

【中1数学】空間図形

まなびの学園

<http://www.manabino-academy.com>

目次

1	いろいろな立体	1
1.1	多面体	1
1.2	角柱と円柱	4
1.3	角錐と円錐	6
2	直線や平面の位置関係	8
2.1	平面の決定	8
2.2	2直線の位置関係	9
2.3	直線と平面の位置関係	10
2.4	2平面の位置関係	12
3	立体のいろいろな見方	14
3.1	面を平行に動かしてできる立体	14
3.2	面を回転させてできる立体	15
3.3	線を動かしてできる立体	17
3.4	立体の切断	18
3.5	立体の展開図	19
3.6	投影図	21
4	立体の表面積と体積	23
4.1	角柱・円柱の表面積	23
4.2	角錐・円錐の表面積	25
4.3	角柱・円柱の体積	27
4.4	角錐・円錐の体積	28
4.5	球の表面積と体積	29

1 いろいろな立体

1.1 多面体

平面だけで囲まれた立体を多面体といいます。普通、立体を作るためには「1つ」の平面だけでなく「多くの平面が必要であるので、そのような名前になっていると思ってください。

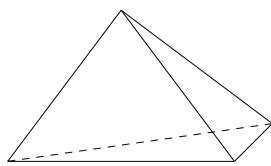
そして、多面体のうち、へこみのない多面体を凸多面体といいます。凸多面体の頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると、

$$v - e + f = 2 \quad ((\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2)$$

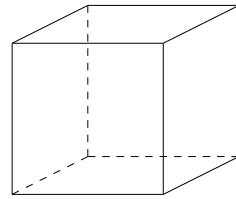
という関係が成り立ち、これをオイラーの多面体定理といいます。

また、合同な多角形で囲まれ、頂点に集まる面の数がすべて等しい多面体を正多面体といい、正多面体は次の5種類だけ存在します。

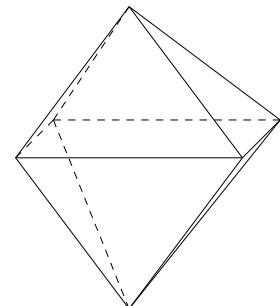
① 正四面体



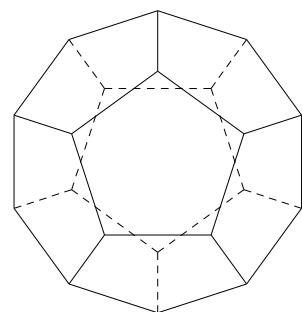
② 正六面体（立方体）



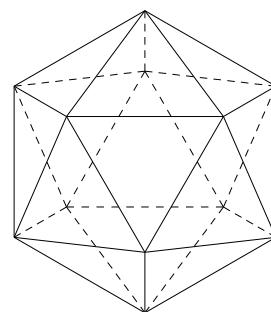
③ 正八面体



④ 正十二面体



⑤ 正二十面体



【例題 6-1】

正多面体について、次の表を完成させなさい。

	面の形	1つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体					
正六面体					
正八面体					
正十二面体					
正二十面体					

<解説>

正多面体の図を参考に、空欄を埋めていきます。

- 面の形

正多面体は、合同な多角形で囲まれているので、それぞれの面の辺の長さと角の大きさは同じになります。つまり、それぞれの面は正多角形になります。

- 1つの頂点に集まる面の数

正多面体は、頂点に集まる面の数がすべて等しいので、どれか1つの頂点に着目して、そこに集まる面の数を数えます。

- 面の数

多面体は、その面の数によって

4つの面をもつ立体 → 四面体

のように名前がつけられているので、立体の名前を見ることで数がわかります。また、そのようになっていることを正多面体の図でも確認しておきましょう。

- 辺の数

正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1つの面にいくつ辺があるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1つの面における辺の数」に「面の数」を掛けた分だけ辺はあることになりますが、正多面体では、それぞれの辺を重ね合わせることで立体を作ることになるので、その辺の数は、

$$(辺の数) = (1つの面における辺の数) \times (面の数) \div 2$$

という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めるこどもできます。

- 頂点の数

正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1つの面にいくつ頂点があるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1つの面における頂点の数」に「面の数」を掛けた分だけ頂点はあることになりますが、正多面体では、それぞれの頂点を重ね合わせること

で立体を作ることになるので、その頂点の数は、

$$(頂点の数) = (1\text{つの面における頂点の数}) \times (\text{面の数}) \div (1\text{つの頂点に集まる面の数})$$

という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めるこどもできます。

以上のことから、表は次のようにになります。

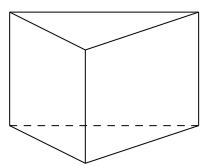
	面の形	1つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体	正三角形	3	4	6	4
正六面体	正方形	3	6	12	8
正八面体	正三角形	4	8	12	6
正十二面体	正五角形	3	12	30	20
正二十面体	正三角形	5	20	30	12

1.2 角柱と円柱

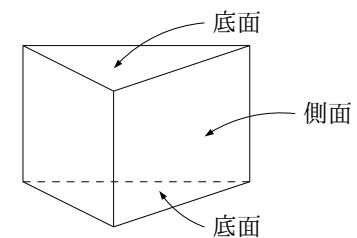
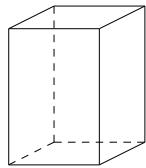
右の図のような柱状の立体には、形と大きさの等しい（合同）図形が2つあり、この面を底面といいます。また、底面以外の面（横の面）を側面といいます。

このように、2つの底面を持つ柱状の立体を角柱といい、底面の形によって次のように名前がつけられます。

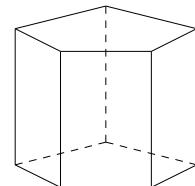
① 三角柱（底面が三角形）



② 四角柱（底面が四角形）



③ 五角柱（底面が五角形）

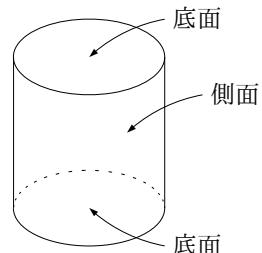


また、底面が正多角形である角柱を正角柱といい、底面の形によって

正三角柱（底面が正三角形）、正四角柱（底面が正方形）、正五角柱（底面が正五角形）、…

のように名前がつけられます。

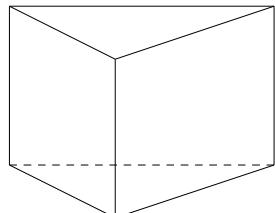
右の図のように、底面が円である場合には、円柱といいます。



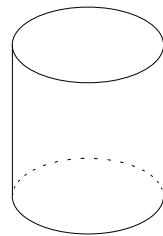
【例題 1 - 2】

次の立体の展開図をかきなさい。

(1) 三角柱



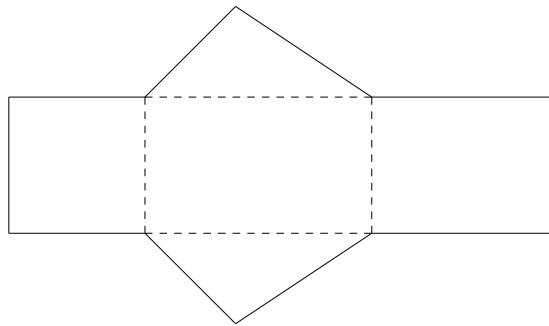
(2) 円柱



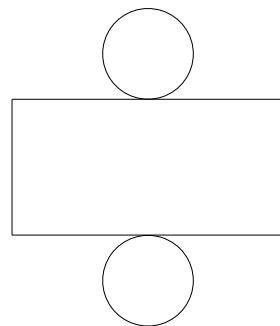
<解説>

展開図をかくには、見取り図から、面全体がばらばらにならないように、辺にそって切り離していくようにして考えます。長さは特に明記されていないので、およその形があつていれば問題ありません。

- (1) 三角柱の展開図は下の図のようになります。切り離し方によっては、これとは異なる展開図になる場合もありますが、組み立てて三角柱にすることができるれば問題ありません。



- (2) 円柱の展開図は次の図のようになります。基本的に辺にそって切り離していきますが、円柱の場合には上下の底面をつなぐ辺がないため、どこか適当なところで切って、側面を広げます。底面の円の位置は、左右のどこにずれても円柱を作ることができるので、展開図にかくときも、解答例の円の位置より左右にずれていてもかまいません。

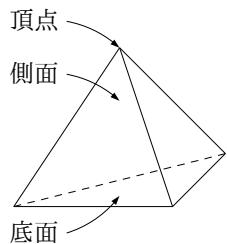


側面の横の長さをどのくらいにすればいいのか難しいところですが、そのような詳しいことについては別の単元で学習をします。ここでは、角柱や円柱の展開図では、側面は必ず長方形になり、また、その側面の上下にそれぞれ底面がくっつくのだということを把握しておきましょう。

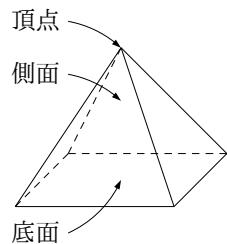
1.3 角錐と円錐

次の図のように、1つの底面（多角形）と側面、頂点を持つとがった立体を角錐（かくすい）といい、底面の形によって次のように名前がつけられます。

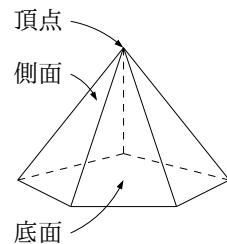
(1) 三角錐（底面が三角形）



(2) 四角錐（底面が四角形）

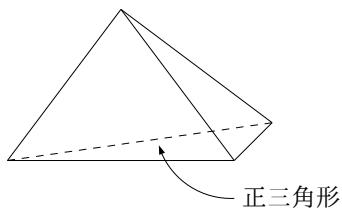


(3) 五角錐（底面が五角形）

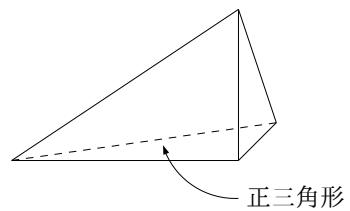


また、底面が正多角形で、側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐を正角錐といいます。角柱とは異なり、底面が正多角形であっても正角錐とはならない角錐があるので注意をしましょう。

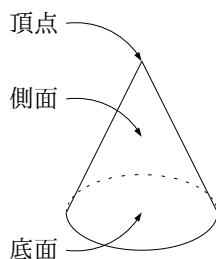
(1) 正三角錐（正四面体）



(2) 三角錐（正三角錐ではない）



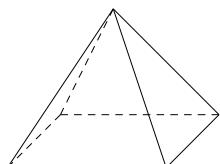
次の図のように、底面が円である場合は円錐といいます。



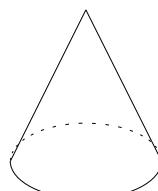
【例題 1 - 3】

次の立体の展開図をかきなさい。

(1) 正四角錐



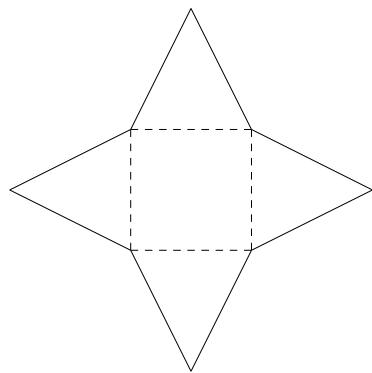
(2) 円錐



<解説>

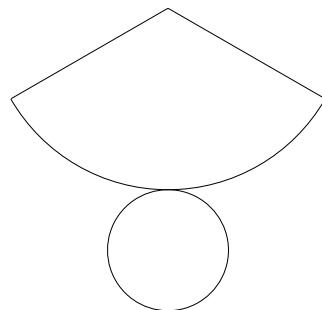
展開図をかくには、見取り図から、面全体がばらばらにならないように、辺にそって切り離していくようして考えます。長さは特に明記されていないので、およその形があつていれば問題ありません。

- (1) 正四角錐の展開図の一例です。正四角錐なので、底面は正方形、側面は二等辺三角形になるので、その点に注意して展開図をかきます。



- (2) 円錐の展開図の一例です。円錐の展開図における側面はおうぎ形になります。また、展開図の底面は、おうぎ形の弧にそっていればどの位置にあっても問題ありません。

おうぎ形の中心角の大きさなど、細かな部分については別の単元で学習をするので、この単元では、どのような形になるのかおよそのイメージができるようにしてください。

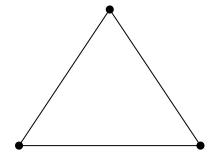


2 直線や平面の位置関係

2.1 平面の決定

平らに限りなく広がっている面を平面といいます。

同じ直線上にない 3 つの点を結ぶと、右の図のように三角形を作ることができます。このことから、同じ直線上にない 3 つの点によって、三角形という最も基本的な面を作ることができ、この面を限りなく広げていけば 1 つの「平面」を作ることができます。つまり、平面がただ 1 つに決まるための条件は、「同じ直線上にない 3 つの点が決まる」ということになります。



【例題 2-1】

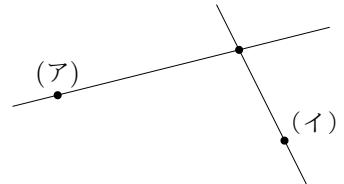
次の直線や点を含む平面が、ただ 1 つに決まるものを選びなさい。

- | | | |
|----------------|----------------|-------------------|
| ① 交わる 2 直線 | ② 平行な 2 直線 | ③ 1 直線とその上にない 1 点 |
| ④ 1 直線上にない 3 点 | ⑤ 1 直線上にない 4 点 | |

<解説>

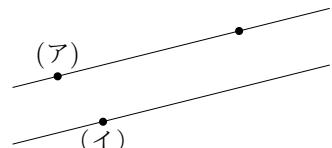
① 交わる 2 直線を決定するための条件を考えます。

1 つの直線を決定するためには 2 つの点が必要なので、ある 2 つの点を通る直線を考えます（ア）。さらに、その 2 つの点とは別にもう 1 つ点を取り、その点をすでにある 2 つの点のうちの 1 つと結ぶと、交わる 2 直線を作ることができます（イ）。以上のことから、「交わる 2 直線」は、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まるうことになり、ただ 1 つの平面を決めることがあります。



② 平行な 2 直線を決定するための条件を考えます。

まず、1 つの直線を決定するためには 2 つの点が必要です（ア）。そして、その直線上にないある 1 点が決まれば、その直線と平行になる直線が決まります（イ）。以上のことから、「平行な 2 直線」は、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まるうことになり、ただ 1 つの平面を決めることがあります。



③ 1 直線を決めるには 2 つの点が必要で、その上にない 1 点により、「同じ直線上にない 3 つの点」が決まることがあります。つまり、「1 直線とその上にない 1 点」は、ただ 1 つの平面を決めることがあります。

④ これは説明するまでもなく、「1 直線上にない 3 点」は、ただ 1 つの平面を決めます。

⑤ 同じ直線上にない 3 つの点により平面はただ 1 つに決まります。4 つ目のもう 1 つの点が同じ平面上にあれば、平面をただ 1 つに決めることもできますが、そうでない場合には平面が 1 つに決まることはできません。

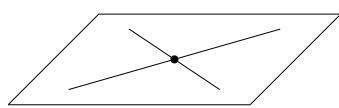
以上のことから、平面がただ 1 つに決まるものは、

- ①, ②, ③, ④

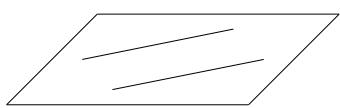
2.2 2直線の位置関係

空間内の2直線の位置関係には、次のような3つの場合があります。

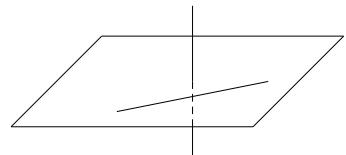
(i) 1点で交わる



(ii) 平行



(iii) ねじれの位置

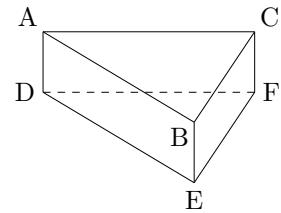


(i), (ii)は「同じ平面上にある」2直線の位置関係で、(ii)の2直線は、どこまで延長しても交わりません。
(iii)は「同じ平面上にない」2直線の位置関係で、どこまで延長しても交わらず、空間内の2直線の位置関係特有のものになります。

【例題2-2】

右の三角柱で、ADと次のような関係にある辺を答えなさい。

- (1) 平行な辺
- (2) 垂直に交わる辺
- (3) ねじれの位置にある辺



<解説>

三角柱にはAD以外に、AB, BC, CA, BE, CF, DE, EF, FDという8つの辺があるので、その中から条件に当てはまる辺を選びます。

(1) 8つの辺の中で、ADとどこまで延長しても交わらない辺はBC, BE, CF, EFの4つあります。その中で、

BE, CF

の2つの辺は、面ADEB, 面ADFCのように、辺ADと同じ面にある辺になるので、この2つの辺が、同じ平面にあって、どこまで延長しても交わらない平行な辺になります。

(2) 8つの辺の中でADと交わる辺には、次の4つがあります。

AB, CA, DE, FD

この4つの辺すべてがADと垂直に交わります。見取り図では実際の角度と異なる部分があるので、わかりにくい場合は、三角柱を実際に組み立てて考えてみてください。

(3) 8つの辺の中で、ADとどこまで延長しても交わらない辺は、(1)で考えたようにBC, BE, CF, EFの4つあります。そして、その中でADと同じ平面上にない辺は、(1)以外の辺ということになるので、

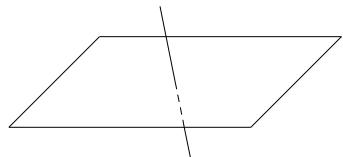
BC, EF

がADとねじれの位置にある辺ということになります。

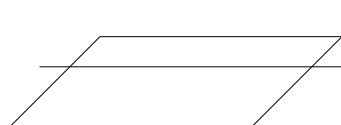
2.3 直線と平面の位置関係

直線と平面の位置関係には、次の3つの場合があります。

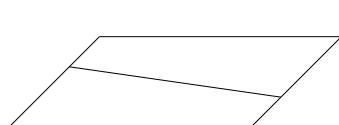
(i) 交わる（1点で交わる）



(ii) 平行である

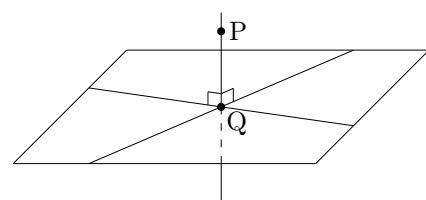


(iii) 直線は平面上にある



また、直線と平面が交わるとき、直線が平面上のすべての直線に垂直である場合には、その直線と平面は垂直であるといいます。しかし、交わる2直線は1つの平面を決定するので、平面上の2直線と垂直であれば、直線と平面は垂直であることになります。

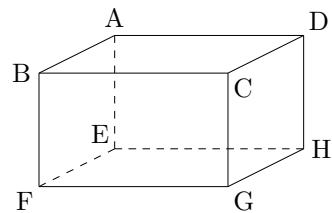
そして、点Pと平面上の点との2点間の距離を考えると、図のように平面上に点Qがあるとき、2点P, Q間の距離は最も短くなり、この線分PQの長さを点Pと平面との距離といいます。



【例題2-3】

以下の直方体について、次の面や辺をいいなさい。

- (1) 辺ABを含む面
- (2) 辺ABと垂直な面
- (3) 辺ABと平行な面
- (4) 面ABCDと垂直な辺
- (5) 面ABCDと平行な辺



＜解説＞

面を答えるときは、その面に含まれるある頂点を基準に、反時計（左）回りに1周するように頂点を並べて答えます。基本的には反時計（左）回りに1周しますが、時計（右）回りで答えるても間違いではありません。ただし、必ず1周するようにして頂点を並べるようにしましょう。

辺の場合は、「辺AB」であっても「辺BA」であっても同じものを表すので、どちらで答えるても問題ありません。

- (1) 辺ABを含む面は次の2つです。

面ABCD, 面ABFE

- (2) 辺ABと垂直な面を考えるために、まず辺ABと垂直な辺を考えると、辺AD, 辺BC, 边AE, 边BFの4つあります。辺ABと2つの辺が垂直であれば、その辺を含む面は垂直であることになるので、そのような面は次の2つの面になります。

• 辺ADと辺AEを含む面AEHD • 辺BCと辺BFを含む面BFGC

- (3) 辺ABと平行な面は、辺ABとその面をどこまで延長しても交わらない面です。そのような面は次の2つ

の面になります。

面 CGHD, 面 EFGH

- (4) 面 ABCD と垂直な辺は、面 ABCD 上にある 2 つの辺と垂直な辺です。そのような辺には次の 4 つがあります。

- 辺 AB と辺 DA に垂直な辺 AE
- 辺 BC と辺 CD に垂直な辺 CG
- 辺 AB と辺 BC に垂直な辺 BF
- 辺 CD と辺 DA に垂直な辺 DH

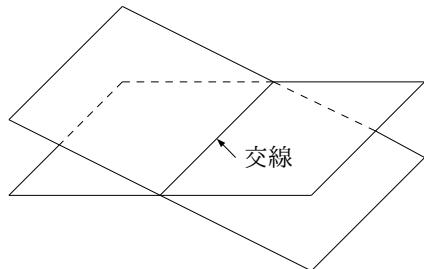
- (5) 面 ABCD と平行な辺は、面 ABCD とどこまで延長しても交わらないような辺で、次の 4 つがあります。

辺 EF, 辺 FG, 辺 GH, 辺 HE

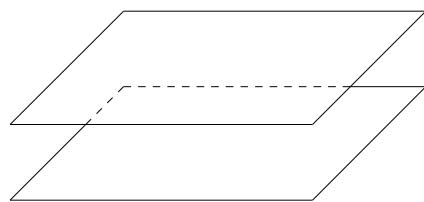
2.4 2平面の位置関係

2平面の位置関係には、次の2つの場合があります。

① 交わる

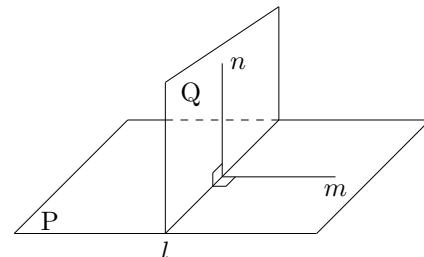


② 平行である



直線と直線が交わるとき、その部分は点になるので「交点」といいますが、平面と平面が交わる部分は、図のように直線になります。そのため、その部分は交線といいます。

また、右の図のように、2つの平面 P, Q があり、その2つの平面の交線を l とします。平面 P 上に、直線 l と垂直な直線 m 、平面 Q 上に l と垂直な直線 n を引くとき、直線 m と直線 n のなす角が平面 P と平面 Q のなす角になり、 $m \perp n$ ならば、平面 P と平面 Q は垂直であるといい、2直線が垂直であることと同じように、平面の場合も次のように表します。

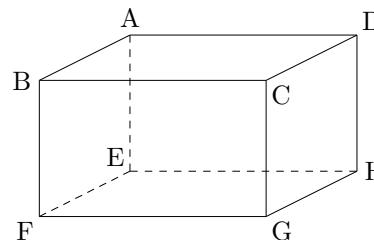


$$P \perp Q$$

【例題 2-4】

右の直方体について、次の面をいいなさい。

- (1) 面 ABCD と垂直な面
- (2) 面 ABCD と平行な面



<解説>

(1) 面 ABCD と面 BFEA の交線は AB で、

$$AB \perp BC, AB \perp BF$$

であるので、BC と BF のなす角が面 ABCD と面 BFEA のなす角になります。立体は直方体なので、 $BC \perp BF$ となることから、

$$\text{面 } ABCD \perp \text{面 } BFEA$$

このようにして考えることによって、面 ABCD と垂直な面は次の4つになります。

$$\text{面 } BFEA, \text{ 面 } BFGC, \text{ 面 } CGHD, \text{ 面 } AEHD$$

(2) 面 ABCD と平行な面は、面 ABCD とその面をどこまで延長しても交わらない面なので、そのような面は、

面 EFGH

3 立体のいろいろな見方

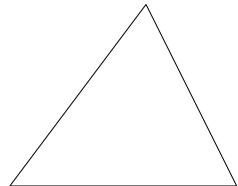
3.1 面を平行に動かしてできる立体

1つの多角形や円を、その面に垂直な方向に一定の距離だけ平行に動かすと、その多角形や円の通ったあとに柱状の立体（角柱や円柱）ができます。これは、それぞれの図形と同じ形をした紙を机の上に置き、その紙とぴったり重なるように、同じ形の紙を順に積み重ねたときにできる立体だと考えることができます。

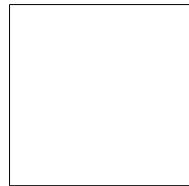
【例題 3-1】

下の図で、(1) は三角形、(2) は正方形、(3) は円です。それぞれの図形を、その面に垂直な方向に、一定の距離だけ動かすと、どんな立体ができますか。

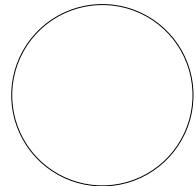
(1) 三角形



(2) 正方形

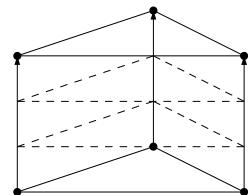


(3) 円

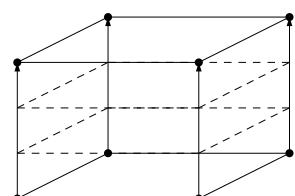


<解説>

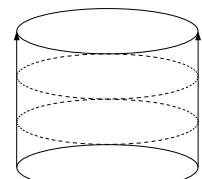
- (1) 図の三角形と同じ形をした紙を机の上に置き、その三角形と同じ形の紙を下の三角形とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような三角柱ができます。



- (2) 図の正方形と同じ形をした紙を机の上に置き、その正方形と同じ形の紙を下の正方形とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような四角柱ができます。しかし、底面は正多角形である正方形なので、ただの四角柱ではなく、「正四角柱」になることに注意してください。また、面に垂直な方向への移動距離が、正方形の1辺の長さと等しい場合には、立方体になります。



- (3) 図の円と同じ形をした紙を机の上に置き、その円と同じ形の紙を下の円とぴったり重なるように順に積み重ねていくと、右の図のような円柱ができます。



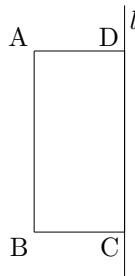
3.2 面を回転させてできる立体

1つの平面図形を、その平面上の直線のまわりに1回転させてできる立体を回転体といいます。このとき、回転の基準となる直線を回転の軸といい、回転体の側面を作り出す線分を母線といいます。

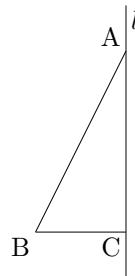
【例題3-2】

下の図で、(1)は長方形、(2)は直角三角形、(3)は半円です。それぞれの図形を、直線 l を軸として1回転してできる立体の名前を答えなさい。

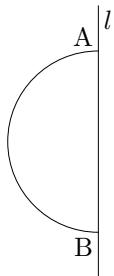
(1) 長方形



(2) 直角三角形



(3) 半円

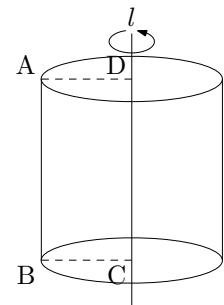


＜解説＞

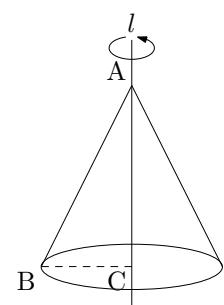
割り箸のような長い棒を直線 l とし、その棒にそれぞれの図形と同じ形に紙を貼り付け、棒を回転軸となるように回転させたとき、どのような図形ができるのかを考えます。

(1) 長方形を直線 l を軸として1回転させると、右の図のような円柱ができます。

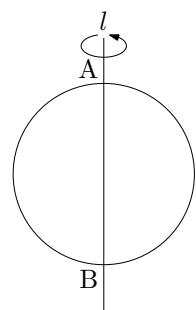
また、このとき、線分 AB が円柱の側面を作る線分になるので、母線は線分 AB になります。



(2) 直角三角形を直線 l を軸として1回転させると、右の図のような円錐ができます。また、このとき、線分 AB が円錐の側面を作る線分になるので、母線は線分 AB になります。



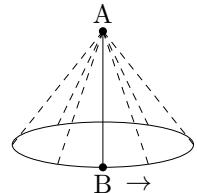
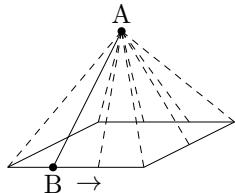
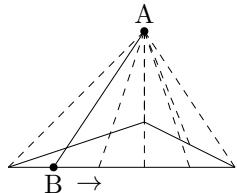
(3) 半円を直線 l を軸として 1 回転させると、右の図のような球ができます。



3.3 線を動かしてできる立体

固定した点 A から、多角形や円の周上の点 B を、その周にそって 1 まわりさせると、頂点 A と点 B を結ぶ線分 AB が動いてできる立体は、角錐や円錐になります。

- (i) 三角錐（三角形を 1 周） (ii) 四角錐（四角形を 1 周） (iii) 円錐（円を 1 周）

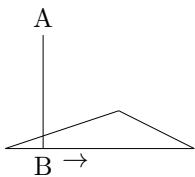


このとき、線分 AB はそれぞれの立体の側面を作り出す線分になるので母線になります。

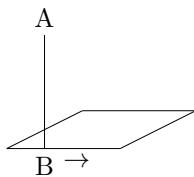
【例題 3-3】

下の図のように、線分 AB を、多角形や円に垂直に立てたまま、その周にそって 1 まわりさせると、線分 AB が動いたあとは、どのような図形になりますか。

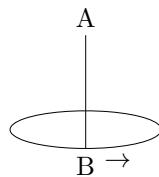
(1) 三角形



(2) 四角形



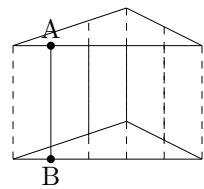
(3) 円



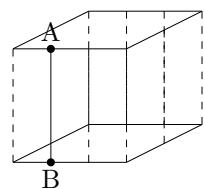
＜解説＞

線分 AB はそれぞれの立体の側面を作り出す線分になるので母線になります。

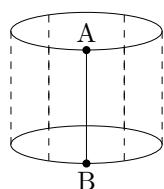
- (1) 線分 AB を、三角形に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような三角柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



- (2) 線分 AB を、四角形に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような四角柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



- (3) 線分 AB を、円に垂直に立てたまま、その周にそって矢印の向きに 1 まわりさせます。すると、右の図のような円柱ができます。（点線は線分 AB の動いたあとです。）



3.4 立体の切断

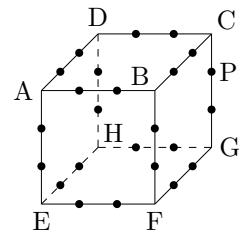
立体を平面で切ることを切断といい、切ったときの切り口を切断面といいます。

立体を1つの平面で切ったときの切り口を考えるとき、次の法則に従って行います。

- (i) 切り口の辺は立体の面上にあるので、同一平面上の2点を結ぶ。
- (ii) 平行な2つの面の切り口が平行になることを利用する。
- (iii) (i), (ii) だけで切り口をかくことができない場合、切り口の線分またはその延長が、その線分を含む面の交線上で交わることを利用する。

【例題3-4】

右の図は、立方体の見取り図で、点Pは、CGを3等分している点です。他の辺上の各点もそれぞれの辺を3等分しています。この立方体を3点D, P, Fを通る平面で切ったとき、その切り口の図形の辺を右の図に書き入れなさい。

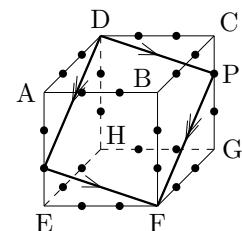
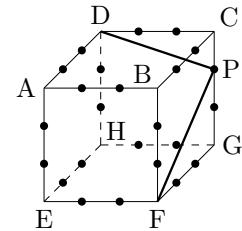


<解説>

まず、D, P, Fの3点のうち、同一平面上で結ぶことのできるDとP(面DHGC上)、PとF(面BFGC上)を結びます。このとき、DとFを結ぶ線分は立体の内部になってしまふので、この2点を結ぶことはできません。

次に、平行な2つの面の切り口が平行になることを利用します。立方体の向かい合う面は平行になるので、面DHGCと面AEFBは平行です。そのため、面DHGC上有る切り口の辺DPと平行になる辺が面AEFB上有ることになります。切り口は途中で途切れることはないので、点Fを通りDPと平行になる線分を面AEFBにかきます。

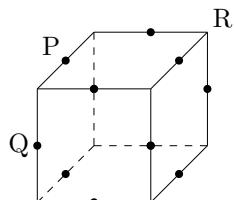
同じようにして、面BFGCと面AEHDも平行になるので、面BFGC上有る切り口の辺PFと平行になる辺が面AEHDにもあることになります。そこで、点Dを通りPFと平行になる線分を面AEHDにかくと、右図のようにすべての辺がつながり、これが切り口の図形の辺になります。



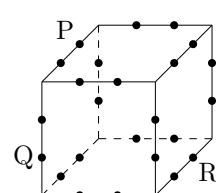
【演習3-4】

次の図の立方体を、3点P, Q, Rを通る平面で切ったときの切り口をそれぞれかきなさい。

(1) 図中の●は、各辺を2等分する点です。



(2) 図中の●は、各辺を3等分する点です。



3.5 立体の展開図

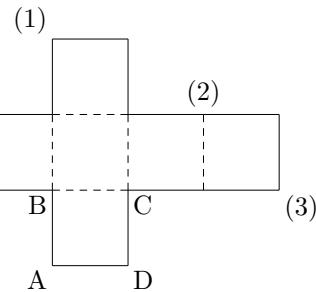
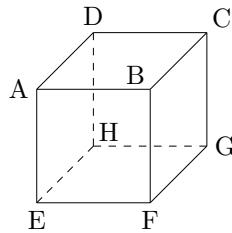
立体の表面を（辺にそって）切り開いて、平面上に広げた図を展開図といいます。

見取り図の頂点と展開図の頂点との対応関係を考えるとき、次のような手順で展開図の頂点を決定していきます。ただし、頭の中で立体から展開図を作ったり、展開図から元の立体を組み立てられる人は、その図を利用して頂点を対応させれば問題ありません。

- (i) 展開図に与えられた頂点の条件から、基準となる面を見取り図で確認する。
- (ii) 展開図においてその面と辺を共有する面を見つけ、その面と同じになる面を見取り図から見つけ出す。
- (iii) 面が特定できたら、展開図に頂点を書き加える。
- (iv) すべての頂点が特定できるまで (ii), (iii) を繰り返す。

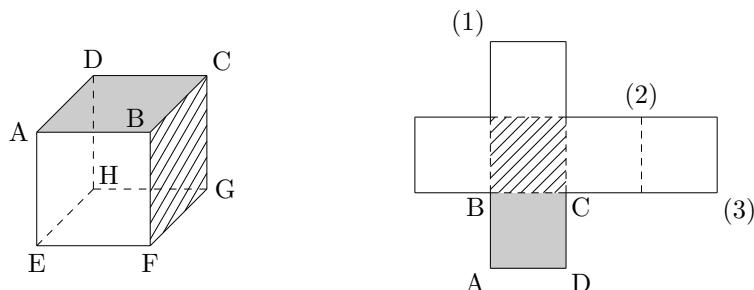
【例題 3-5】

下の図のような立方体とその展開図があります。展開図の(1)～(3)にあてはまる頂点を答えなさい。



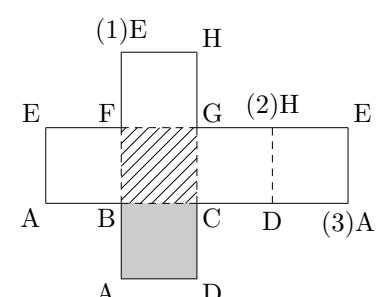
<解説>

まず、展開図で頂点の条件が与えられている面 ADCB があるので、この面を基準として考えていきます。そして、これと同じ面を見取り図で見つけると、次の図の色のついた部分になります。



次に、展開図で面 ADCB と辺 BC を共有する面（図の斜線部分）があることがわかるので、それと対応する面を見取り図で見つけると、面 BFGC になることがわかります。そのことから、展開図の辺 BC を共有する面（斜線部分）の残りの頂点を特定することができます。

同じようにして、展開図から面 FBCG と辺 FB, CG, GF を共有する面があることがわかるので、それと対応する面を見取り図から見つけということをすべての頂点が特定できるまで繰り返すと、対応する頂点は右図



のようになります。

のことから、(1)～(3)にあてはまる頂点は次のようになります。

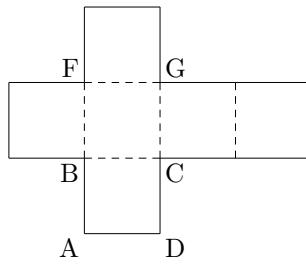
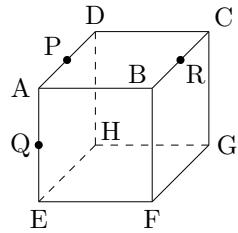
(1) 点 E

(2) 点 H

(3) 点 A

【演習 3－5】

下の図のような立方体とその展開図があります。点 P, Q, R は、それぞれ辺 AD, AE, BC の中点です。3 点 P, Q, R を含む平面で立方体を切るとき、その平面と立方体の各面が交わってできる線を下に示した立方体の展開図に書き入れなさい。

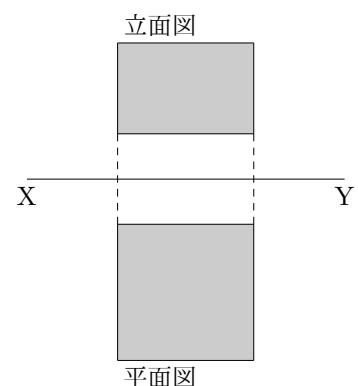
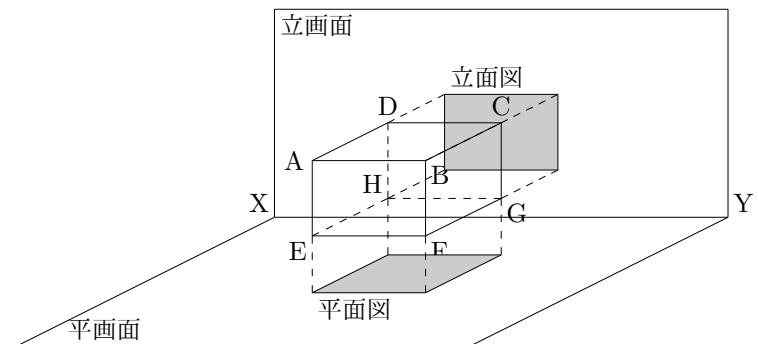


3.6 投影図

右の図のように、立体（ここで直方体 ABCD-EFGH）を水平な平面（平画面）と、それに垂直な平面（立画面）の前に置きます。その立体に平画面の真上から光を当てると平画面にその立体の影ができる、これを平面図といいます。同じように、立画面に垂直な光を立体に当てれば立画面にその立体の影ができる、これを立面図といいます。

ます。少し違う言い方をすれば、立体を真上から見た図が「平面図」で、正面から見た図が「立面図」になります。また、立画面と平画面が交わる直線（図では直線 XY）を基線といいます。

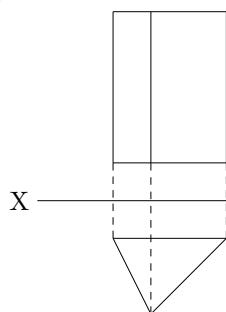
立体を平行な光で平画面、立画面に垂直に投影した図が平面図と立面図であるので、これらをまとめて投影図といいます。平面図と立面図は直線 XY（基線）で直角に折り曲げた1枚の用紙にかかれているとすると、投影図は右の図のように、その用紙を広げた図で表されます。



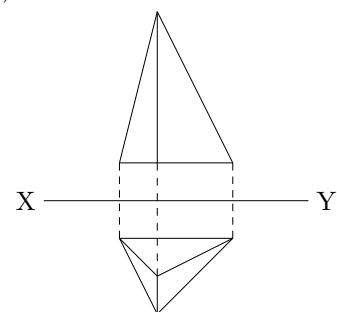
【例題 3-6】

次の(1)～(3)の投影図で表された立体の名前を答えなさい。

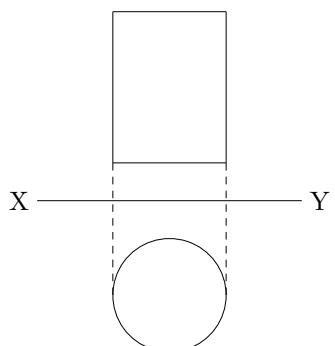
(1)



(2)



(3)



＜解説＞

立面図（真正面から見た図）が長方形ならば、立体は柱状になっていと考えることができるので、角柱や円

柱になります。また、三角形ならとがっている立体を考えることができますので、その立体は角錐や円錐であることがわかります。そして、平面図は真上から見た図になるので、立体の底面の形を確認することができ、このことから立体の名前を決定することができます。

- (1) 立面図が長方形なので、角柱や円柱になります。そして、平面図が三角形なので、底面の形が三角形ということがわかります。このことから、この立体は、

三角柱

- (2) 立面図が三角形なので、角錐や円錐になります。そして、平面図が三角形なので、底面の形が三角形です。このことから、この立体は、

三角錐

- (3) 立面図が長方形なので、角柱や円柱になります。。そして、平面図が円なので、底面の形が円になります。このことから、この立体は、

円柱

4 立体の表面積と体積

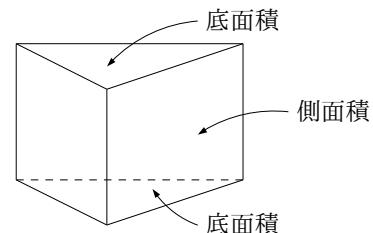
立体の表面全体の面積を表面積といい、1つの底面の面積を底面積、側面全体の面積を側面積といいます。

4.1 角柱・円柱の表面積

右の図の三角柱の例でもわかるように、角柱や円柱には2つの底面があります。そのため、角柱や円柱の表面積は、

$$(角柱 \cdot 円柱 の 表面積) = (底面積) \times 2 + (\text{側面積})$$

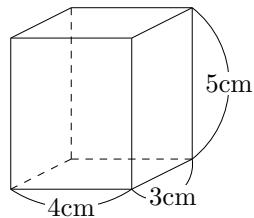
という計算で求めることができますが、表面積は「表面全体の面積」であるので、表面全体がわかりやすいように、見取り図から展開図を作ると考えやすくなります。



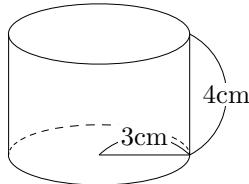
【例題 4-1】

次の立体の表面積を求めなさい。

(1) 四角柱



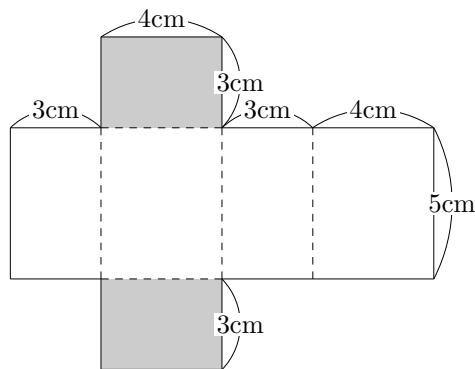
(2) 円柱



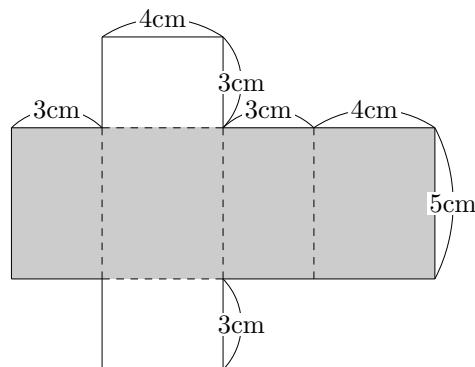
<解説>

(1) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積（2つ分）



(ii) 側面積



$$(\text{底面積}) = 4 \times 3 = 12 (\text{cm}^2)$$

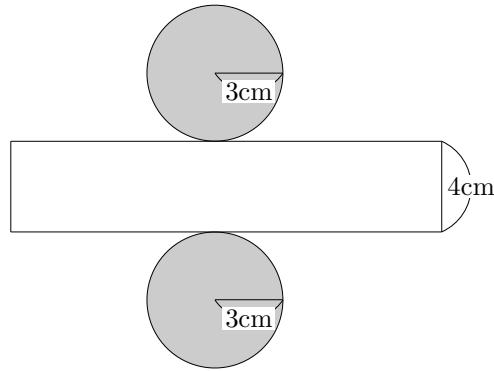
$$\begin{aligned} (\text{側面積}) &= (3 + 4 + 3 + 4) \times 5 \\ &= 14 \times 5 = 70 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

のことから、四角柱の表面積は、

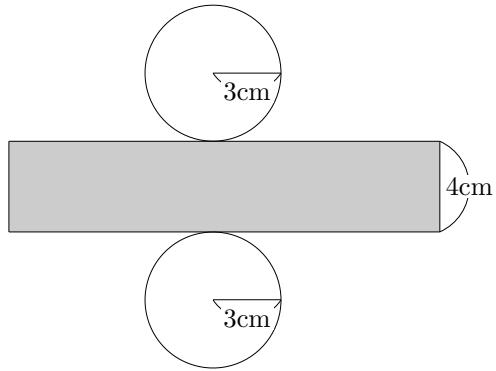
$$\begin{aligned} (\text{四角柱の表面積}) &= (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積}) \\ &= 12 \times 2 + 70 = 94 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

(2) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積（2つ分）



(ii) 側面積



$$(\text{底面積}) = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

側面の横の長さの部分は底面（円）の周の長さと一致するので、

$$\begin{aligned} (\text{側面の横の長さ}) &= (\text{底面の周の長さ}) \\ &= 2 \times \pi \times 3 = 6\pi \text{ (cm)} \end{aligned}$$

のことから側面積は、

$$(\text{側面積}) = 4 \times 6\pi = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

以上のことから、円柱の表面積は、

$$\begin{aligned} (\text{円柱の表面積}) &= (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積}) \\ &= 9\pi \times 2 + 24\pi \\ &= 18\pi + 24\pi = 42\pi \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

4.2 角錐・円錐の表面積

角錐や円錐は、底面が1つなので、

$$(角錐 \cdot 円錐の表面積) = (底面積) + (側面積)$$

という計算で表面積を求めることができますが、表面積は「表面全体の面積」であるので、表面全体がわかりやすいように、見取り図から展開図を作ると考えやすくなります。

右の図のような底面の半径が r cm、母線の長さが R cm の円錐では、展開図を考えると、側面は半径 R cm のおうぎ形になるので、中心角を x° とすると、おうぎ形の弧の長さは次のように表すことができます。

$$(おうぎ形の弧の長さ) = (2 \times \pi \times R) \times \frac{x}{360} \text{ (cm)}$$

また、底面の円周の長さは、半径 r cm の円なので、

$$(底面の円周の長さ) = 2 \times \pi \times r \text{ (cm)}$$

このとき、おうぎ形の弧の長さと底面の円周の長さは一致することから、おうぎ形の中心角は次のように表すことができます。

$$(おうぎ形の弧の長さ) = (底面の円周の長さ)$$

$$(2 \times \pi^1 \times R) \times \frac{x}{360} = 2 \times \pi^1 \times r$$

$$x = 360 \times \frac{r}{R} \longrightarrow (おうぎ形の中心角) = 360^\circ \times \frac{\text{底面の半径}}{\text{母線の長さ}} \times \frac{1}{(おうぎ形の半径)}$$

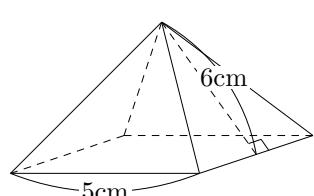
さらに、円錐の側面積であるおうぎ形の面積は次のように表され、円錐の側面積を求めるには、この式を公式として利用します。

$$\begin{aligned} (\text{円錐の側面積}) &= \frac{1}{2} \times (\text{おうぎ形の弧の長さ}) \times (\text{おうぎ形の半径}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{底面の円周の長さ}) \times (\text{おうぎ形の半径}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times R \\ &= \pi Rr \longrightarrow \pi \times (\text{母線の長さ}) \times (\text{底面の半径}) \end{aligned}$$

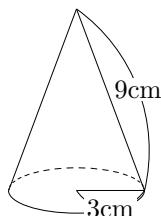
【例題 4-2】

次の立体の表面積を求めなさい。

(1) 正四角錐



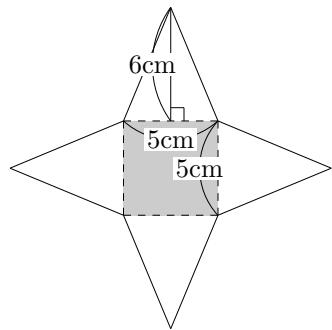
(2) 円錐



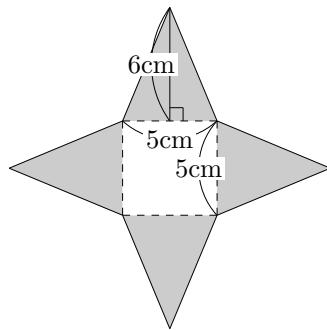
<解説>

(1) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積



(ii) 側面積



$$(\text{底面積}) = 5 \times 5 = 25 (\text{cm}^2)$$

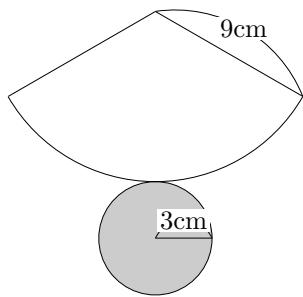
$$(\text{側面積}) = \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \right) \times 4 = 60 (\text{cm}^2)$$

以上のことから、正四角錐の表面積は

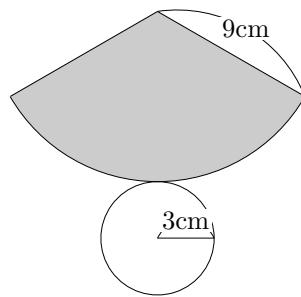
$$\begin{aligned} (\text{正四角錐の表面積}) &= (\text{底面積}) + (\text{側面積}) \\ &= 25 + 60 = 85 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

(2) 展開図を利用して考えると、底面積と側面積はそれぞれ次の図の面積（色のついた部分）になります。

(i) 底面積



(ii) 側面積



$$(\text{底面積}) = \pi \times 3^2 = 9\pi (\text{cm}^2)$$

$$(\text{側面積}) = \pi \times 9 \times 3 = 27\pi (\text{cm}^2)$$

以上のことから、円錐の表面積は、

$$\begin{aligned} (\text{円錐の表面積}) &= (\text{底面積}) + (\text{側面積}) \\ &= 9\pi + 27\pi = 36\pi (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

4.3 角柱・円柱の体積

角柱や円柱の体積は、

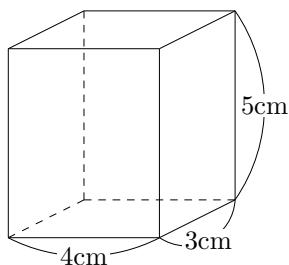
$$(角柱 \cdot 円柱 の 体積) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

という公式で求めます。また、ここでいう「高さ」とは、「底面から底面までの距離」になります。

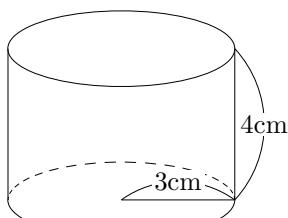
【例題 4-3】

次の立体の体積を求めなさい。

(1) 四角柱



(2) 円柱



<解説>

(1) 体積を求める公式から、

$$\begin{aligned} (\text{四角柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \\ &= (4 \times 3) \times 5 \\ &= 12 \times 5 = 60 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

ちなみに、四角柱は別名「直方体」ともいいます。直方体の体積は、

$$(\text{直方体の体積}) = (\text{たて}) \times (\text{横}) \times (\text{高さ})$$

により求めることができます、「たて × 横」は底面積を求める式になっているので、直方体の体積を求める公式も、次のように表すことができます。

$$(\text{直方体の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

(2) 体積を求める公式から、

$$\begin{aligned} (\text{円柱の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \\ &= (\pi \times 3^2) \times 4 \\ &= 9\pi \times 4 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

4.4 角錐・円錐の体積

角錐や円錐の体積は、同じ底面と高さである角柱や円柱の体積の $\frac{1}{3}$ 倍になります。つまり、角錐や円錐の体積は、

$$\begin{aligned} (\text{角錐・円錐の体積}) &= (\text{角柱・円柱の体積}) \times \frac{1}{3} \\ &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

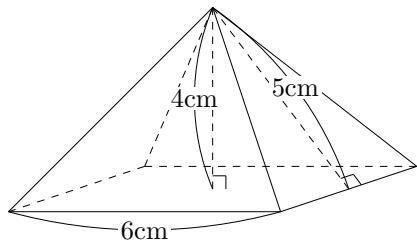
という公式で求められます。また、ここでいう「高さ」とは、「頂点から底面までの距離」になります。

三角形などの平面図形では、「高さ」と言われれば「頂点から底辺に下ろした垂線の長さ」のこと、「高さ」と「底辺」は垂直に交わっています。同じように、角錐や円錐の高さは「頂点から底面までの距離」で、「頂点から底面に下ろした垂線の長さ」になり、こちらも「高さ」と「底面」は垂直に交わっています。角柱や円柱のときと比べて、「高さ」が少しありにくいくらいですが、その点に注意しながら見極められるようにしてください。

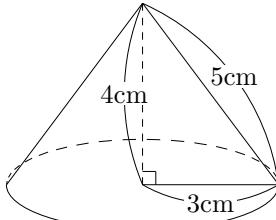
【例題 4-4】

次の立体の体積を求めなさい。

(1) 正四角錐



(2) 円錐



<解説>

(1) 正四角錐なので、底面は 1 辺の長さが 6 cm の正方形です。また、高さは頂点から底面に下ろした垂線の長さなので、4 cm です。よって、体積を求める公式から、

$$\begin{aligned} (\text{正四角錐の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} \\ &= (6 \times 6^2) \times 4 \times \frac{1}{3} = 48 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

(2) 円錐の底面は半径 3 cm の円です。また、高さは頂点から底面に下ろした垂線の長さなので、4 cm です。よって、体積を求める公式から、

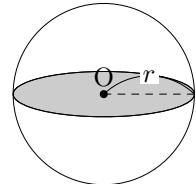
$$\begin{aligned} (\text{円錐の体積}) &= (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3} \\ &= (\pi \times 3 \times 3^2) \times 4 \times \frac{1}{3} = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

4.5 球の表面積と体積

右の図のような、中心 O、半径 r の球を考えます。

球の表面積は、球の中心 O を通る面で切ったときにできる半径 r の円（図の色のついた部分）の 4 倍であることが知られています。つまり、球の表面積を S とするとき、次の式で表されます

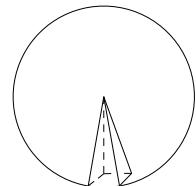
$$S = \pi r^2 \times 4 = 4\pi r^2$$



次に、半径 r の球を、右図のような角錐でものすごく細かく分割していきます。

分割した角錐の体積の和が球の体積になりますが、1 つ 1 つの角錐の体積は

$$(\text{角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$



で求めることができます、角錐の高さはすべて r になります。また、角錐の底面をすべて合わせると球の表面になるので、

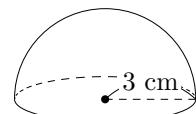
$$(\text{角錐の底面積の和}) = (\text{球の表面積})$$

という関係になっています。このことから、球の体積を V とすると、次のような式で表すことができます。

$$\begin{aligned} V &= (\text{角錐の体積の和}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{底面積の和}) \times (\text{高さ}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{球の表面積}) \times r \\ &= \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

【例題 4-5】

右の半球の表面積と体積を求めなさい。



＜解説＞

半球の表面積は、球の表面積の半分に円の面積を加えたものになるので、

$$\begin{aligned} (\text{半球の表面積}) &= (\text{球の表面積}) \times \frac{1}{2} + (\text{円の面積}) \\ &= 4\pi \times 3^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times 3^2 = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

また、半球の体積は球の体積の半分になるので、

$$\begin{aligned} (\text{半球の体積}) &= (\text{球の体積}) \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi \times 3^3\right) \times \frac{1}{2} = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$