は、次のような図で表すことができます。

