【中２数学】平面図形と平行線の性質

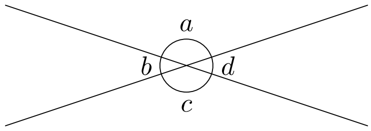
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　平行線と角

1.1　対頂角



2 本の直線が交わると、右の図のように 4 つの角ができます。このとき、$\angle a$ と $\angle c$、$\angle b$ と $\angle d$ のように、たがいに向かい合っている 2 つの角を**対頂角**といいます。

ここで、直線の作る角は 180° なので、

$$\angle a + \angle b = 180^\circ \ \cdots\cdots \ ① \qquad \angle b + \angle c = 180^\circ \ \cdots\cdots \ ②$$

となります。①, ②より、次の関係が成り立ちます。（図でも確認してみましょう。）

$$\begin{aligned} \angle a + \angle b &= \angle b + \angle c \\ \angle a &= \angle c \end{aligned}$$

同じようにして、

$$\angle b + \angle c = 180^\circ \ \cdots\cdots \ ③ \qquad \angle c + \angle d = 180^\circ \ \cdots\cdots \ ④$$

となるので、③, ④より、次の関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \angle b + \angle c &= \angle c + \angle d \\ \angle b &= \angle d \end{aligned}$$

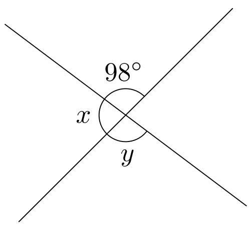
以上のことから

$$\angle a = \angle c, \quad \angle b = \angle d$$

となることがわかるので、**「対頂角は等しい」**という性質があります。

【例題 1 − 1】

次の図で、$\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。



＜解説＞

直線の作る角は 180° なので、

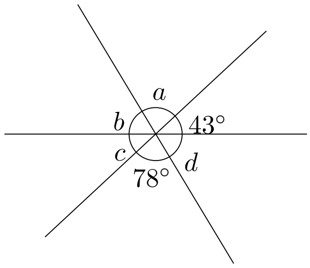
$$\begin{aligned} \angle x + 98^\circ &= 180^\circ \\ \angle x &= 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ \end{aligned}$$

また、対頂角は等しいので、

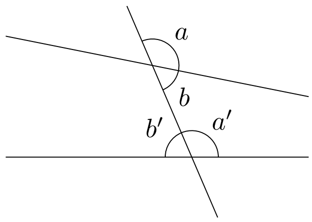
$$\angle y = 98^\circ$$

【演習 1 − 1】

次の図で、$\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ の大きさを求めなさい。



1.2 同位角・錯角・同側内角



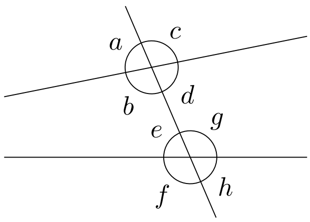
右の図のように、2 本の直線に 1 本の直線が交わっているとき、$\angle a$ と $\angle a'$ のように、2 本の直線と 1 本の直線とが作る角で、同じ位置にあるようなものを**同位角**といいます。また、$\angle b$ と $\angle b'$ のように、2 本の直線と 1 本の直線とが作る角で、2 つの直線にはさまれ、1 本の直線の反対側にあって相対する角を**錯角**といい、$\angle a'$ と $\angle b$ のように同じ側にある角を**同側内角**といいます。

【例題 1 − 2】

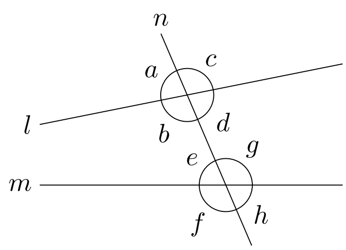
下の図について、次の問いに答えなさい。

(1) どの角とどの角が同位角ですか。

(2) どの角とどの角が錯角になっていますか。



＜解説＞



右の図のように、それぞれの直線を l, m, n とします。

(1) 同位角とはその言葉通り、「**同じ位置にある角**」のことです。直線 l と直線 n とでできる

左上の角（$\angle a$)、左下の角（$\angle b$)、右上の角（$\angle c$)、右下の角（$\angle d$)

の 4 つの角と、直線 m と直線 n とでできる

左上の角（$\angle e$)、左下の角（$\angle f$)、右上の角（$\angle g$)、右下の角（$\angle h$)

の 4 つの角がそれぞれ同じ位置に対応するので、同位角は、

$\angle a$ と $\angle e$, $\angle b$ と $\angle f$, $\angle c$ と $\angle g$, $\angle d$ と $\angle h$

(2) 錯角は、2 つの直線の内側で、交差するような位置にある角です。つまり、

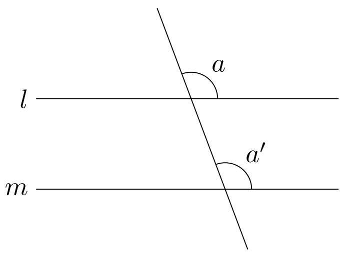
$\angle b$ と $\angle g$, $\angle d$ と $\angle e$

が錯角になります。

1.3　平行線と同位角・錯角・同側内角

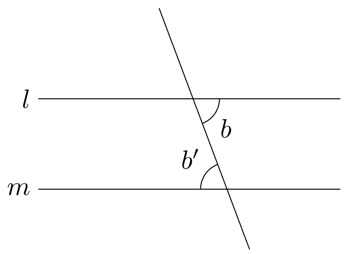
平行な 2 直線に 1 直線が交わるとき、次の図のように、同位角や錯角はそれぞれ等しくなります。

(ｉ) $l \mathbin{/\!/} m$ のとき、同位角はそれぞれ等しい



$\angle a = \angle a'$ ……　①

(ii) $l \mathbin{/\!/} m$ のとき、錯角はそれぞれ等しい



$\angle b = \angle b'$

また、これとは逆に、2 直線が 1 直線に交わるとき、

(ｉ) 同位角が等しければ（$\angle a = \angle a'$）、2 直線は平行（$l \mathbin{/\!/} m$）

(ii) 錯角が等しければ（$\angle b = \angle$b'）、2 直線は平行（$l \mathbin{/\!/} m$）

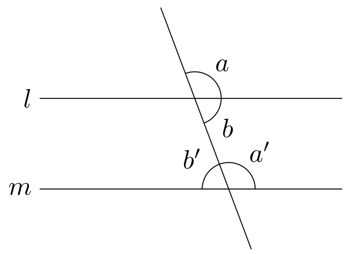
となり、これが「**2 直線が平行になるための条件**」になります。

そして、右の図のように、平行な 2 直線に 1 直線が交わるとき、直線の作る角は 180° であるので、

$$\angle a + \angle b = 180^\circ$$

これと①の関係から、

$$\angle a' + \angle b = 180^\circ$$

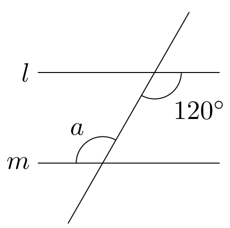


という関係が成り立ち、平行な 2 直線に 1 直線が交わるとき、「**同側内角の和は** 180°」になります。

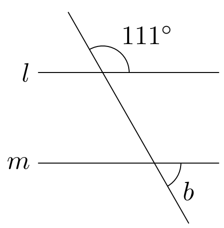
【例題 1 − 3】

次の図で、$l \mathbin{/\!/} m$ であるとき、$\angle a, \angle b, \angle c$ の大きさを求めなさい。

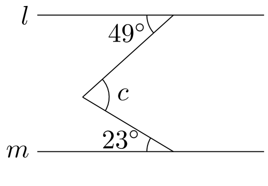
(1)



(2)



(3)



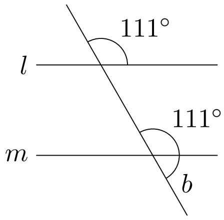
＜解説＞

平行線における角度の問題では、同位角や錯角が等しくなるので、その性質をフルに活用しましょう。

(1) 平行線の錯角は等しくなるので、

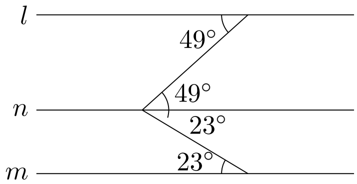
$$\angle a = 120^\circ$$

(2) 平行線の同位角は等しくなるので、右図のようになります。また、直線の作る角の大きさは 180° なので、



$$\begin{aligned}\angle b + 111^\circ &= 180^\circ \\ \angle b &= 180^\circ - 111^\circ \\ &= 69^\circ\end{aligned}$$

(3) このままの図では、同位角や錯角がありません。そこで、右の図のように直線 l、直線 m と平行になる補助線（直線 n）を引くと、錯角は等しくなります。よって、

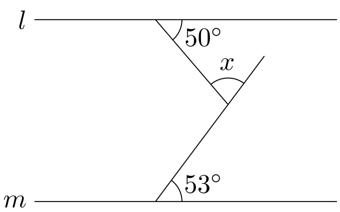


$$\angle c = 49^\circ + 23^\circ = 72^\circ$$

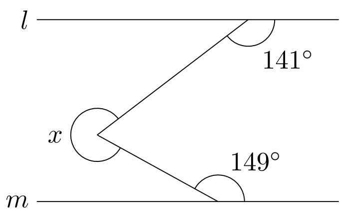
【演習１－３】

次の図で、$l \parallel m$ であるとき、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

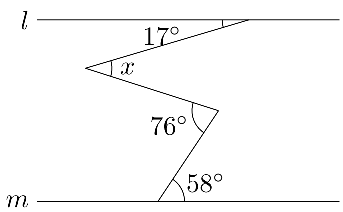
(1)



(2)

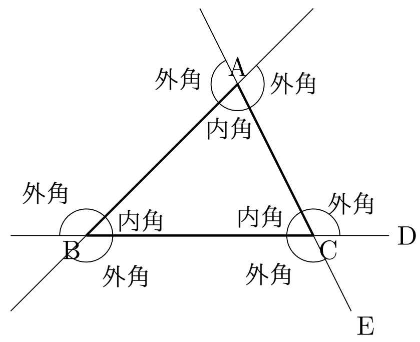


(3)



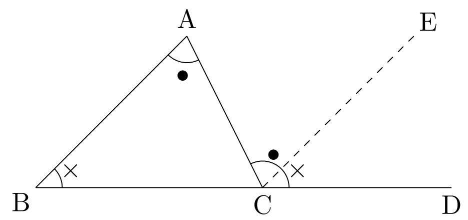
2　多角形と角

2.1　三角形の内角と外角



多角形の 1 辺と、その 1 辺と隣り合う辺の延長とが作る角を**外角**といい、多角形の隣り合った 2 辺が作る、多角形の内側に向いた角を**内角**といいます。

右の図のように、$\triangle$ABC の辺 BC を延長した直線上に点 D、辺 AC を延長した直線上に点 E をとります。このとき、$\angle$ACD, $\angle$BCE を、$\triangle$ABC の頂点 C における外角といい、同じようにして、頂点 A, B における外角も考えることができます。また、外角に対して、$\triangle$ABC の 3 つの角 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C を内角といいます。



今度は右の図のように、$\triangle$ABC の辺 BC を延長した直線上に点 D をとり、点 C を通り辺 BA に平行な直線を CE とします。

このとき、

$$\mathrm{BA} \parallel \mathrm{CE}$$

より、平行線の同位角、錯角は等しいので、

$$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{ACE}, \qquad \angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{ECD}$$

となります。また、一直線のつくる角は 180° であるので、

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} &= \angle \mathrm{ACE} + \angle \mathrm{ECD} + \angle \mathrm{C} \\ &= \angle \mathrm{BCD} = 180^\circ \end{aligned}$$

となり、このことから、「**三角形の 3 つの内角の和は** 180° 」ということがわかります。

また、

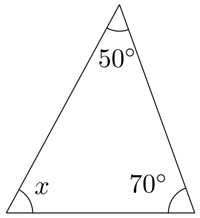
$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ACE} + \angle \mathrm{ECD} = \angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B}$$

より、「**三角形の 1 つの外角は、そのとなりにない 2 つの内角の和に等しい（外角の定理）**」ということもわかります。

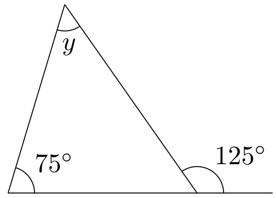
【例題 2 − 1】

下の図で、$\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2)



<解説>

(1) 「三角形の 3 つの内角の和は 180°」なので、

$$\angle x + 50^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

となります。これを計算して

$$\angle x + 120^\circ = 180^\circ$$
$$\angle x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(2) 外角の定理より、「三角形の 1 つの外角は、そのとなりにない 2 つの内角の和に等しい」ので、

$$\angle y + 75^\circ = 125^\circ$$

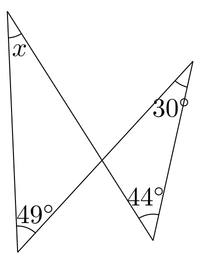
という関係が成り立ちます。これを計算すると

$$\angle y = 125^\circ - 75^\circ = 50^\circ$$

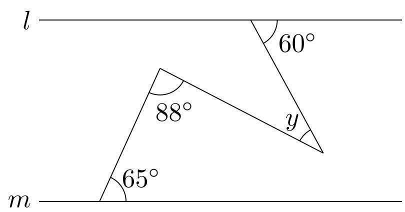
【演習 2 − 1】

下の図で、$\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。

(1)



(2) $l \parallel m$



2.2 三角形の内角と分類

0° より大きく 90° より小さい角を**鋭角 (えいかく)** といい、90° より大きく 180° より小さい角を**鈍角 (どんかく)**、90° の角を**直角**といいます。そして、三角形はその内角の大きさによって、

- **鋭角三角形**：3 つの内角がすべて鋭角である三角形
- **直角三角形**：1 つの内角が直角である三角形
- **鈍角三角形**：1 つの内角が鈍角である三角形

のように分類されます。このとき、次の表のように、鋭角三角形、鈍角三角形、直角三角形のいずれも、2 つの内角はそれぞれ鋭角です。そのため、残りの 1 つの内角が鋭角、鈍角、直角のいずれになるのかを考えることによって、どの三角形に分類されるのかを判断することができます。

三角形の分類	1 つの内角	1 つの内角	1 つの内角
鋭角三角形	**鋭角**	鋭角	鋭角
鈍角三角形	**鈍角**	鋭角	鋭角
直角三角形	**直角**	鋭角	鋭角

【例題 2 − 2】

2 つの内角が次のような三角形は、どんな三角形ですか。

(1) $38^\circ, 39^\circ$　　(2) $60^\circ, 88^\circ$　　(3) $52^\circ, 38^\circ$

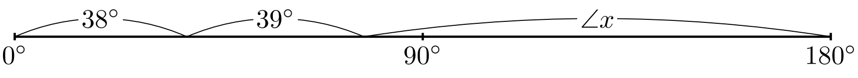
＜解説＞

(1) 残りの 1 つの内角を $\angle x$ とすると、三角形の 3 つの内角の和が 180° なので、

$$\begin{aligned}\angle x + 38^\circ + 39^\circ &= 180^\circ\\ \angle x + 77^\circ &= 180^\circ\\ \angle x &= 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ\end{aligned}$$

となり、三角形の 3 つの内角は、$38^\circ, 39^\circ, 103^\circ$ であることがわかります。38° と 39° は鋭角ですが、103° は鈍角なので、この三角形は鈍角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



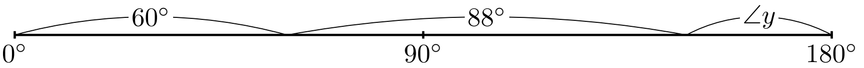
38° と 39° の 2 つの内角の和 77° は 90° よりも小さく、残りの内角の大きさ $\angle x$ は 90° よりも大きくなる、つまり、鈍角になることから、この三角形は鈍角三角形になると判断することもできます。

(2) 残りの 1 つの内角を $\angle y$ とすると、三角形の 3 つの内角の和が 180° なので、

$$\begin{aligned}\angle y + 60^\circ + 88^\circ &= 180^\circ\\ \angle y + 148^\circ &= 180^\circ\\ \angle y &= 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ\end{aligned}$$

となり、三角形の 3 つの内角は、$60^\circ, 88^\circ, 32^\circ$ であることがわかります。三角形の 3 つの内角すべてが鋭角なので、この三角形は鋭角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



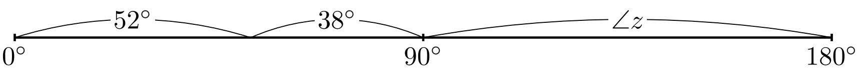
60° と 88° の 2 つの内角の和 148° は 90° よりも大きく、残りの内角の大きさ $\angle y$ は 90° よりも小さくなる、つまり、鋭角になることから、この三角形は鋭角三角形になると判断することもできます。

(3) 残りの 1 つの内角は $\angle z$ とすると、三角形の 3 つの内角の和が 180° なので、

$$\begin{aligned} \angle z + 52^\circ + 38^\circ &= 180^\circ \\ \angle z + 90^\circ &= 180^\circ \\ \angle z &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

となり、三角形の 3 つの内角は、$52^\circ, 38^\circ, 90^\circ$ であることがわかります。52° と 38° は鋭角ですが、90° は直角なので、この三角形は直角三角形になります。

また、このときの内角の大きさの様子を線分図に表してみると次のようになります。



52° と 38° の 2 つの内角の和は 90° となるので、残りの内角の大きさ $\angle z$ は 90° になる、つまり、直角になることから、この三角形は直角三角形になると判断することもできます。

三角形の 3 つの内角すべてを求めることで、どんな三角形になるのかを判断してもいいのですが、線分図を用いて内角の大きさの様子を表したように、2 つの内角（鋭角）の和の大きさから残りの 1 つの内角の大きさが判断できるため、次のような関係で三角形を分類することができます。

三角形の分類	2 つの内角（鋭角）の和	残りの 1 つの内角
鋭角三角形	90° よりも大きい	鋭角（90° よりも小さい）
鈍角三角形	90° よりも小さい	鈍角（90° よりも大きい）
直角三角形	90°	直角（90°）

【演習 2 − 2】

2 つの内角が次のような三角形は、どんな三角形ですか。

(1) $28^\circ, 62^\circ$　　(2) $78^\circ, 69^\circ$　　(3) $56^\circ, 37^\circ$

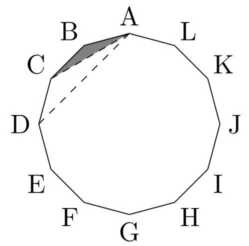
2.3 多角形の内角の和

三角形、四角形、五角形など、いくつかの線分で囲まれた図形を**多角形**といいます。

対角線は頂点と頂点を結ぶことにより引くことができますが、自分自身と自分の隣の頂点には対角線を引くことができません。つまり、n 角形の場合、n 個ある頂点から 3 個の頂点を除いた分だけ、1 つの頂点から対角線を引くことができます。このことから、対角線は 1 つの頂点から、

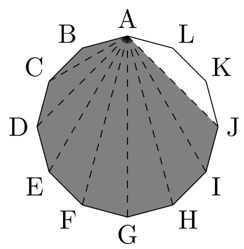
1 つの頂点から引くことのできる n 角形の対角線の本数：$n-3$（本）

だけ引くことができます。

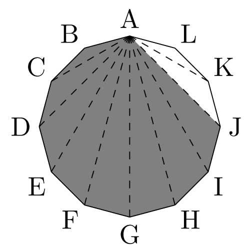


右の図のように、1 つの頂点（ここでは、頂点 A）から対角線を 1 本引くと、三角形を 1 つ作ることができます。そして、そこから順に対角線を 1 本増やすと、できる三角形の個数も 1 つ増え、このようにして、対角線を 1 本ずつ増やすにつれ、できる三角形の個数も 1 つずつ増えることになります。しかし、最後の 1 本の対角線を引く場合には、三角形は 1 つではなく、2 つの三角形が作られます。

(i) 最後から 1 本前まで対角線を引いたとき



(ii) 最後の対角線を引いたとき



このことから、多角形を対角線で分割することにより、三角形は対角線の本数よりも 1 個だけ多くつくることができます。n 角形の場合、1 つの頂点から引くことのできる対角線の本数は $n-3$（本）であったので、対角線によってできる三角形の個数は、それよりも 1 つ多くなるので、

n 角形の分割できる三角形の個数：$(n-3)+1=n-2$（個）

となります。そして、「三角形の 3 つの内角の和が 180°」であることがわかっているので、n 角形の内角の和は、

n 角形の内角の和 $=180^\circ \times (n-2)$

という式で求めることができることになります。

【例題 2 − 3】

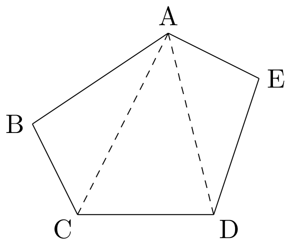
次の多角形の内角の和を求めなさい。

(1) 五角形　　(2) 十二角形

＜解説＞

公式を使えば答えを求めることができますが、ここでは公式の原理を理解するためにそれぞれの多角形を三角形に分割して内角の和を求めてみます。

(1) 五角形の例として、右の図のような五角形 ABCDE の内角の和を求めてみたいと思います。このとき、頂点 A からは、自分自身である頂点 A と、その隣の頂点 B, E には対角線をひくことができないので、残りの



$5 - 3 = 2$（個）

の頂点 C, D へ対角線を引くことができ、

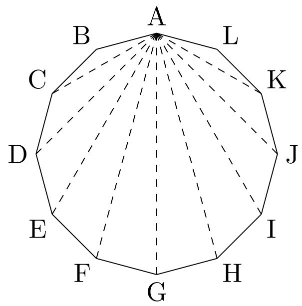
$5 - 2 = 3$（個）

の三角形に分割することができます。
「三角形の 3 つの内角の和は 180°」であるので、五角形 ABCDE の内角の和は、三角形 3 つ分の内角の和を考えればよく、

$$\begin{aligned}(\text{五角形 ABCDE の内角の和}) &= (\text{三角形の内角の和}) \times (5-2)\\ &= 180^\circ \times 3 = 540^\circ\end{aligned}$$

となります。このようにして、五角形であればどのような五角形でも 3 つの三角形に分割できるので、全ての五角形の内角の和は 540° になります。

(2) （1）と同じようにして、十二角形を三角形に分割すると、



$12 - 2 = 10$（個）

の三角形に分割することができます。このことから、十二角形の内角の和は、三角形 10 個分の内角の和を考えればよいので、

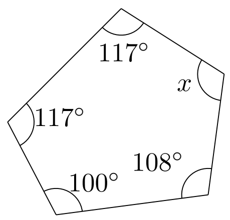
$$\begin{aligned}(\text{十二角形の内角の和}) &= (\text{三角形の内角の和}) \times (12-2)\\ &= 180^\circ \times 10 = 1800^\circ\end{aligned}$$

となります。

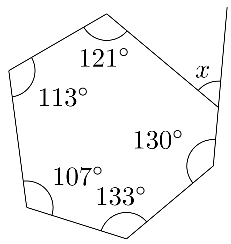
【演習 2 − 3】

次の図で、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

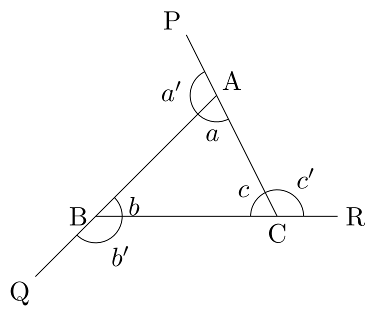
(1)



(2)



2.4　多角形の外角の和



　ここではまず、右の図のような三角形（△ABC）の外角の和（$\angle a' + \angle b' + \angle c'$）について考えてみたいと思います。

　一直線のつくる角は 180° であるので、

$$\angle a + \angle a' = \angle b + \angle b' = \angle c + \angle c' = 180^\circ$$

になります。このことから、

$$\begin{aligned}(\angle a + \angle a') + (\angle b + \angle b') + (\angle c + \angle c') &= 180^\circ \times 3 \\ \angle a + \angle a' + \angle b + \angle b' + \angle c + \angle c' &= 540^\circ \\ (\angle a + \angle b + \angle c) + (\angle a' + \angle b' + \angle c') &= 540^\circ \ \cdots\cdots \ ①\end{aligned}$$

のような関係式を作ることができます。また、三角形の内角の和は 180° なので、

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ \ \cdots\cdots \ ②$$

です。よって、①, ②より、

$$\begin{aligned}180^\circ + (\angle a' + \angle b' + \angle c') &= 540^\circ \\ \angle a' + \angle b' + \angle c' &= 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ\end{aligned}$$

となり、三角形の外角の和は 360° であることがわかります。

　同じようにして n 角形の場合も考えてみると、

$$（1\text{ つの内角} + 1\text{ つの外角}）\text{の和} = 180^\circ \times n$$

となるので、

$$（n\text{ 角形の内角の和}）+（n\text{ 角形の外角の和}）= 180^\circ \times n \ \cdots\cdots \ ③$$

と表すことができます。また、n 角形の内角の和は

$$\begin{aligned}（n\text{ 角形の内角の和}）&= 180^\circ \times (n-2) \\ &= 180^\circ \times n - 180^\circ \times 2 \\ &= 180^\circ \times n - 360^\circ \ \cdots\cdots \ ④\end{aligned}$$

であるので、③, ④より

$$\begin{aligned}(180^\circ \times n - 360^\circ) +（n\text{ 角形の外角の和}）&= 180^\circ \times n \\ （n\text{ 角形の外角の和}）&= 180^\circ \times n - 180^\circ \times n + 360^\circ \\ &= 360^\circ\end{aligned}$$

となり、多角形の外角の和は、どのような多角形であっても常に 360° になります。と、原理的にはそうなりますが、ちょっと説明が難しいですよね。このようになることをもう少し感覚的に考えてみましょう。

　まず、自分が回転いすにすわっていると思ってください。そして、先ほどの図において、頂点 A の位置にいてそこから P の方向に向いています。そこから、$\angle a'$ だけ回転して頂点 B(Q) の方向に向き、頂点 B に向

かっていきましょう。頂点 B に着いたらそこで止まり、$\angle b'$ だけ回転して頂点 C(R) の方に向きます。そして、また頂点 C に向かっていき、頂点 C に着いたら止まり、$\angle c'$ だけ回転して A に向かうというようにして △ABC を 1 周します。イメージできましたか？

最初は P を向いていますね。そこから $\angle a', \angle b', \angle c'$ だけ回転したらまた P の方向を向きました。つまり、1 回転したわけです。1 回転は 360° ですよね。このことから、

$$\angle a' + \angle b' + \angle c' = 360^\circ$$

になります。このことは、三角形に限ったことではなく、どのような多角形でも 1 周すれば 1 回転することになるので、外角の和は 360° になります。

【例題 2 − 4】

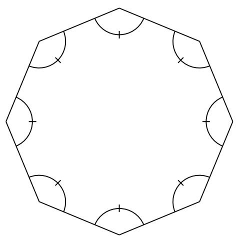
次の多角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

(1) 正八角形　　(2) 正十角形

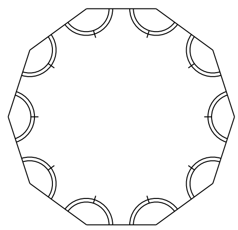
<解説>

正多角形の内角の大きさはすべて等しくなります。また、外角の大きさもすべて等しくなります。

(1) 正八角形



(2) 正十角形



(1) 正八角形の内角の和は

$$\begin{aligned}(\text{正八角形の内角の和}) &= 180^\circ \times (8-2)\\ &= 180^\circ \times 6 = 1080^\circ\end{aligned}$$

となります。正八角形は 8 個の内角があり、その内角の大きさはすべて等しいので、正八角形の 1 つの内角の大きさは

$$(\text{正八角形の 1 つの内角の大きさ}) = 1080^\circ \div 8 = 135^\circ$$

となります。

また、正八角形の外角の大きさもすべて等しく、その和は 360° であることから、

$$(\text{正八角形の 1 つの外角の大きさ}) = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

となります。そして、1 つの内角と外角の和は 180° であるので、

$$\begin{aligned}(\text{正八角形の 1 つの内角の大きさ}) &= 180^\circ - (\text{1 つの外角の大きさ})\\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

のようにして、内角の大きさを求めることもできます。

(2) 内角の和を利用して求めると

$$\begin{aligned}(\text{正十角形の内角の和}) &= 180^\circ \times (10-2)\\ &= 180^\circ \times 8 = 1440^\circ\end{aligned}$$

よって、1 つの内角の大きさは

$$(\text{正十角形の 1 つの内角の大きさ}) = 1440^\circ \div 10 = 144^\circ$$

となります。
また、外角を利用すると

$$(\text{正十角形の 1 つの外角の大きさ}) = 360^\circ \div 10 = 36^\circ$$

よって、1 つの内角の大きさは

$$(\text{正十角形の 1 つの内角の大きさ}) = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

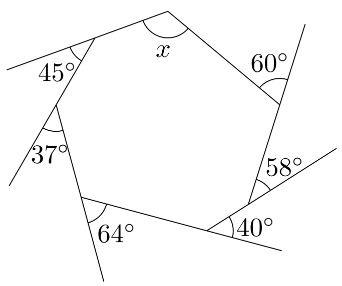
となります。

どちらの解き方で求めてもかまいませんが、外角を利用した方が、小さな数を扱うので計算は楽だと思います。どちらの解き方も理解して解いてみて、自分の解きやすい方法でしっかり解けるように練習しましょう。

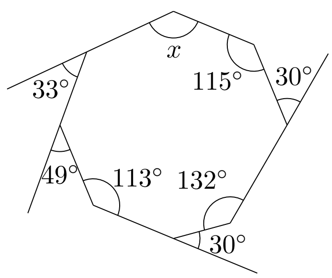
【演習 2 − 4】

次の図で、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

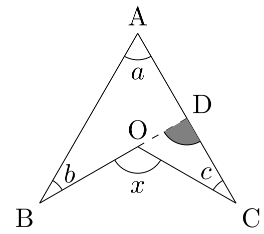
(1)



(2)



2.5　特別な多角形の内角の和



右の図のような図形（ここでは、「ブーメラン型」と呼ぶことにします。）において、$\angle x$ の大きさを考えます。

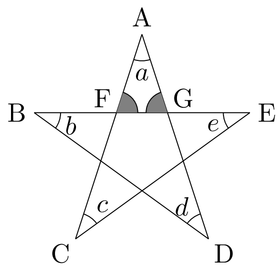
図のように、BO の延長と AC との交点を D とすると、△ABD において外角の定理を利用することで、

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle a + \angle b$$

さらに、△OCD において外角の定理を利用すると、

$$\angle x = \angle \mathrm{BDC} + \angle c = \angle a + \angle b + \angle c$$

という関係が導き出されます。



また、右の図のような図形（ここでは、「五芒星（ごぼうせい）型」と呼ぶことにします。）において、内角の和 $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$ について考えます。

図のように、AC, AD と BE との交点をそれぞれ F, G とします。△FCE, △BDG に着目して、それぞれ外角の定理を利用すると、

$$\angle \mathrm{AFG} = \angle c + \angle e, \qquad \angle \mathrm{FGA} = \angle b + \angle d$$

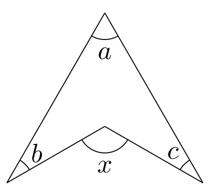
△AFG に着目すると、三角形の内角の和は 180° であるので、

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{AFG} + \angle \mathrm{FGA} &= 180^\circ \\ \angle a + (\angle c + \angle e) + (\angle b + \angle d) &= 180^\circ \\ \angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e &= 180^\circ \end{aligned}$$

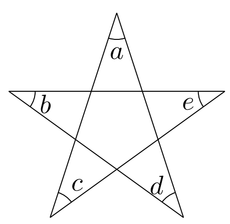
となります。

このような内角の大きさの関係は、角度を求める問題でしばしば利用されるので、公式として覚えておくようにしましょう。

(i) ブーメラン型：$\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$

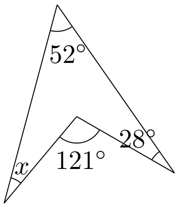


(ii) 五芒星型：$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$

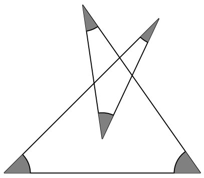


【例題２－５】

(1) $\angle x$ の大きさを求めなさい。



(2) 黒くぬった角度の和を求めなさい。



＜解説＞

(1) ブーメラン型なので、

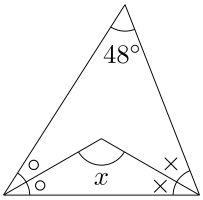
$$\begin{aligned} 52^\circ + \angle x + 28^\circ &= 121^\circ \\ \angle x + 80^\circ &= 121^\circ \\ \angle x &= 121^\circ - 80^\circ = 41^\circ \end{aligned}$$

(2) 見た目は少しわかりにくいかもしれませんが、これも五芒星型になります。そのため、黒くぬった角度の和は、

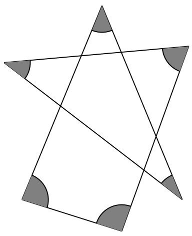
180°

【演習２－５】

(1) $\angle x$ の大きさを求めなさい。



(2) 黒くぬった角度の和を求めなさい。



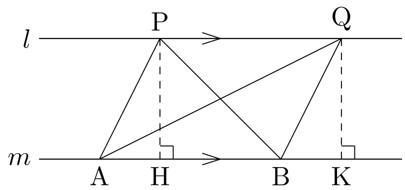
3　平行線と面積

3.1　平行線と面積

右の図のように、直線 l と直線 m があり、

$$l \mathbin{/\!/} m$$

であるとします。このとき、直線 l 上に 2 点 P, Q、直線 m 上に 2 点 A, B をとり、△PAB と △QAB を作ります。さらに、P, Q から直線 m に垂線を下ろし、直線 m との交点を H, K とすると、△PAB と △QAB の面積はそれぞれ、



$$\triangle \mathrm{PAB} = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{PH} \quad \cdots\cdots \text{①}$$
$$\triangle \mathrm{QAB} = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{QK} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

となります。また、$l \mathbin{/\!/} m$ であるので、2 つの三角形の高さは等しくなり、

$$\mathrm{PH} = \mathrm{QK} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

①〜③より、

$$\frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{PH} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{QK}$$

つまり、

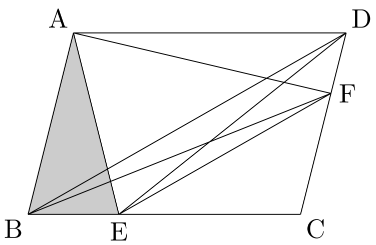
$$\triangle \mathrm{PAB} = \triangle \mathrm{QAB}$$

となることがわかります。

このように、PQ // AB ならば、△PAB と △QAB の底辺と高さが等しくなるので、2 つの三角形の面積も等しくなります。

【例題 3 − 1】

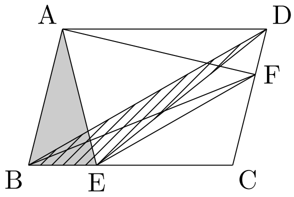
次の図で、AB // DC, AD // BC, EF // BD であるとき、△ABE と面積の等しい三角形を 3 つ答えなさい。



＜解説＞

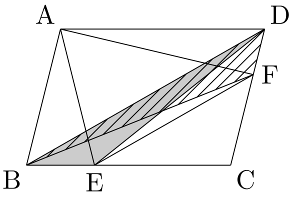
① AD // BC より、

$$\triangle ABE = \triangle DBE$$



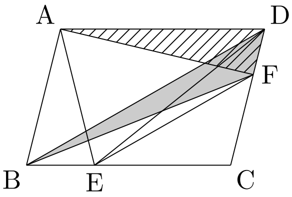
② EF // BD より、

$$\triangle DBE = \triangle DBF$$



③ AB // DC より、

$$\triangle DBF = \triangle DAF$$



①〜③より、

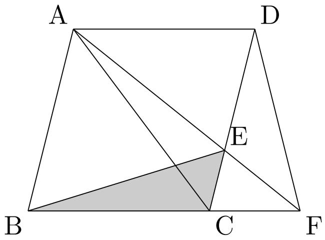
$$\triangle ABE = \triangle DBE = \triangle DBF = \triangle DAF$$

となるので、求める三角形は、

$\triangle DBE$,　$\triangle DBF$,　$\triangle DAF$

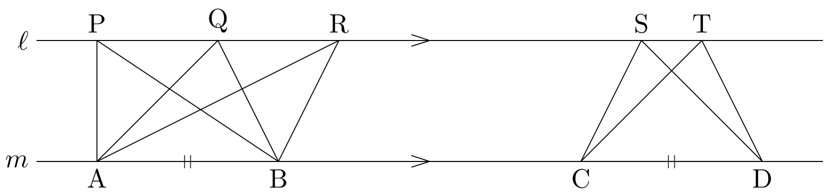
【演習 3 − 1】

次の図で、AB // DC, AD // BF であるとき、△BCE と面積の等しい三角形を 2 つ答えなさい。



3.2 等積変形

三角形の底辺が共通で（または、長さが等しく）、底辺にない残りの頂点が、底辺に平行な直線上を動く場合、底辺も高さも等しくなるので、三角形の面積が等しくなります。

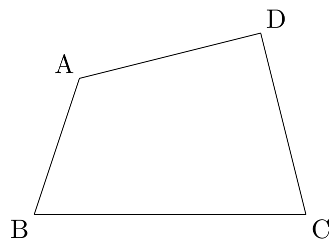


$$\triangle\mathrm{PAB} = \triangle\mathrm{QAB} = \triangle\mathrm{RAB} = \triangle\mathrm{SCD} = \triangle\mathrm{TCD}$$

このように、平行線を利用することで、ある図形を面積の等しい異なる図形に変形することができ、このような変形を**等積変形**といいます。

【例題 3 − 2】

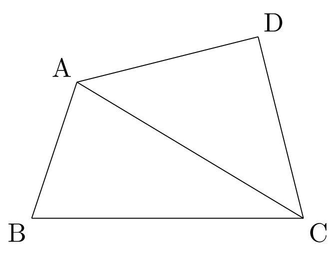
次の図の四角形 ABCD と面積の等しい三角形を作図しなさい。



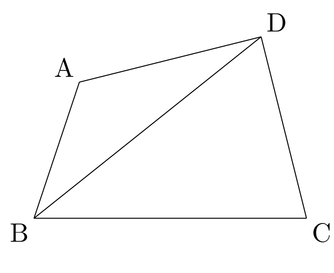
＜解説＞

平行線を利用した等積変形は三角形に利用できるので、まずは四角形を三角形に分割する必要があります。すると、

(i) 対角線 AC で分割



(ii) 対角線 BD で分割



という 2 通りの分割の仕方があり、さらに、それぞれの分割において、(i) の「対角線 AC で分割」する場合では

① △ABC ② △ACD

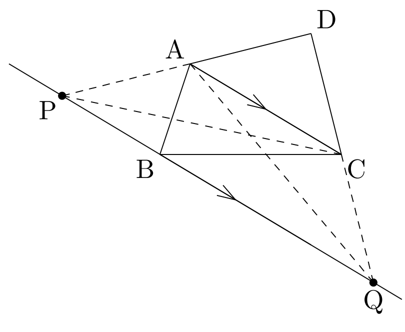
そして、(ii) の「対角線 BD で分割」する場合においても

① △ABD ② △DBC

という三角形を、それぞれ等積変形することができます。

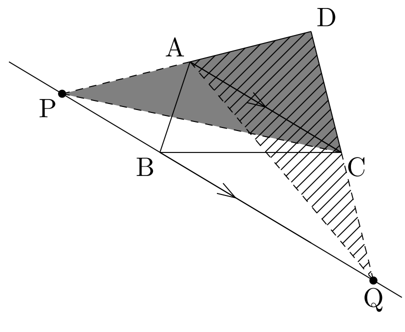
(i) ① △ABC を等積変形する場合

△ABC を等積変形するために、まずは、どの頂点を動かすかを考えます。頂点 A, C を動かすと、△ACD も変形してしまうことになってしまうので、動かせるのは頂点 B です。そこで、底辺を AC とし、頂点 B を通り、AC に平行な直線を引きます。頂点 B は AC と平行な直線上であれば、どこにあっても △ABC の面積は変わりません。そこで、四角形 ABCD を三角形に変形できるように頂点 B を動かすと、平行線と辺 AD の延長線との交点 P と、平行線と辺 DC の延長線との交点 Q が見つかります。このとき、



$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{APC} = \triangle\mathrm{AQC}$$

であるので、



$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} \\ &= \triangle\mathrm{APC} + \triangle\mathrm{ACD} = \triangle\mathrm{PCD}\end{aligned}$$

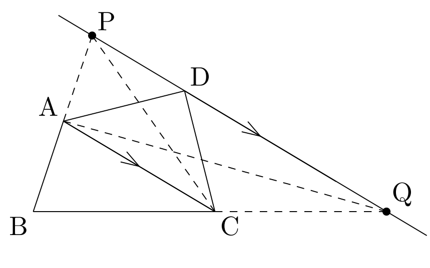
また、

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} \\ &= \triangle\mathrm{AQC} + \triangle\mathrm{ACD} = \triangle\mathrm{AQD}\end{aligned}$$

のようにして、四角形 ABCD を △PCD、または、△AQD へと等積変形することができます。

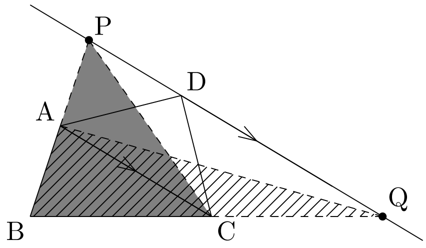
② △ACD を等積変形する場合

△ABC の等積変形と同じようにして考えます。まずは、頂点 D を通り、AC に平行な直線を引きます。頂点 D はこの平行線上であれば、△ACD の面積は変わらないので、四角形 ABCD を三角形に変形できるように、頂点 D を平行線上で動かします。すると、平行線と辺 AB の延長線との交点 P、平行線と辺 BC との交点 Q が見つかります。



$$\triangle\mathrm{ACD} = \triangle\mathrm{ACP} = \triangle\mathrm{ACQ}$$

であるので、



$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ACD}\\ &= \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ACP} = \triangle\text{PBC}\end{aligned}$$

また、

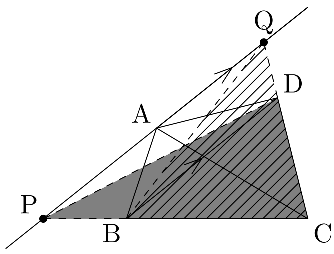
$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ACD}\\ &= \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ACQ} = \triangle\text{ABQ}\end{aligned}$$

のようにして、四角形 ABCD を △PBC、または、△ABQ へと等積変形することができます。

(ii) (i) と同じ手順でそれぞれ等積変形を行います。

① △ABD を等積変形する場合

右の図のように、頂点 A を通り、辺 BD に平行な直線と CB, CD の延長との交点をそれぞれ P, Q とすると、



$$\triangle\text{ABD} = \triangle\text{PBD} = \triangle\text{QBD}$$

このことから、

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBC}\\ &= \triangle\text{PBD} + \triangle\text{DBC} = \triangle\text{DPC}\end{aligned}$$

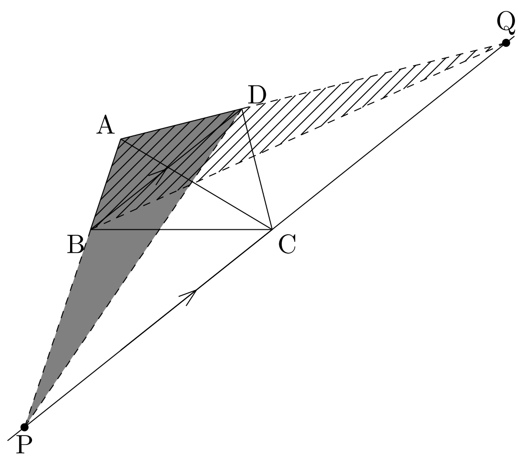
また、

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBC}\\ &= \triangle\text{QBD} + \triangle\text{DBC} = \triangle\text{QBC}\end{aligned}$$

のようにして、四角形 ABCD を △DPC、または、△QBC という三角形に等積変形することができます。

② △DBC を等積変形する場合

右の図のように、頂点 C を通り、辺 BD に平行な直線と AB, AD の延長との交点をそれぞれ P, Q とすると、



$$\triangle\text{DBC} = \triangle\text{DBP} = \triangle\text{DBQ}$$

このことから、

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBC}\\ &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBP} = \triangle\text{APD}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD} &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBC}\\ &= \triangle\text{ABD} + \triangle\text{DBQ} = \triangle\text{ABQ}\end{aligned}$$

のようにして、四角形 ABCD を △APD、または、△ABQ という三角形に等積変形することができます。

解説のように、複数の図形に等積変形できますが、どれか 1 つの三角形に等積変形できれば問題ありません。しかし、問題によっては、どの形が好ましいのか判断しなければいけない場合もあるので、それぞれの等積変形の仕方をしっかりと理解しておきましょう。