【中２数学】連立方程式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　連立方程式

1.1　2 元 1 次方程式

次のように、x, y のような 2 種類の文字を含む方程式を **2 元方程式**といいます。

（例）$x + y = 5, \qquad 2a + 3b = 4$

このとき、これらの式は 2 種類の文字を含み、1 次式である方程式であるので、**2 元 1 次方程式**といい、2 元 1 次方程式を成り立たせる文字の値の組を、その 2 元 1 次方程式の**解**といいます。
「$2x + 4 = 6$」のような文字が 1 種類だけの 1 次方程式では、

$$
\begin{aligned}
2x + 4 &= 6 \\
2x &= 6 - 4 = 2 \\
x &= \cancel{2}^{1} \times \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = 1
\end{aligned}
$$

のように方程式の解は 1 つだけでしたが、2 元 1 次方程式では、文字が 2 種類あることによって解が無数に存在することになります。

【例題 1 − 1】

2 元 1 次方程式 $x + y = 5$ を満たす x, y の組を下のような表にしなさい。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

＜解説＞

表には x の値が与えられていて、そのときの y の値が空欄になっています。そのため、それぞれの x の値のときの y の値を求めていくことになりますが、2 元 1 次方程式 $x + y = 5$ に x の値を代入して y の値を求めていくと計算が少し面倒になります。そこで、2 元 1 次方程式 $x + y = 5$ を y について解くと、

$$
\begin{aligned}
x + y &= 5 \\
y &= 5 - x
\end{aligned}
$$

と変形することができるので、この式に x の値を代入して y の値を求めていきます。

① $x = 1$ のとき
$y = 5 - 1 = 4$

② $x = 2$ のとき
$y = 5 - 2 = 3$

③ $x = 3$ のとき
$y = 5 - 3 = 2$

④ $x = 4$ のとき
$y = 5 - 4 = 1$

⑤ $x = 5$ のとき
$y = 5 - 5 = 0$

⑥ $x = 6$ のとき
$y = 5 - 6 = -1$

⑦ $x = 7$ のとき
$y = 5 - 7 = -2$

⑧ $x = 8$ のとき
$y = 5 - 8 = -3$

となるので、以上のことから 2 元 1 次方程式をみたす x, y の組は次のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

1.2　連立方程式とその解

次のように、2 つ（または、それ以上）の方程式を組み合わせたものを**連立方程式**といい、これから学習していくのは、この例のように、2 元 1 次方程式を 2 つ組み合わせた連立方程式（連立 2 元 1 次方程式）になります。

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$$

そして、連立方程式のどの方程式も成り立たせる文字の値の組を、その**連立方程式の解**といい、その解を求めることを**連立方程式を解く**といいます。

2 元 1 次方程式を成り立たせる文字の値の組は無数に存在しますが、2 つの 2 元 1 次方程式（連立 2 元 1 次方程式）のどちらも成り立たせる文字の値の組は 1 つに定まります。一般的に、方程式の解を求めるためには、方程式に含まれる文字の数だけ方程式が必要になります。

【例題 1 － 2】

次の連立方程式について、あとの問いに答えなさい。

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+5y=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1) 2 元 1 次方程式①をみたす x, y の値の組を次のような表にしなさい。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

(2) 2 元 1 次方程式②をみたす x, y の値の組も次のような表にしなさい。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y								

(3) 以上のことから、連立方程式の解を求めなさい。

＜解説＞

(1) 表には x の値が与えられていて、そのときの y の値が空欄になっています。そこで、$x+y=5$ を y について解くと、

$$\begin{aligned} x+y&=5 \\ y&=5-x \end{aligned}$$

と変形することができるので、この式に $x=1, 2, \cdots, 8$ を代入して y の値を求めていきます。

(i) $x=1$ のとき　(ii) $x=2$ のとき　(iii) $x=3$ のとき　(iv) $x=4$ のとき

$y=5-1=4$　$y=5-2=3$　$y=5-3=2$　$y=5-4=1$

(v) $x=5$ のとき

$y=5-5=0$

(vi) $x=6$ のとき

$y=5-6=-1$

(vii) $x=7$ のとき

$y=5-7=-2$

(viii) $x=8$ のとき

$y=5-8=-3$

以上のことから 2 元 1 次方程式をみたす x, y の組は次のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

(2) 表では x の値が与えられていて、y の値が空欄になっているので、代入して計算しやすいように、まずは 2 元 1 次方程式②を y について解きます。

$$
\begin{aligned}
2x+5y&=7\\
5y&=7-2x\\
y&=(7-2x)\times\frac{1}{5}=\frac{7-2x}{5}
\end{aligned}
$$

そして、この式に $x=1, 2, \cdots, 8$ を代入していくと、

(i) $x=1$ のとき

$$y=\frac{7-2\times1}{5}=\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1}}=1$$

(ii) $x=2$ のとき

$$y=\frac{7-2\times2}{5}=\frac{7-4}{5}=\frac{3}{5}$$

(iii) $x=3$ のとき

$$y=\frac{7-2\times3}{5}=\frac{7-6}{5}=\frac{1}{5}$$

(iv) $x=4$ のとき

$$y=\frac{7-2\times4}{5}=\frac{7-8}{5}=-\frac{1}{5}$$

(v) $x=5$ のとき

$$y=\frac{7-2\times5}{5}=\frac{7-10}{5}=-\frac{3}{5}$$

(vi) $x=6$ のとき

$$y=\frac{7-2\times6}{5}=\frac{7-12}{5}=-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1}}=-1$$

(vii) $x=7$ のとき

$$y=\frac{7-2\times7}{5}=\frac{7-14}{5}=-\frac{7}{5}$$

(viii) $x=8$ のとき

$$y=\frac{7-2\times8}{5}=\frac{7-16}{5}=-\frac{9}{5}$$

以上のことから 2 元 1 次方程式②をみたす x, y の組は次のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{9}{5}$

(3) (1), (2) の結果で得られた 2 つの表に共通な x, y の組を探すと、

$$x = 6, \quad y = -1$$

が見つかり、これがこの連立方程式の解ということになります。

連立方程式の解 $x = 6$, $y = -1$ は、次のように表すこともできます。

$$(x,\ y) = (6,\ -1), \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

1.3 代入法

それぞれの 2 元 1 次方程式をみたす x, y の値の組から共通のものを見つけることにより、連立方程式を解くことができましたが、この方法では解を見つけるまでに時間がかかってしまうし、x, y の値が整数でないようなものでは解を見つけることも困難です。

文字が 1 つであるような 1 次方程式では、等式の性質を利用して解くことができるので、2 元 1 次方程式を解くことが難しい原因は、「文字が 2 つ」あることだと推測できます。そこで、連立方程式を解くには、まず文字を 1 つ消去して、1 つの文字だけの方程式を作ることが鍵になります。

1 つの文字を消去する方法には、「代入法」と「加減法」の 2 つがありますが、ここでは、一方の方程式を 1 つの文字について解き、それを他方の方程式に代入して 1 つの文字を消去する**代入法**について学習します。

連立方程式を代入法で解く場合、基本的に次の手順により解を求めます。

(ｉ) 一方の方程式を 1 つの文字（x や y など）について解く。
　係数が 1（または、-1）である文字について解くと計算しやすくなります。
(ii) その式を他方の方程式に代入し、その方程式を解いて 1 つの文字の値を求める。
(iii) その値を (i) で求めた式に代入して、他の文字の値を求める。
(iv) 求めた解をもとの方程式に代入して、方程式が成り立つか確認する（**検算**）。

【例題 1 − 3】

次の連立方程式を代入法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} y = 9 - x & \cdots\cdots ① \\ 2x - 3y = -7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 　(2) $\begin{cases} x - 3y = 5 & \cdots\cdots ③ \\ 2x + y = 3 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

＜解説＞

(1) ①の式はすでに「$y =$」と y について解いてある式になっているので、この式を②に代入して計算します。

$$\begin{aligned} 2x - 3(9 - x) &= -7 \\ 2x - 27 + 3x &= -7 \\ 5x &= -7 + 27 = 20 \\ x &= 20 \times \frac{1}{5} = 4 \end{aligned}$$

このことから、$x = 4$ を①に代入すると、

$$y = 9 - 4 = 5$$

となるので、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (4,\ 5)$$

であることがわかります。そして、最後に元の方程式に求めた解を代入して方程式が成り立つかを確認してみます。ただし、これは答えが合っているかどうかを確かめる検算のために行うので、必ず行わなければいけないということではありません。

① $y = 9 - x$ に代入

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 5 \\
(\text{右辺}) &= 9 - 4 = 5
\end{aligned}
$$

② $2x - 3y = -7$ に代入

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2 \times 4 - 3 \times 5 \\
&= 8 - 15 = -7 \\
(\text{右辺}) &= -7
\end{aligned}
$$

(2) ③の x や④の y は係数が 1 であるので、そのどちらかの文字について解くと計算が楽です。そこで、ここでは ③ の式を x について解いてみます。

$$
\begin{aligned}
x - 3y &= 5 \\
x &= 3y + 5 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}'
\end{aligned}
$$

③$'$ を④に代入すると、

$$
\begin{aligned}
2(3y + 5) + y &= 3 \\
6y + 10 + y &= 3 \\
7y &= 3 - 10 = -7 \\
y &= -7 \times \frac{1}{7} = -1
\end{aligned}
$$

このことから、$y = -1$ を ③$'$ に代入すると、

$$
\begin{aligned}
x &= 3 \times (-1) + 5 \\
&= -3 + 5 = 2
\end{aligned}
$$

となるので、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (2,\ -1)$$

であることがわかります。最後に答えの確認をすると、

③ $x - 3y = 5$ に代入

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2 - 3 \times (-1) \\
&= 2 + 3 = 5 \\
(\text{右辺}) &= 5
\end{aligned}
$$

④ $2x + y = 3$ に代入

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2 \times 2 + (-1) \\
&= 4 - 1 = 3 \\
(\text{右辺}) &= 3
\end{aligned}
$$

と、どちらの方程式も左辺と右辺の値が一致するので、連立方程式の解は合っていることが確認できます。

【演習 1 − 3】

次の連立方程式を代入法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

1.4 加減法

1 つの文字を消去する方法の 1 つとして、与えられた方程式の両辺を何倍かするなどして、2 つの方程式を足したり引いたり（加法を使ったり減法を使ったり）することにより 1 つの文字を消去する**加減法**という方法があります。

連立方程式を加減法で解く場合、基本的に次のような手順で解を求めます。

(i) それぞれの方程式の両辺を何倍かするなどして、消去したい文字（x または y など）の係数の絶対値を等しくする。
(ii) 係数の絶対値が等しくなった 2 つの方程式を足したり引いたりして、1 つの文字を消去する。
(iii) そのことにより得られた方程式を解いて、1 つの文字の値を求める。
(iv) その値を適当な方程式に代入して、他の文字の値を求める。
(v) 求めた解をもとの方程式に代入して、方程式が成り立つか確認する（検算）。

【例題 1 − 4】

次の連立方程式を加減法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} x - 3y = 7 & \cdots\cdots ① \\ 2x + 3y = -4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 & \cdots\cdots ③ \\ x + y = 2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

＜解説＞

加減法を利用して 1 文字消去する場合、どの文字を消去するかはその文字の消去しやすさで選びます。消去しやすいかどうかの判断は、次のような基準で考えます。

(i) 係数の絶対値が等しい文字：足したり引いたりすることでその文字を消去できる
(ii) 係数が 1（または −1）である文字：簡単に係数を等しくすることができる

(1) ①, ②の y の係数はそれぞれ −3 と 3 と絶対値が等しいので、足すことで簡単に消去することができます。そこで、文字 y を消去するために ① + ② を計算して、

$$\begin{array}{rrcrcr} & x & - & 3y & = & 7 \\ +) & 2x & + & 3y & = & -4 \\ \hline & 3x & & & = & 3 \end{array}$$

このことから、

$$x = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$x = 1$ を①（または②）に代入すると、

$$\begin{aligned} 1 - 3y &= 7 \\ -3y &= 7 - 1 = 6 \\ y &= 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 3y &= -4 \\ 3y &= -4 - 2 = -6 \\ y &= -6 \times \frac{1}{3} = -2 \end{aligned}$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (1,\ -2)$$

(2) ③と④の係数で、絶対値が等しいものはありません。しかし、④の x と y の係数はそれぞれ 1 であるので、この式を何倍かして③の係数と等しくします。x と y のどちらの係数にそろえてもいいのですが、なるべく小さな数にしたほうが計算はしやすいので、ここでは x の係数をそろえるために④の式を 2 倍して③の式から引き (③ − ④ × 2)、x を消去します。

$$\begin{array}{rrcrcr} & 2x & + & 3y & = & 8 \\ -) & 2x & + & 2y & = & 4 \\ \hline & & & y & = & 4 \end{array}$$

これで y の値を求めることができたので、$y = 4$ を④に代入して x の値を求めます。

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2 \\ x &= 2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (-2,\ 4)$$

数学では、連立方程式のときに関わらず、**「複数の文字を含む場合には文字を減らす」**ことが鉄則です。たとえ簡単なことであっても、2 つのことを同時に行うことが難しいように、2 つの文字を同時に扱うことは非常に難しいからです。

連立方程式は、代入法と加減法のどちらで解いてもかまいませんが、一般的に、

$$\begin{cases} y = 9 - x \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

の「$y = 9 - x$」のように、「1 つの文字について解いてある形の式（または、その形にすぐに変形できる式）がある」場合には代入法、それ以外の場合には加減法で解くと解きやすいと思います。ただ、どちらの方法でも「文字を減らす」という数学の鉄則によって解くことができるのだということを、しっかりと頭に入れておいてください。

【演習 1 − 4】

次の連立方程式を加減法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

2　いろいろな連立方程式

2.1　かっこを含む連立方程式

かっこがあるような方程式では、かっこのついたままでは移項ができないため、まずはかっこをはずす必要があります。そのため、かっこがある連立方程式の解法手順は次のようになります。

(ｉ) かっこをはずす。
(ii) 代入法・加減法を用いて連立方程式を解く。
(iii) 求めた解をもとの方程式に代入して、方程式が成り立つか確認する（検算)。

【例題２－１】

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2(x+4y)-3y=-7 & \cdots\cdots ① \\ x-4(y+3)=4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2(x+1)-y=3 & \cdots\cdots ③ \\ 3(x+y)-2y=9 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

＜解説＞

(1) まずは、①, ②の式のかっこをはずして整理します。

① $2(x+4y)-3y=-7$

$$2x+8y-3y=-7$$
$$2x+5y=-7 \quad \cdots\cdots ①'$$

② $x-4(y+3)=4$

$$x-4y-12=4$$
$$x-4y=4+12$$
$$x-4y=16 \quad \cdots\cdots ②'$$

このことから、

$$\begin{cases} 2x+5y=-7 & \cdots\cdots ①' \\ x-4y=16 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

という連立方程式を解けばよいことになります。代入法と加減法のどちらで解いてもかまいませんが、②′の式は、

$$x-4y=16$$
$$x=4y+16 \quad \cdots\cdots ②''$$

のように簡単に x について解くことができるので、ここでは代入法を利用して解いていきます。そこで、②″ を ①′ に代入して、

$$2(4y+16)+5y=-7$$
$$8y+32+5y=-7$$
$$13y=-7-32=-39$$
$$y=-\cancel{39}^{3}\times\frac{1}{\cancel{13}_{1}}=-3$$

このことから、$x=-3$ を ②″ に代入すると、

$$x=4\times(-3)+16=4$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (4,\ -3)$$

(2) かっこをはずして整理します。

③ $2(x+1) - y = 3$

$$2x + 2 - y = 3$$
$$2x - y = 3 - 2$$
$$2x - y = 1 \quad \cdots\cdots\ ③'$$

④ $3(x+y) - 2y = 9$

$$3x + 3y - 2y = 9$$
$$3x + y = 9 \quad \cdots\cdots\ ④'$$

このことから、

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \cdots\cdots\ ③' \\ 3x + y = 9 & \cdots\cdots\ ④' \end{cases}$$

という連立方程式を加減法を利用して解いていきます。y を消去するために ③$'$ + ④$'$ を計算すると、

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x & - \ y & = & 1 \\ +) & 3x & + \ y & = & 9 \\ \hline & 5x & & = & 10 \end{array}$$

となるので、

$$x = 10 \times \frac{1}{5} = 2$$

このことから、$x = 2$ を ④$'$ に代入して、

$$3 \times 2 + y = 9$$
$$y = 9 - 6 = 3$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (2,\ 3)$$

【演習 2 − 1】

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2(x+2y) = 3y + 5 \\ 5(x-y) = x + 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2(x-2y) = 4 - 3y \\ 3(x+y) + 1 = y \end{cases}$

2.2 小数や分数を含む連立方程式

方程式を解くとき、係数に小数や分数があると計算しにくくなります。小数や分数を含んでいるような方程式でも気にならない人は別にいいのですが、嫌だと感じる人は、小数や分数を含まない形に方程式を変形すると計算が楽になります。そのため、係数に小数や分数がある連立方程式を解く手順は次のようになります。

(ｉ) 方程式の両辺を何倍かして、小数や分数を含まないような形にする。
(ii) 代入法・加減法を用いて連立方程式を解く。
(iii) 求めた解をもとの方程式に代入して、等式が成り立つか確認する。

【例題 2 − 2】

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 0.4x - 3y = 2 & \cdots\cdots ① \\ 0.5x + y = 12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 & \cdots\cdots ③ \\ 5x + 4y = 1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

＜解説＞

小数や分数を含まない形にできれば、方程式の両辺を何倍してもかまいませんが、あまり大きな数を掛けてしまうと、計算が面倒になってしまいます。そのため、なるべく小さな数を掛けて、小数や分数を含まない形にします。

(1) ①の式の両辺を 5 倍、②の式の両辺を 2 倍して小数を含まない形にします。

① $(0.4x - 3y) \times 5 = 2 \times 5$

$$2x - 15y = 10 \quad \cdots\cdots ①'$$

② $(0.5x + y) \times 2 = 12 \times 2$

$$x + 2y = 24 \quad \cdots\cdots ②'$$

もともとは係数に小数を含む連立方程式でしたが、係数に小数を含まない連立方程式として解くことができます。

$$\begin{cases} 2x - 15y = 10 & \cdots\cdots ①' \\ x + 2y = 24 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

②$'$ を x について解くと、

$$\begin{aligned} x + 2y &= 24 \\ x &= -2y + 24 \quad \cdots\cdots ②'' \end{aligned}$$

となるので、②$''$ を ①$'$ に代入して、

$$\begin{aligned} 2(-2y + 24) - 15y &= 10 \\ -4y + 48 - 15y &= 10 \\ -19y &= 10 - 48 = -38 \\ y &= -\cancel{38}^{\,2} \times \left(-\frac{1}{\cancel{19}^{\,1}}\right) = 2 \end{aligned}$$

この $y = 2$ を ②$''$ に代入して、

$$x = -2 \times 2 + 24 = 20$$

となるので、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (20,\ 2)$$

(2) ③の係数の分母を払うために、分母 3 と 2 の最小公倍数である 6 を両辺に掛けます。

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) \times 6 = 1 \times 6$$
$$\frac{x}{\cancel{3}^{1}} \times \cancel{6}^{2} + \frac{y}{\cancel{2}^{1}} \times \cancel{6}^{3} = 6$$
$$2x + 3y = 6 \quad \cdots\cdots\ ③'$$

もともとは方程式③と④の連立方程式でしたが、③の方程式の分母を払うことで ③′ の方程式に変形したので、次のように ③′ と④の連立方程式であるとして解いてきます。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 & \cdots\cdots\ ③' \\ 5x + 4y = 1 & \cdots\cdots\ ④ \end{cases}$$

このとき、それぞれの方程式を x や y について解くと、分数を含む方程式になってしまうので、代入法は適しません。そのため加減法を用いて連立方程式を解いていきます。x と y のどちらの文字を消去してもそれほど手間は変わらないので、ここでは y を消去するために、③′ の両辺を 4 倍、④式の両辺を 3 倍して、y の係数の絶対値をそろえて引きます（④ $\times 3 -$ ③′ $\times 4$)。

$$\begin{array}{rrcrcr} & 15x & + & 12y & = & 3 \\ -) & 8x & + & 12y & = & 24 \\ \hline & 7x & & & = & -21 \end{array}$$

このことから、

$$x = -\cancel{21}^{3} \times \frac{1}{\cancel{7}^{1}} = -3$$

となるので、$x = -3$ を④に代入して、

$$2 \times (-3) + 3y = 6$$
$$3y = 6 + 6 = 12$$
$$y = \cancel{12}^{4} \times \frac{1}{\cancel{3}} = 4$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (-3,\ 4)$$

【演習 2 − 2】

次の連立方程式を解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2x - \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y}{3} + 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3.5x - 1.25y = 3 \\ 3x + 4.5y = 36 \end{cases}$

2.3 $A = B = C$

$A = B = C$ という方程式は、A と B と C が等しいことを表しています。そのため、この方程式から、

$$A = B, \qquad A = C, \qquad B = C$$

という 3 つの方程式を作ることができ、これらの方程式のうち 2 つを組み合わせると、次のように残りの 1 つの方程式を導くことができます。

(i) $\begin{cases} A = B \\ A = C \end{cases} \longrightarrow B = C$ (ii) $\begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases} \longrightarrow A = C$ (iii) $\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \longrightarrow A = B$

このことから、$A = B = C$ という形の連立方程式と上の 3 つの連立方程式は、同じものを表していることになります。そのため、$A = B = C$ という形の連立 2 元 1 次方程式は、$A = B$, $A = C$, $B = C$ という 3 つの方程式から 2 つを組み合わせる（上の 3 つの連立方程式のいずれかを用いる）ことで解くことができます。

【例題 2 − 3】

次の方程式を解きなさい。

$$5x - 7y = 2x - 3y + 2 = -3x + 4y + 9$$

＜解説＞

与えられた方程式から、次の 3 つの 2 元 1 次方程式を作ることができます。

(i) $5x - 7y = 2x - 3y + 2$ (ii) $5x - 7y = -3x + 4y + 9$ (iii) $2x - 3y + 2 = -3x + 4y + 9$

$3x - 4y = 2$ $\qquad$ $8x - 11y = 9$ $\qquad$ $5x - 7y = 7$

この 3 つの中から 2 つを組み合わせますが、なるべく簡単に解くことができそうな 2 つを選びます。ここでは、(i) と (iii) を組み合わせて、次の連立方程式を解いていきます。

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 & \cdots\cdots ① \\ 5x - 7y = 7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

加減法を利用して x を消去するために、① × 5 − ② × 3 を計算して、

$$\begin{array}{rrcrcr} & 15x & - & 20y & = & 10 \\ -) & 15x & - & 21y & = & 21 \\ \hline & & & y & = & -11 \end{array}$$

$y = -11$ を①に代入して、

$$\begin{aligned} 3x - 4 \times (-11) &= 2 \\ 3x &= 2 - 44 = -42 \\ x &= -42 \times \frac{1}{3} = -14 \end{aligned}$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (-14,\ -11)$$

【演習 2 − 3】

次の方程式を解きなさい。

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x-y+6}{4} = \frac{x+y-7}{5}$$

2.4　置き換えによる連立方程式

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1$ のように分母に $x,\,y$ などの文字を持つ方程式は、分数でなくす（分母を払う）ために xy を両辺に掛けると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\times xy&=1\times xy\\ 2y+3x&=xy\\ xy-3x-2y&=0\end{aligned}$$

となり、xy は文字を 2 つ含む 2 次の項なので 1 次方程式ではありません。そのため分母に $x,\,y$ などの文字を持つ連立方程式は、今までの連立方程式の解法で解くことができません。しかし、

$$\frac{1}{x}=X,\qquad \frac{1}{y}=Y$$

と文字を置き換えると、

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1\longrightarrow 2X+3Y=1$$

のようにして、X と Y についての 2 元 1 次方程式になるので、今までの連立方程式の解法（加減法や代入法）で解く（$X,\,Y$ の値を求める）ことができます。このとき、$X,\,Y$ はそれぞれ $x,\,y$ の逆数なので、$X,\,Y$ の逆数が $x,\,y$ になります。

【例題 2 − 4】

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=4\\[4pt] \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=6\end{cases}$$

<解説>

$\dfrac{1}{x}=X,\ \dfrac{1}{y}=Y$ とすると、与えられた連立方程式は次のように表すことができます。

$$\begin{cases}3X-Y=4 & \cdots\cdots\ ①\\ X+2Y=6 & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

②を X について解くと、

$$\begin{aligned}X+2Y&=6\\ X&=-2Y+6\quad\cdots\cdots\ ②'\end{aligned}$$

となるので、②′ を①に代入して、

$$\begin{aligned}3(-2Y+6)-Y&=4\\ -6Y+18-Y&=4\\ -7Y&=4-18=-14\\ Y&=-14\times\left(-\frac{1}{7}\right)=2\end{aligned}$$

$Y=2$ を ②$'$ に代入して、

$$X=-2\times 2+6=2$$

よって、

$$(X,\ Y)=(2,\ 2)$$

となります。x, y は X, Y の逆数なので、連立方程式の解は、

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

【演習 2 − 4】

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+y=-1 \\ \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{y}{2}=4 \end{cases}$$

2.5 連立 3 元 1 次方程式

$x+2y+3z=1$ のように、3 種類の文字を含む 1 次式である方程式を **3 元 1 次方程式**といいます。

3 元 1 次方程式のように 3 つの文字を含む方程式では、解を求めるためには 3 つの方程式が必要になります。そこで、3 つの 3 元 1 次方程式を組み合わせた連立 3 元 1 次方程式で解を求めることになりますが、**「複数の文字を含む場合には文字を減らす」**ことが鉄則なので、次のようにして連立方程式を解いていきます。

(i) 加減法、代入法を利用して 1 文字消去し、連立 2 元 1 次方程式を作る。
(ii) さらに加減法、代入法を利用して連立 2 元 1 次方程式の解を求める。
(iii) 連立 2 元 1 次方程式で求めた解をいずれかの 3 元 1 次方程式に代入して、残りの文字の値を求める。
(iv) 検算する。

【例題 2 − 5】

次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} 4x+3y+2z=4 & \cdots\cdots\ ① \\ 2x-y-2z=2 & \cdots\cdots\ ② \\ x+5y+6z=3 & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

<解説>

まずは、x, y, z のいずれかの文字を消去しますが、①と②の z の係数の絶対値が等しいので、ここでは z を消去していきます。

(i) ① + ② より、

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 4x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ +) & 2x & - & y & - & 2z & = & 2 \\ \hline & 6x & + & 2y & & & = & 6 \end{array}$$

(ii) ② × 3 + ③ より、

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 6x & - & 3y & - & 6z & = & 6 \\ +) & x & + & 5y & + & 6z & = & 3 \\ \hline & 7x & + & 2y & & & = & 9 \end{array}$$

このことから、次の連立 2 元 1 次方程式を解いていきます。

$$\begin{cases} 6x+2y=6 & \cdots\cdots\ ④ \\ 7x+2y=9 & \cdots\cdots\ ⑤ \end{cases}$$

④, ⑤の y の係数が等しいので、y を消去するために、⑤ − ④ を計算します。

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7x & + & 2y & = & 9 \\ -) & 6x & + & 2y & = & 6 \\ \hline & x & & & = & 3 \end{array}$$

このことから、$x=3$ を④に代入して、

$$\begin{aligned} 6\times 3+2y&=6 \\ 2y&=6-18=-12 \\ y&=-12\times\frac{1}{2}=-6 \end{aligned}$$

最後に、$x = 3,\ y = -6$ を①に代入して、

$$
\begin{aligned}
4 \times 3 + 3 \times (-6) + 2z &= 4 \\
2z &= 4 + 6 = 10 \\
z &= 10 \times \frac{1}{2} = 5
\end{aligned}
$$

以上のことから、連立方程式の解は、

$$(x,\ y,\ z) = (3,\ -6,\ 5)$$

【演習 2 − 5】

次の連立方程式を解きなさい。

$$
\begin{cases}
3x - 2y + 4z = 19 \\
5x + y - z = 0 \\
x + 5y + 4z = 3
\end{cases}
$$

2.6　未定係数の決定（解）

方程式の解は「方程式を成り立たせる文字の値」であるので、その値を方程式に代入すると成り立ちます。

このことから、$x,\ y$ についての方程式で $x,\ y$ 以外の文字（未定係数）が含まれているとき、方程式の解が得られれば、その値を方程式に代入することで、残った文字について方程式を作ることができます。そして、その方程式を解くことで残った文字（未定係数）の値を求めることができます。

【例題 2 − 6】

連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 9 \\ 2bx - ay = -6 \end{cases}$ の解が $x = 1,\ y = 2$ であるとき、$a,\ b$ の値を求めなさい。

＜解説＞

$x = 1,\ y = 2$ が連立方程式の解であるので、連立方程式に代入すると、

$$\begin{cases} a + 2b = 9 & \cdots\cdots\ ① \\ -2a + 2b = -6 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

文字 b を消去するために、① − ② を計算して、

$$\begin{array}{rrcrcr} & a & + & 2b & = & 9 \\ -) & -2a & + & 2b & = & -\ 6 \\ \hline & 3a & & & = & 15 \end{array}$$

よって、

$$a = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

$a = 5$ を①に代入して、

$$\begin{aligned} 5 + 2b &= 9 \\ 2b &= 9 - 5 = 4 \\ b &= 4 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

以上のことから、

$$(a,\ b) = (5,\ 2)$$

【演習 2 − 6】

連立方程式 $\begin{cases} ax - by - 4 = 0 \\ bx - ay - 5 = 0 \end{cases}$ の解が $x = 2,\ y = -1$ であるとき、$a,\ b$ の値を求めなさい。

2.7　未定係数の決定（2 組の連立方程式）

次のように 2 組の連立方程式があるとします。

$$\begin{cases} \text{方程式①} \\ \text{方程式②} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{方程式③} \\ \text{方程式④} \end{cases}$$

連立方程式の解は、どの方程式も成り立たせる文字の値であるので、上の連立方程式では、

方程式①と②の解,　　方程式③と④の解

はそれぞれ、

方程式①と②を同時に成り立たせる文字の値,　　方程式③と④を同時に成り立たせる文字の値

ということになります。この 2 組の連立方程式の解が一致するとき、その解は 4 つの方程式すべてを成り立たせる文字の値なります。そのため、その解を求めるためには、次のように連立方程式をどのようにでも組み合わせることができます。

$$\begin{cases} \text{方程式①} \\ \text{方程式②} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{方程式①} \\ \text{方程式③} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{方程式①} \\ \text{方程式④} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{方程式②} \\ \text{方程式③} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{方程式②} \\ \text{方程式④} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{方程式③} \\ \text{方程式④} \end{cases}$$

【例題 2 − 7】

次の (i), (ii) の連立方程式は同じ解をもつといいます。a, b の値を求めなさい。

(i) $\begin{cases} 3x + 7y = 8 & \cdots\cdots\ ① \\ ax - by = 7 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$　　(ii) $\begin{cases} 5x - 4y = 29 & \cdots\cdots\ ③ \\ bx + ay = -17 & \cdots\cdots\ ④ \end{cases}$

＜解説＞

方程式①〜④はすべて同じ解を持つので、その解を①と③を連立させることで求めていきます。

$$\begin{cases} 3x + 7y = 8 & \cdots\cdots\ ① \\ 5x - 4y = 29 & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

x を消去するために、① × 5 + ③ × 3 を計算して、

$$\begin{array}{rrrrr} & 15x & + 35y & = & 40 \\ -) & 15x & - 12y & = & 87 \\ \hline & & 47y & = & -47 \end{array}$$

よって、

$$y = -47 \times \frac{1}{47} = -1$$

$y = -1$ を①に代入して、

$$\begin{aligned} 3x + 7 \times (-1) &= 8 \\ 3x &= 8 + 7 = 15 \\ x &= 15 \times \frac{1}{3} = 5 \end{aligned}$$

以上のことから、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (5,\ -1)$$

であることがわかります。そこで、②, ④に $x = 5,\, y = -1$ を代入すると、

$$\begin{cases} 5a + b = 7 & \cdots\cdots\ ②' \\ -a + 5b = -17 & \cdots\cdots\ ④' \end{cases}$$

②′ より、

$$b = -5a + 7 \quad \cdots\cdots\ ②''$$

とできるので、これを ④′ に代入して、

$$\begin{aligned} -a + 5(-5a + 7) &= -17 \\ -a - 25a + 35 &= -17 \\ -26a &= -17 - 35 = -52 \\ a &= -52 \times \left(-\frac{1}{26}\right) = 2 \end{aligned}$$

これを ②″ に代入して、

$$b = -5 \times 2 + 7 = -3$$

よって、

$$(a,\ b) = (2,\ -3)$$

【演習 2 − 7】

次の (i), (ii) の連立方程式は同じ解をもつといいます。a, b の値を求めなさい。

(i) $\begin{cases} ax - 2by = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$　　(ii) $\begin{cases} 3ax - 5by = 9 \\ -3x + y = -11 \end{cases}$

3　連立方程式の利用

連立方程式の解法を学習したので、方程式に 2 つの文字が含まれていても解くことができます。そこでここでは、2 つの文字を利用して解く文章問題について学習します。

文章問題を解く基本的な手順は、次の通りです。

(i) 適当な数量（求めたいもの）を適当な文字（x, y など）で表す。
(ii) その文字を使って連立方程式を立てる。
(iii) その連立方程式を解いて、解を求める。
(iv) その解が問題の条件に適するかどうかを検討する。

3.1　整数に関する問題

【例題 3 − 1】

2 けたの自然数があります。その数の 2 倍は、十の位の数と一の位の数の和の 5 倍に等しい。また、十の位の数字と一の位の数字を入れかえると、もとの数より 36 大きくなるといいます。もとの自然数を求めなさい。

＜解説＞

「求めたいもの」は「もとの自然数」、つまり、「2 けたの自然数」であるので、それを文字で表すことを考えますが、この「2 けたの自然数」を直接 x などの文字で表してしまうと、「十の位の数と一の位の数の和」を式で表すことができなくなってしまいます。そこで、「2 けたの自然数」を、十の位と一の位に分割して、それぞれを文字 x と y で表すことにします。ただし、十の位が「5」で一の位が「4」であるような数は、「54」と表しますが、同じようにして、十の位が「x」で一の位が「y」であるような数を、「xy」と表すことはできません。なぜなら、「xy」という数を文字式では次のような意味になるからです。

$$xy = x \times y$$

「54」という数は、「10 が 5 個、1 が 4 個集まった数」と考えることができます。そのことから、十の位が「x」で一の位が「y」であるような数も、「10 が x 個、1 が y 個集まった数」と考えることができるので、それぞれ右のように表すことができます。

十の位	一の位		
5	4	$\longrightarrow$	$10 \times 5 + 1 \times 4$
x	y	$\longrightarrow$	$10 \times x + 1 \times y$

このことを利用して、「その数（2 けたの自然数）の 2 倍は、十の位の数と一の位の数の和の 5 倍に等しい。」という条件から、

$$2(10x + y) = 5(x + y)$$

という方程式を作ることができます。さらに、「十の位の数字と一の位の数字を入れかえると、もとの数より 36 大きくなる」という条件から

$$10y + x = 10x + y + 36$$

という方程式を作ることができ、x と y はどちらの条件も満足するようなものであるはずです。つまり、

$$\begin{cases} 2(10x+y)=5(x+y) & \cdots\cdots ① \\ 10y+x=10x+y+36 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

という連立方程式を作ることができます。

次に連立方程式を解いていきますが、加減法や代入法を利用する前に、まずは同類項をまとめて式を簡単にします。

①
$$\begin{aligned} 2(10x+y)&=5(x+y) \\ 20x+2y&=5x+5y \\ 20x-5x+2y-5y&=0 \\ 15x-3y&=0 \\ 5x-y&=0 \\ y&=5x \quad \cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 10y+x&=10x+y+36 \\ x-10x+10y-y&=36 \\ -9x+9y&=36 \\ x-y&=-4 \quad \cdots\cdots ②' \end{aligned}$$

このことから、次の連立方程式を解けばよいことになります。

$$\begin{cases} y=5x & \cdots\cdots ①' \\ x-y=-4 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

①′ を ②′ に代入して、

$$\begin{aligned} x-5x&=-4 \\ -4x&=-4 \\ x&=-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=1 \end{aligned}$$

$x=1$ を ①′ に代入して、

$$y=5\times1=5$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y)=(1,\ 5)$$

となるので、求める 2 けたの自然数は、

15

3.2 個数・代金に関する問題

【例題 3 − 2】

1 枚 50 円のはがきと 1 枚 70 円の切手を買って、合わせて 1170 円の代金を支払いました。買ったはがきの枚数は、切手の枚数の 2 倍より 3 枚多いとき、買ったはがきの枚数を x 枚、切手の枚数を y 枚として連立方程式をつくり、はがきと切手のそれぞれの枚数を求めなさい。

＜解説＞

買ったはがきの枚数を x 枚、黄っての枚数を y 枚とするとき、「1 枚 50 円のはがきと 1 枚 70 円の切手を買って、合わせて 1170 円の代金を支払う」ので、

$$50x + 70y = 1170$$

という関係が成り立ちます。また、買ったはがきの枚数は、切手の枚数の 2 倍より 3 枚多いので、

$$x = 2y + 3$$

という関係が成り立ちます。このことから、次の連立方程式を立てることができます。

$$\begin{cases} 50x + 70y = 1170 & \cdots\cdots\ ① \\ x = 2y + 3 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

この連立方程式を解くために、②を①に代入して計算してもいいのですが、①のすべての項は 10 で割ることができるので、

$$\begin{aligned} (50x + 70y) \times \frac{1}{10} &= \cancel{1170}^{117} \times \frac{1}{\cancel{10}^{1}} \\ 5x + 7y &= 117 \quad \cdots\cdots\ ①' \end{aligned}$$

とすれば数が小さくなり、計算しやすくなります。そこで、② を ①′ に代入して、

$$\begin{aligned} 5(2y + 3) + 7y &= 117 \\ 10y + 15 + 7y &= 117 \\ 17y &= 117 - 15 = 102 \\ y &= \cancel{102}^{6} \times \frac{1}{\cancel{17}^{1}} = 6 \end{aligned}$$

$y = 6$ を②に代入して、

$$x = 2 \times 6 + 3 = 15$$

よって、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (15,\ 6)$$

となるので、求めるはがきと切手の枚数は、

はがきの枚数：15 枚　　切手の枚数：6 枚

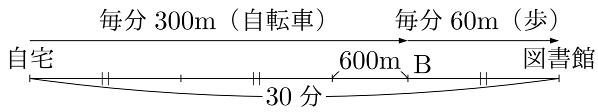
3.3 速さに関する問題

【例題 3 − 3】

A 君は図書館へ本を返しに行くのに、自宅から自転車で毎分 300 mの速さで行きましたが、B 地点で自転車が故障したため、B 地点からは毎分 60 mの速さで歩いて図書館へ行ったところ、自宅を出発してから図書館へ到着するまで 30 分かかりました。
自宅から B 地点までの道のりは、B 地点から図書館までの道のりの 2 倍より 600 m長いとき、B 地点から図書館までの道のりは何 m か求めなさい。

＜解説＞

問題文の内容を正しく理解するために、図をかいて整理すると右図のようになります。このとき、問題文に与えられている情報は、すべて図の中にかき入れるようにします。



図書館までの道のりを求めるので、

自宅から B 地点までの道のり : x (m)　　B 地点から図書館までの道のり : y (m)

とします。

「自宅を出発してから図書館へ到着するまで 30 分かかりました」ということから、時間に関する条件が与えられています。自宅から B 地点までの x m は、自転車で毎分 300 mの速さで行くので、そのときにかかる時間は、

$$(\text{自宅から B 地点まで行くのにかかる時間}) = x \div 300 = \frac{x}{300}\ (\text{分})$$

また、B 地点から図書館までの y m は、毎分 60 mの速さで歩いたので、そのときにかかる時間は、

$$(\text{B 地点から図書館まで行くのにかかる時間}) = y \div 60 = \frac{y}{60}\ (\text{分})$$

となるので、このことから、

$$\frac{x}{300} + \frac{y}{60} = 30$$

という方程式を作ることができます。

また、「自宅から B 地点までの道のり x m は、B 地点から図書館までの道のり y m の 2 倍より 600 m長い」ことから、

$$x = 2y + 600$$

という方程式を作ることができるので、次のような連立方程式を考えることができます。

$$\begin{cases} \dfrac{x}{300} + \dfrac{y}{60} = 30 & \cdots\cdots ① \\ x = 2y + 600 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①の方程式は分数を含んでいるので、分母を払うために分母「300」と「60」の最小公倍数である「300」を両辺に掛けると、

$$\left(\frac{x}{300}+\frac{y}{60}\right)\times 300 = 30\times 300$$
$$\frac{x}{\cancel{300}^{\,1}}\times \cancel{300}^{\,1}+\frac{y}{\cancel{60}^{\,1}}\times \cancel{300}^{\,5} = 9000$$
$$x+5y = 9000 \quad \cdots\cdots\ ①'$$

①′ に②を代入すると、

$$(2y+600)+5y = 9000$$
$$7y = 9000-600 = 8400$$
$$y = \cancel{8400}^{\,1200}\times\frac{1}{\cancel{7}^{\,1}} = 1200$$

$y=1200$ を②に代入して、

$$x = 2\times 1200+600 = 3000$$

このことから、連立方程式の解は、

$$(x,\ y) = (3000,\ 1200)$$

となるので、B 地点から図書館までの道のりは、

B 地点から図書館までの道のり：1200 m

3.4 割合に関する問題

【例題 3 − 4】

ある中学校の今年度の生徒数は 466 人で、昨年度の生徒数より 4 人減少しています。これを男女別に調べてみると、昨年度より男子の生徒数は 6 ％減少し、女子の生徒数は 5 ％増加していることがわかりました。
このことから昨年度の男子、女子の生徒数を求めなさい。

＜解説＞

求める昨年度の男子、女子の生徒数をそれぞれ、x 人、y 人とすると、問題文の条件から右のような表を作ることができます。

	男子（人）	女子（人）	合計（人）
昨年度	x	y	470
今年度	$\frac{94}{100}x$	$\frac{105}{100}y$	466

「今年度の生徒数は 466 人で、昨年度の生徒数より 4 人減少」していることから、「昨年度の生徒数は、今年度の生徒数より 4 人多い」ことがわかるので、

$$\begin{aligned}(\text{昨年度の生徒数}) &= (\text{今年度の生徒数}) + 4\\ &= 466 + 4 = 470\ (\text{人})\end{aligned}$$

そして、「昨年度より男子の生徒数は 6 ％減少」していることから、「昨年度の男子の生徒数 x 人の $\frac{6}{100}$ 倍減少」することになるので、このことを文字式を利用して、

$$(\text{今年度の男子の生徒数}) = x - x \times \frac{6}{100} = \frac{94}{100}x\ (\text{人})$$

と表すことができ、同じようにして、「昨年度より女子の生徒数は 5 ％増加」していることから、「昨年度の女子の生徒数 y 人の $\frac{5}{100}$ 倍増加」することになるので、このことを文字式を利用して、

$$(\text{今年度の女子の生徒数}) = y + y \times \frac{5}{100} = \frac{105}{100}y\ (\text{人})$$

と表すことができます。

表のようすから、昨年度と今年度の生徒数の関係を式に表せば、次のような連立方程式を作ることができます。

$$\begin{cases} x + y = 470 & \cdots\cdots ① \\ \frac{94}{100}x + \frac{105}{100}y = 466 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②の式は係数に分数がある方程式なので、100 を掛けて分母を払います。

$$\begin{aligned}\left(\frac{94}{100}x + \frac{105}{100}y\right) \times 100 &= 466 \times 100\\ \frac{94}{\cancel{100}^{1}}x \times \cancel{100}^{1} + \frac{105}{\cancel{100}^{1}}y \times \cancel{100}^{1} &= 46600\\ 94x + 105y &= 46600 \quad \cdots\cdots ②'\end{aligned}$$

また、①の式を x について解くと、

$$\begin{aligned}x + y &= 470\\ x &= -y + 470 \quad \cdots\cdots ①'\end{aligned}$$

となるので、①′ を ②′ に代入して、

$$\begin{aligned}94(-y+470)+105y&=46600\\-94y+44180+105y&=46600\\11y&=46600-44180=24200\\y&=\cancel{24200}^{220}\times\frac{1}{\cancel{11}}=220\end{aligned}$$

$y=220$ を ①′ に代入して、

$$x=-220+470=250$$

このことから、連立方程式の解は、

$$(x,\ y)=(250,\ 220)$$

となるので、求める生徒の人数は、

昨年度の男子の生徒数：250 人　　昨年度の女子の生徒数：220 人

3.5 濃度に関する問題

食塩水の濃度は、「食塩水全体に対して食塩がどれだけの割合（何倍）溶けているか」を数値で表したもので、次の式で表されます。

$$\text{食塩水の濃度}\ (\%) = \frac{\text{食塩の重さ (g)}}{\text{食塩水全体の重さ (g)}} \times 100$$

【例題 3 − 5】

3 %の食塩水と 8 %の食塩水を混ぜ合わせて、5 %の食塩水を 500 g 作りたいと思います。3 %の食塩水と 8 %の食塩水をそれぞれ何 g ずつ混ぜ合わせればよいかを求めなさい。

＜解説＞

混ぜ合わせる 3 %の食塩水と 8 %の食塩水の重さを求めることから、3 %の食塩水の重さを x g、8 %の食塩水の重さを y g とします。また、「食塩水の濃度」は、食塩水全体の重さ、食塩の重さ（水の重さの関係が重要であるので、その関係を表にしておくと内容を整理しやすくなります。

3 %の食塩水 x g は、食塩水 x g のうちの $\dfrac{3}{100}$ 倍が食塩の重さ、8 %の食塩水 y g は、食塩水 y g のうちの $\dfrac{8}{100}$ 倍が食塩の重さ、そして、5 %の食塩水 500 g は、食塩水 500 g のうちの $\dfrac{5}{100}$ 倍が食塩の重さになるので、次のような表を作ることができます。

	3 %の食塩水	8 %の食塩水	5 %の食塩水
食塩水の重さ (g)	x	y	500
食塩の重さ (g)	$\dfrac{3}{100}x$	$\dfrac{8}{100}y$	$500 \times \dfrac{5}{100}$

そして、食塩水の重さ、食塩の重さに関係から、次のような連立方程式を作ることができます。

$$\begin{cases} x + y = 500 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{3}{100}x + \dfrac{8}{100}y = 500 \times \dfrac{5}{100} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②の式は分数を含んでいるので、分母を払うために方程式の両辺を 100 倍して、

$$\left(\frac{3}{100}x + \frac{8}{100}y\right) \times 100 = 25 \times 100$$
$$\frac{3}{\cancel{100}_1}x \times \cancel{100}^1 + \frac{8}{\cancel{100}_1}y \times \cancel{100}^1 = 2500$$
$$3x + 8y = 2500 \quad \cdots\cdots ②'$$

また、①の方程式を x について解くと、

$$x + y = 500$$
$$x = -y + 500 \quad \cdots\cdots ①'$$

となるので、①′ を ②′ に代入して、

$$
\begin{aligned}
3(-y+500)+8y &= 2500 \\
-3y+1500+8y &= 2500 \\
5y &= 2500-1500=1000 \\
y &= 1000 \times \frac{1}{5} = 200
\end{aligned}
$$

$y=200$ を ①′ に代入して、

$$x=-200+500=300$$

このことから、連立方程式の解は、

$$(x,\ y)=(300,\ 200)$$

よって、求める食塩水の重さは、

3 %の食塩水の重さ：300 g　　8 %の食塩水の重さ：200 g