【中１数学】１次方程式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　解と等式

1.1　方程式と解

「$2+3=5$」のような文字を含まない等式は、いつでも成り立つ等式です。しかし、「$2x+3=0$」のように文字を含み、その文字にいろいろな値を代入したとき、その値によって成り立ったり成り立たなかったりする等式を、**方程式**といいます。また、その文字が x であるときには、x **についての方程式**といいます。

x についての方程式では、その方程式を成り立たせる x の値を、その方程式の**解**といい、方程式の解を求めることを、**方程式を解く**といいます。もちろん、a についての方程式では、その方程式を成り立たせる a の値を、その方程式の解といいます。

【例題 1 － 1】

次の方程式のうち、$x=3$ のとき成り立つものを選びなさい。

① $x+9=6$　② $x-5=-2$　③ $3x+1=-2x-5$　④ $\frac{1}{4}x+8=3$

＜解説＞

それぞれの式に $x=3$ を代入して、左辺の値と右辺の値が一致するか、つまり、方程式が成り立つかを確認します。

① 次のように左辺と右辺の値は一致しません。

$$(\text{左辺})=3+9=12 \qquad (\text{右辺})=6$$

つまり、方程式は成り立たないことになります。

② 次のように左辺と右辺の値が一致します。

$$(\text{左辺})=3-5=-2 \qquad (\text{右辺})=-2$$

つまり、方程式は成り立ちます。また、この方程式の解は $x=3$ ということになります。

③ 次のように左辺と右辺の値は一致しません。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=3\times3+1 & (\text{右辺})&=-2\times3-5\\ &=9+1 & &=-6-5\\ &=10 & &=-11\end{aligned}$$

つまり、方程式は成り立たないことになります。

④ 次のように左辺と右辺の値は一致しません。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{1}{4}\times3+8 \qquad (\text{右辺})=3\\ &=\frac{3}{4}+\frac{32}{4}=\frac{35}{4}\end{aligned}$$

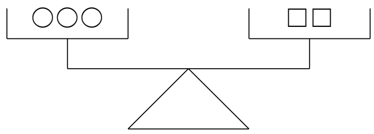
つまり、方程式は成り立たないことになります。

以上より、$x=3$ のときに方程式が成り立つものは、②となります。

1.2 等式の性質①（$A = B$ ならば $A + C = B + C$）

等式は、左辺と右辺が等しいという関係を式にしています。これは、「てんびん」の左の皿に乗っている重さと、右の皿に乗っている重さが等しくなってつり合っている、という状況を考えるとイメージがしやすくなります。

ここでは右の図のように、左の皿に○ 3 つ、右の皿に□ 2 つのおもりを乗せたら、ちょうどつり合ったという状況をイメージしながら等質の性質について考えてみたいと思います。

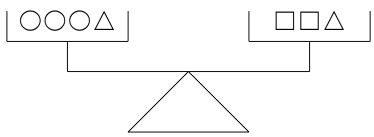


左の皿には「○○○」という 3 つのおもりが乗せられていて、右の皿には「□□」という 2 つのおもりが乗せられていて、その重さがちょうどつり合っているので、

$$○○○ = □□$$

という等式が成り立ちます。

ここで、左の皿に△というおもりを 1 つ乗せます。するとてんびんは左に傾いてしまいますが、そこで、右の皿にも△というおもりを 1 つ乗せるとどうでしょう？左右のおもりの重さが等しくなって、またつり合います。つまり、



$$○○○ + △ = □□ + △$$

という関係が成り立つことになります。

このことから、「**等式の両辺に同じ数を加えても、等式は成り立つ**」ことがわかります。これを数式で表すと、$A = B$ となっているときに、両辺にある数 C を加えても、

$$A + C = B + C$$

と等式が成り立つことになり、この等式の性質を利用して、方程式を解いていきます。

「方程式を解く」とは、方程式を成り立たせる文字の値（x についての方程式では x の値）を求めることです。簡単な方程式であれば、どのような文字の値が方程式の解になるのかは見つけやすいのですが、複雑な方程式になるとそうはいきません。そこで、x についての方程式を解いて解を求めるには、等式の性質を利用して、「$x = □$」という形になるように変形をすることが、基本的な解き方になります。

【例題 1 − 2】

次の方程式を解きなさい。

$$x - 12 = 3$$

＜解説＞

「$x = □$」の形にするには左辺の「-12」が邪魔です。これをなくすためにはどうしたらいいでしょう？

$$3 + (-3) = 0, \qquad 5 + (-5) = 0$$

のように絶対値が同じで異符号の 2 数の和は「0」になるので、この例題では「12」を加えれば 0 にすることができます。そこで、等式の性質を利用して、等式の両辺に「12」を加えます。

$$
\begin{aligned}
x - 12 &= 3 \\
x \cancel{- 12 + 12} &= 3 + 12 \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

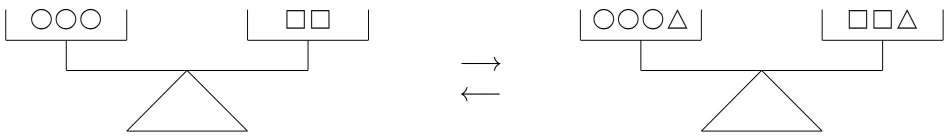
このようにして方程式を解くことができますが、この「$x = 15$」を、例題で与えられた方程式「$x - 12 = 3$」に代入すれば、

$$(\text{左辺}) = 15 - 12 = 3, \qquad (\text{右辺}) = 3$$

となり、左辺の値と右辺の値が一致するので、「$x = 15$」が方程式を成り立たせる値、つまり、方程式の解であることが確認できます。

1.3 等式の性質②（$A=B$ ならば $A-C=B-C$）

次の図のように、「○○○ $=$ □□」とつり合いのとれた状態から、てんびんの左右の皿に同じ重さの △ のおもりを乗せても（図の左から右）、つり合ったままになります。そして、この「○○○△ $=$ □□△」とつり合いのとれた状態から、てんびんの左右の皿から同じ重さの △ のおもりを取ると（右から左）、元の状態に戻るだけなのでつり合ったままになります。



このことから、**「等式の両辺から同じ数を引いても、等式は成り立つ」**ということがわかります。これを数式で表すと、$A=B$ となっているときに、両辺からある数 C を引いても、

$$A-C=B-C$$

と等式が成り立つことになります。また、このことは、「等式の両辺に同じ数を加えても、等式は成り立つ」という等式の性質から、「$A=B$」という等式の両辺に「$-C$」を加えても等式は成り立ったままのはずなので、

$$\begin{aligned} A &= B \\ A+(-C) &= B+(-C) \\ A-C &= B-C \end{aligned}$$

となると考えることもできます。

【例題 1 − 3】

次の方程式を解きなさい。

$$x+19=-5$$

<解説>

$x=$ □ の形にするには左辺の「+19」が邪魔ですね。そこで、

$$19-19=0$$

と「19」を引けば 0 にすることができ、邪魔者を消すことができます。そこで、等式の性質を利用して、等式の両辺から「19」を引くことで、

$$\begin{aligned} x+19 &= -5 \\ x+\cancel{19-19} &= -5-19 \\ x &= -24 \end{aligned}$$

のようにして方程式を解くことができます。

また、$x=-24$ を方程式「$x+19=-5$」に代入すれば、

$$(\text{左辺})=(-24)+19=-5, \qquad (\text{右辺})=-5$$

のようにして、左辺の値と右辺の値が一致することから、方程式を成り立たせる文字の値（方程式の解）であることが確認できます。

1.4 等式の性質③（$A=B$ ならば $A\times C=B\times C$）

$A=B$ になっているとき、「等式の両辺に同じ数を加えても、等式は成り立つ」ので、両辺にある数 A を加えても等式は成り立ちます。

$$A+A=B+A$$

また、「$A=B$」なので A と B は同じ大きさです。つまり、A を B に置き換えても何の問題もないはずなので、上の式の右辺の A を B に置き換えます。

$$A+A=B+B$$

これを続けていくと，

$$\begin{aligned} A+A+A &= B+B+B \\ A+A+A+A &= B+B+B+B \\ &\vdots \end{aligned}$$

となります。そして、同じものの足し算は掛け算を使って表すことができたので、これを、

$$A\times 2=B\times 2,\quad A\times 3=B\times 3,\quad A\times 4=B\times 4,\quad \cdots\cdots$$

のように書き換えることができ、このことから、「**等式の両辺に同じ数を掛けても、等式は成り立つ**」ことがわかります。

【例題 1 − 4】

次の方程式を解きなさい。

$$\frac{1}{2}x=4$$

<解説>

$x=\square$ の形にするには左辺の「$\frac{1}{2}$」が邪魔ですね。これをなくすために「0」を掛ければ

$$\frac{1}{2}\times 0=0$$

として消すことができますが、「0」を掛けると

$$\frac{1}{2}x\times 0=0$$

と求めなければいけない x まで消えてしまいます。これではダメですね。x は

$$x\longrightarrow 1\times x$$

のように、文字式の表し方によって「1×」が省略されていました。つまり、x の係数が「1」になるように変形をすればいいのです。もともと、x の係数は「$\frac{1}{2}$」なので、これを 1 にするためには、「逆数どうしの積は 1

になる」ことを利用して、「$\frac{1}{2}$」の逆数である「2」を等式の両辺に掛けて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= 4 \\ \frac{1}{\cancel{2}^{1}}x \times \cancel{2}^{1} &= 4 \times 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

として、方程式を解くことができます。

また、この方程式の解が正しいことは、$x = 8$ を方程式に代入して、

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\cancel{2}^{1}} \times \cancel{8}^{4} = 4, \qquad (\text{右辺}) = 4$$

左辺の値と右辺の値が一致することから確認できます。

1.5 等式の性質④（$A = B$ ならば $A \div C = B \div C$）

「等式の両辺に同じ数を掛けても、等式は成り立つ」ので、$A = B$ となっているとき、

$$A \times 2 = B \times 2, \quad A \times 3 = B \times 3, \quad A \times 4 = B \times 4, \quad \cdots\cdots$$

となります。このとき、同じ数を掛けて等しくなった状態から同じ数で割ると元に戻ります。

$$\begin{array}{cccc} A = B & A = B & A = B & A = B \\ \times 2 \downarrow \uparrow \div 2 & \times 3 \downarrow \uparrow \div 3 & \times 4 \downarrow \uparrow \div 4 & \times 5 \downarrow \uparrow \div 5 \\ A \times 2 = B \times 2 & A \times 3 = B \times 3 & A \times 4 = B \times 4 & A \times 5 = B \times 5 \end{array}$$

このことから、「**等式の両辺を同じ数で割っても、等式は成り立つ**」ことがわかります。つまり、$A = B$ となっているときに、両辺をある数 C で割っても、

$$A \div C = B \div C \qquad (C \fallingdotseq 0)$$

と等式が成り立つことになります。ただし、「0」で割ることはできません。そのため、ある数 C というのは 0 でない数という条件がつき、そのことを数学では、

$$C \fallingdotseq 0$$

のように書き表します。

【例題 1 − 5】

次の方程式を解きなさい。

$$5x = 15$$

<解説>

$x = \square$ の形にするには左辺の「5」が邪魔ですね。そこで、「5」の逆数である「$\frac{1}{5}$」を等式の両辺に掛けて

$$\begin{aligned} 5x &= 15 \\ \cancel{5}^1 x \times \frac{1}{\cancel{5}^1} &= \cancel{15}^3 \times \frac{1}{\cancel{5}} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

として方程式を解くことができます。

また、この方程式の解が正しいことは、方程式に $x = 3$ を代入して、

$$(\text{左辺}) = 5 \times 3 = 15, \qquad (\text{右辺}) = 15$$

と左辺の値と右辺の値が一致することから確認できます。

しかし、この解き方では「等式の両辺を同じ数で割っても、等式は成り立つ」という等式の性質を利用していませんが、「$\times\frac{1}{5}$」という掛け算は、「$\div 5$」と割り算にすることができるので、

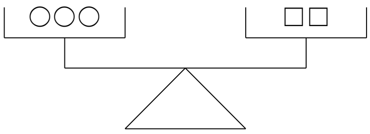
$$5x \times \frac{1}{5} = 15 \times \frac{1}{5} \quad \longrightarrow \quad 5x \div 5 = 15 \div 5$$

のように等式の両辺を「5」で割ることで、今回学習した等式の性質を利用することもできます。ただ、除法（割り算）のままでは、乗法の交換法則や結合法則などを利用することができず、また、割り切れないというわずらわしさもあります。そのため、係数の逆数を掛けて「1」にするという考え方の方が計算しやすいと思いますので、そちらの解き方で統一するようにしてください。

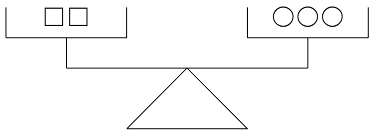
1.6 等式の性質⑤（$A = B$ ならば $B = A$）

次の (i) のようにつり合った状態のてんびんを、見ている側と反対側から見ると、(ii) のように左右逆になって見えます。

(i) ○○○ = □□ ($A = B$)



(ii) □□ = ○○○ ($B = A$)



このとき、つり合ったてんびんを反対側から見たら、急につり合わなくなるなんてことはありません。このことから、$A = B$ となっているときに、等式の左辺と右辺を入れかえても、

$$B = A$$

のように等式は成り立ったままになります。

この等式の性質はとても当たり前のことなので、解説するまでもない内容だとは思いますが、この等式の性質を利用することで、方程式の変形がしやすくなる場合があります。そのため、このような性質を使うことができるのだなということをしっかりと覚えておいてください。

2　1次方程式とその解き方

2.1　移項

方程式は、「**等式の両辺に同じ数を足したり、引いたり、掛けたり、割ったりしても、等式は成り立つ**」という等式の性質を利用し、

$$x = \boxed{}$$

という形に変形することで解くことができます。

例えば、$x-12=3$ のような方程式は、

$$\begin{aligned} x-12 &= 3 \ \cdots\cdots \text{①} \\ x\cancel{-12+12} &= 3+12 \\ x &= 3+12 \ \cdots\cdots \text{②} \\ &= 15 \end{aligned}$$

と変形できますが、ここで、①の式と②の式を観察してみると、

$$x \ \underline{-12} = 3 \quad \longrightarrow \quad x = 3 \ \underline{+12}$$

のように、左辺の「-12」という項が、右辺に「$+12$」という形になって移されたと考えることができます。

同じようにして、$x+19=-5$ という方程式では、

$$\begin{aligned} x+19 &= -5 \ \cdots\cdots \text{③} \\ x\cancel{+19-19} &= -5-19 \\ x &= -5-19 \ \cdots\cdots \text{④} \\ &= -24 \end{aligned}$$

と変形することで解くことができますが、③の式と④の式を観察してみると、

$$x \ \underline{+19} = -5 \quad \longrightarrow x = -5 \ \underline{-19}$$

のように、左辺の「$+19$」という項が、右辺に「-19」という形になって移されたと考えることができます。

以上のことから、等式の性質を利用すると、方程式の一方の辺にある <u>項</u> は、符号を変えて他方の辺に <u>移</u> されることになり、このことを**移項する**といいます。

【例題 2 − 1】

次の方程式で、文字の項を左辺に、数の項を右辺に移しなさい。

(1) $5x-2=9x+6$　　(2) $10x+3=-6x+9$

<解説>

(1) まず、「/」を入れて項に区切ります。（項をしっかりと判断できる人はこの作業はしなくても OK です。）

$$5x/-2 = 9x/+6$$

すると、左辺と右辺にそれぞれ

左辺：$5x,\ -2$　　右辺：$9x,\ 6$

という 2 つずつの項があることがわかります。ここで、

文字の項：$5x,\ 9x$　　数の項：$-2,\ 6$

になるので、右辺にある「$9x$」は左辺に、左辺にある「-2」は右辺に移項します。正の符号は省略されている場合があるので、注意しながらそれぞれの項の符号を変えて、

$$\begin{aligned} 5x-2&=9x+6 \\ 5x-9x&=6+2 \end{aligned}$$

となります。一度に 2 つの項を移項しましたが、慣れるまでは 1 つずつ順に移項すれば問題ありません。

$$\begin{aligned} 5x-2&=\underline{9x}+6 \\ 5x\ -2\ \underline{-9x}&=6 \\ 5x-9x&=6\ +2 \end{aligned}$$

(2) （1）と同じようにして、まず「/」を入れて項に区切ります。

$10x/+3=-6x/+9$

すると、左辺と右辺にそれぞれ

左辺：$10x,\ 3$　　右辺：$-6x,\ 9$

という項があり、

文字の項：$10x,\ -6x$　　数の項：$3,\ 9$

になるので、右辺にある「$-6x$」は左辺に、左辺にある「3」は右辺に移項して、

$$\begin{aligned} 10x\ +3&=\underline{-6x}+9 \\ 10x\ \underline{+6x}&=9\ -3 \end{aligned}$$

【演習 2 − 1】

次の方程式で、文字の項を左辺に、数の項を右辺に移しなさい。

(1) $3x+4=-2x+19$　　(2) $0.4x+3=-1.6x-7$　　(3) $-\frac{1}{2}x+6=0$

2.2　1 次方程式の解き方

方程式を等式の性質を利用して整理したとき、

$$2x + 3 = 0$$

のように、a, b（ただし、$a \fallingdotseq 0$）を数として、

$$ax + b = 0$$

のような形になる方程式を、x の 1 次式の方程式であるので、x についての **1 次方程式**といいます。
1 次方程式は基本的に、

(i) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。

$$3x - 7 = x - 1 \longrightarrow 3x - x = -1 + 7$$

(ii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。

$$3x - x = -1 + 7 \longrightarrow 2x = 6$$

(iii) 文字の係数の逆数を両辺に掛ける。

$$2x = 6 \longrightarrow 2x \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} \longrightarrow x = 3$$

という手順で解を求めることができます。
しかし、1 次方程式の解法手順 (iii) では、「文字の係数の逆数を両辺に掛ける。」となっていますが、

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \ \cdots\cdots \ ① \\ 2x \times \frac{1}{2} &= 6 \times \frac{1}{2} \\ x &= 6 \times \frac{1}{2} \ \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

という計算の①と②の式を観察してみると、左辺にあった x の係数の「2」が、右辺には逆数の「$\frac{1}{2}$」になって移されたと考えることができます。
移項するとき（等号をまたいで項を移すとき）には、

$$「+2」\longleftrightarrow「-2」$$

のように、足し算と引き算（正の符号と負の符号）を反対にしましたが、項のときだけでなく掛け算や割り算においても、一方の辺から他方の辺に移すときは、

$$「\times 2」\longleftrightarrow「\times \frac{1}{2}」（もしくは「\div 2」）$$

のように、掛け算と割り算（分子と分母）を反対にして移すことができると考えることができます。つまり、1 次方程式は、

(i) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。
(ii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。

(iii) 文字の係数を逆数にして右辺に移し、右辺を計算する。

という手順で解くと考えるようにしてください。

【例題 2 − 2】

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x+4=-2x+19$　　(2) $4x-11=10-3x$

＜解説＞

(1) まず、文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項します。

$$3x\ +4=\underline{-2x}+19$$
$$3x\ \underline{+2x}=19\ -4$$

次に、両辺をそれぞれ計算して簡単にします。

$$\begin{aligned}3x+2x&=19-4\\5x&=15\end{aligned}$$

あとは、x の係数「5」を逆数の「$\dfrac{1}{5}$」にして右辺に移します。

$$x=15\times\frac{1}{5}=3$$

この方程式の解が正しいことは、方程式に $x=3$ を代入して、

$$(\text{左辺})=3\times3+4=13,\qquad(\text{右辺})=-2\times3+19=13$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

(2) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項します。

$$4x\ -11=10\underline{-3x}$$
$$4x\ \underline{+3x}=10\ +11$$

次に、両辺をそれぞれ計算して簡単にします。

$$\begin{aligned}4x+3x&=10+11\\7x&=21\end{aligned}$$

そして、x の係数「7」を逆数の「$\dfrac{1}{7}$」にして右辺に移します。

$$x=21\times\frac{1}{7}=3$$

また、この方程式の解が正しいことは、方程式に $x=3$ を代入して、

$$(\text{左辺})=4\times3-11=1,\qquad(\text{右辺})=10-3\times3=1$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

【演習 2 − 2】

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x + 1 = x - 6$ (2) $\dfrac{3}{2}x + 19 = -5$ (3) $0.4x + 3 = -1.6x - 7$

2.3　かっこを含む1次方程式

かっこを含むような1次方程式の問題では、かっこがついたままでは移項することができないため、かっこをはずすという作業が1つ増えます。そのため、1次方程式を解く手順は次のようになります。

(i) かっこをはずす。
(ii) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。
(iii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。
(iv) 文字の係数を右辺に移し、右辺を計算する。

【例題2－3】

次の方程式を解きなさい。

(1) $3(x-2)=6+x$　　(2) $4(x-2)=8(x+6)$

＜解説＞

(1) 分配法則を利用してかっこをはずして解いていきます。

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= 6+x \\ 3\times x+3\times(-2) &= 6+x \\ 3x-6 &= 6+x \\ 3x-x &= 6+6 \\ 2x &= 12 \\ x &= \cancel{12}^{6}\times\frac{1}{\cancel{2}^{1}}=6 \end{aligned}$$

また、この方程式の解が正しいことは、方程式に $x=6$ を代入して、

$$(\text{左辺})=3\times(6-2)=12, \qquad (\text{右辺})=6+6=12$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

(2) （1）と同じようにして解いていきます。

$$\begin{aligned} 4(x-2) &= 8(x+6) \\ 4\times x+4\times(-2) &= 8\times x+8\times 6 \\ 4x-8 &= 8x+48 \\ 4x-8x &= 48+8 \\ -4x &= 56 \\ x &= \cancel{56}^{14}\times\left(-\frac{1}{\cancel{4}^{1}}\right)=-14 \end{aligned}$$

また、この方程式の解が正しいことは、方程式に $x=-14$ を代入して、

$$(\text{左辺})=4\times(-14-2)=-64, \qquad (\text{右辺})=8\times(-14+6)=-64$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

これが基本的な解き方になりますが、かっこの前についている数が「4」と「8」のような倍数の関係になっている方程式では、

$$
\begin{aligned}
4(x-2) &= 8(x+6) \\
x-2 &= \cancel{8}^{2}(x+6)\times\frac{1}{\cancel{4}} \\
x-2 &= 2\times x+2\times 6 \\
x-2 &= 2x+12 \\
x-2x &= 12+2 \\
-x &= 14 \\
x &= -14
\end{aligned}
$$

のように、倍数の小さい方を他方の辺に移すことで約分することができ、数を小さくすることができるので、計算が楽になることがあります。このような計算の仕方もあるのだということを覚えておくといいでしょう。

【演習 2 − 3】

次の方程式を解きなさい。

(1) $5(x-3)=2(x+3)$　　(2) $5(3-5x)=3x-8$　　(3) $4(x-2)+3(5-x)=19$

2.4 分数を含む 1 次方程式

分数を含むような 1 次方程式でも、基本的な解き方は今までと同じです。しかし、分数のままでは通分をして計算をするなどやや面倒なので、等式の性質を利用し、等式の両辺にある数を掛けることによって、分数を含まない方程式に直すと計算が楽になります。このように、分数を含まない式に直すことを**分母をはらう**といい、分数を含む 1 次方程式は、

(i) 分母をはらう（分数を含まない式にする）ために、両辺に分母の最小公倍数を掛ける。
(ii) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。
(iii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。
(iv) 文字の係数を右辺に移し、右辺を計算する。

という手順で解を求めます。

【例題 2 − 4】

次の方程式を解きなさい。

(1) $2x - \dfrac{5}{2} = x + 8$ (2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{2x-1}{3}$

＜解説＞

(1) 分母の「2」をはらうために、方程式の両辺に「2」を掛けます。このとき、辺というかたまりを 2 倍することになります。そのことを明確にするために、かっこをつけて考えるといいでしょう。

$$
\begin{aligned}
\left(2x - \frac{5}{2}\right) \times 2 &= (x+8) \times 2 \\
2x \times 2 - \frac{5}{\cancel{2}^{1}} \times \cancel{2}^{1} &= x \times 2 + 8 \times 2 \\
4x - 5 &= 2x + 16 \\
4x - 2x &= 16 + 5 \\
2x &= 21 \\
x &= 21 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2}
\end{aligned}
$$

ただ、この程度の方程式であれば、分母をはらうことをせずに、

$$
\begin{aligned}
2x - \frac{5}{2} &= x + 8 \\
2x - x &= 8 + \frac{5}{2} \\
x &= \frac{16}{2} + \frac{5}{2} = \frac{21}{2}
\end{aligned}
$$

のようにして解いてしまってもかまいません。このように、「分母をはらう」という手順は必ず行わなければいけないものではなく、それを行うことで計算が楽になる場合があるということをしっかりおさえておいてください。

また、この方程式の解が正しいかことは、$x = \dfrac{21}{2}$ をもとの方程式に代入して、

$$
(\text{左辺}) = 2 \times \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = \frac{37}{2}, \qquad (\text{右辺}) = \frac{21}{2} + 8 = \frac{21}{2} + \frac{16}{2} = \frac{37}{2}
$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認できます。

(2) この方程式は、分子に複数の項を含むような分数であるので、このままの状態で移項することができません。そのため、分母をはらうか、もしくは、

$$\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}(x+1), \qquad \frac{2x-1}{3} = \frac{1}{3}(2x-1)$$

のような式であると考えて、分配法則を利用してかっこをはずすかをする必要があります。ただ、分配法則を利用してかっこをはずす場合には、通分して計算する必要がでてくるので、このような方程式では、分母をはらって計算したほうが計算が楽になります。そこで、分母をはらうために、分母の「2」と「3」の最小公倍数である「6」を方程式の両辺に掛けて計算します。

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2} &= \frac{2x-1}{3} \\
\frac{(x+1)}{\cancel{2}^{1}} \times \cancel{6}^{3} &= \frac{(2x-1)}{\cancel{3}^{1}} \times \cancel{6}^{2} \\
x \times 3 + 1 \times 3 &= 2x \times 2 + (-1) \times 2 \\
3x + 3 &= 4x - 2 \\
3x - 4x &= -2 - 3 \\
-x &= -5 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

分母をはらうために分母の最小公倍数を方程式の両辺に掛けますが、分子に複数の項を含む分数では、見た目には分子にかっこはついていなくても、ひとまとまりであるため、かっこがついているものとして計算する必要があります。その点に注意してください。

また、この方程式の解が正しいことは、$x = 5$ を方程式に代入して、

$$(\text{左辺}) = \frac{5+1}{2} = 3, \qquad (\text{右辺}) = \frac{2 \times 5 - 1}{3} = 3$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

【演習 2 − 4】

次の方程式を解きなさい。

(1) $\dfrac{4x-5}{6} = \dfrac{x+8}{3}$　(2) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2x-3}{4} = 1$　(3) $7x - 5 - \dfrac{8x-5}{3} = 8$

2.5　小数を含む 1 次方程式

小数を含むような 1 次方程式でも、基本的な解き方は今までと同じです。しかし、小数のままでは計算をするのがやや面倒なので、等式の性質を利用し、等式の両辺にある数を掛けることによって、小数を含まない方程式に直すと計算が楽になります。つまり、小数を含む 1 次方程式は、

(i) 両辺を何倍かして、小数を整数にする。
(ii) 文字の項を左辺に、数の項を右辺に移項する。
(iii) 両辺をそれぞれ計算して簡単にする。
(iv) 文字の係数を右辺に移し、右辺を計算する。

という手順で解きます。
このとき、

$$2.1 \times 10 = 21, \qquad 0.21 \times 100 = 21$$

のように、10 倍すると小数点は右に 1 つ、100 倍すると小数点は右に 2 つ、$\cdots$ というように移動するので、そのことを利用して小数を整数にします。

【例題 2 − 5】

次の方程式を解きなさい。
(1) $2.4x - 2.6 = 3.7x$　　(2) $0.3x - 2.8 = -1.3x + 0.4$

<解説>

(1) 小数点を右に 1 つずつ動かせば、小数はすべて整数にすることができるので、方程式の両辺を 10 倍します。

$$\begin{aligned} 2.4x - 2.6 &= 3.7x \\ (2.4x - 2.6) \times 10 &= 3.7x \times 10 \\ 2.4x \times 10 - 2.6 \times 10 &= 37x \\ 24x - 26 &= 37x \\ 24x - 37x &= 26 \\ -13x &= 26 \\ x &= \cancel{26}^{\,2} \times \left(-\frac{1}{\cancel{13}^{\,1}}\right) = -2 \end{aligned}$$

また、この方程式の解が正しいことは、方程式に $x = -2$ を代入して、

$$(\text{左辺}) = 2.4 \times (-2) - 2.6 = -7.4, \qquad (\text{右辺}) = 3.7 \times (-2) = -7.4$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

(2) 小数点を右に 1 つずつ動かせば、小数はすべて整数にすることができるので、方程式の両辺を 10 倍し

ます。

$$\begin{aligned} 0.3x - 2.8 &= -1.3x + 0.4 \\ (0.3x - 2.8) \times 10 &= (-1.3x + 0.4) \times 10 \\ 0.3x \times 10 - 2.8 \times 10 &= -1.3x \times 10 + 0.4 \times 10 \\ 3x - 28 &= -13x + 4 \\ 3x + 13x &= 4 + 28 \\ 16x &= 32 \\ x &= \cancel{32}^{2} \times \frac{1}{\cancel{16}^{1}} = 2 \end{aligned}$$

このとき、方程式の解が正しいことは、方程式に $x = 2$ を代入して、

$$(\text{左辺}) = 0.3 \times 2 - 2.8 = -2.2, \qquad (\text{右辺}) = -1.3 \times 2 + 0.4 = -2.2$$

と、左辺の値と右辺の値が一致することから確認することができます。

分数や小数を含む方程式では、方程式の両辺を何倍かして整数にしましたが、必ずしもそうしなければいけないというわけではありません。分数や小数の計算が気にならないのであれば、そのままの式で計算してかまいません。どちらの方法でも計算してみて、自分が速く正確に解ける方法を身につけるようにしてください。

また、方程式は求めた解を方程式に代入することで、その答えが合っているかどうかの確認ができます。ケアレスミスなどが多い人は特に、そのようにして答えをチェックするという習慣を身につけておくようにしましょう。

【演習 2 − 5】

次の方程式を解きなさい。

(1) $3.2x - 1.6 = 0.7x + 8.4$ (2) $1.7x - 3.8 = -0.7x + 6.6$ (3) $0.5(x - 2) = 1.4 + 0.2x$

2.6 方程式の解から係数の決定

x についての方程式では、方程式の解は、「方程式を成り立たせる x の値」であるので、その値を方程式に代入すれば、等式が成り立ちます。このことから、x についての方程式で、x 以外の文字が 1 種類含まれているとき、方程式の解が得られれば、その値を方程式に代入することで、残った 1 種類の文字についての 1 次方程式を作ることができ、その方程式を解けば、その文字の値を求めることができます。

【例題 2 − 6】

x についての方程式 $x - \dfrac{2x - a}{3} = a + 2$ の解が -2 になるとき、a の値を求めなさい。

<解説>

x についての方程式に、$x = -2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} -2 - \frac{2 \times (-2) - a}{3} &= a + 2 \\ -2 - \frac{-4 - a}{3} &= a + 2 \end{aligned}$$

となります。これは、a についての 1 次方程式になるので、両辺を 3 倍して分母をはらい、この方程式を解きます。

$$\begin{aligned} \left(-2 - \frac{-4 - a}{3}\right) \times 3 &= (a + 2) \times 3 \\ -2 \times 3 - \frac{(-4 - a)}{3} \times 3 &= a \times 3 + 2 \times 3 \\ -6 + 4 + a &= 3a + 6 \\ 3a + 6 &= -2 + a \\ 3a - a &= -2 - 6 \\ 2a &= -8 \\ a &= -8 \times \frac{1}{2} = -4 \end{aligned}$$

【演習 2 − 6】

x についての方程式 $5x - a = 2x + \dfrac{4}{3}$ の解が $\dfrac{2}{3}$ となるとき、a の値を求めなさい。

2.7　比例式

比を $a:b$ と表したとき、a を前項、b を後項といい、a には比べる量、b にはもとにする量が入ります。そして、比 $a:b$ に対し、a を b で割った値 $\dfrac{a}{b}$ を**比の値**といいます。

$a:b$ の比の値を考えるとき、$\dfrac{a}{b}$ なのか $\dfrac{b}{a}$ なのか迷うときがあると思います。a と b のどちらが比べる量で、どちらがもとにする量なのかがはっきりわかっている人は、そのように迷うこともないと思いますが、記号「:」の真ん中に横棒を入れて「÷」にし、そして、割り算を分数で表すといったように、比から比の値に変換できます。

$$a:b \quad\longrightarrow\quad a \div b \quad\longrightarrow\quad a/b \quad\longrightarrow\quad \frac{a}{b}$$

「2 : 3」と「6 : 9」のような 2 つの比があり、その比の値が、

$$2:3 \text{ の比の値}: \frac{2}{3}, \qquad\qquad 6:9 \text{ の比の値}: \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{2}{3}$$

のように同じになるとき、それらの**比は等しい**といい、

$$2:3 = 6:9$$

と表せ、このような式を**比例式**といいます。

また、

$$a:b = c:d \ \cdots\cdots \ ①$$

であるとき、2 つの比の比の値は等しいので、

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

のように書き表すことができ、これも比例式です。そして、分母をはらうため、両辺に「bd」を掛けると、

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{b}d = \frac{c}{\cancel{d}} \times b\cancel{d}$$
$$ad = bc \ \cdots\cdots \ ②$$

となります。①の式から、ad は等号をはさんで外側の項（これを「外項」といいます）の積、bc は等号をはさんで内側の項（これを「内項」といいます）の積になっているので、2 つの比が等しいとき、

$$(\text{外項の積}) = (\text{内項の積})$$

という関係が成り立ちます。

【例題 2 − 7】

次の式で、x の値を求めなさい。

(1) $4:5 = 12:x$　　　(2) $6.3:x = 7:5$

＜解説＞

(1) (外項の積) = (内項の積) より、

$$\begin{aligned} 4 \times x &= 5 \times 12 \\ x &= 5 \times \cancel{12}^{\,3} \times \frac{1}{\cancel{4}^{\,1}} = 15 \end{aligned}$$

と解くことができます。このとき、「5×12」は計算してしまうと数が大きくなってしまい、後で約分するときに計算が面倒になってしまいます。そのため、計算しないでおくことが、計算を楽にするための工夫になります。

(2) (内項の積) = (外項の積) より、

$$\begin{aligned} 7 \times x &= 6.3 \times 5 \\ x &= \cancel{6.3}^{\,0.9} \times 5 \times \frac{1}{\cancel{7}^{\,1}} = 4.5 \end{aligned}$$

または、小数を分数に直して、

$$\begin{aligned} 7 \times x &= \frac{63}{\cancel{10}^{\,2}} \times \cancel{5}^{\,1} \\ x &= \frac{\cancel{63}^{\,9}}{2} \times \frac{1}{\cancel{7}^{\,1}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

のようにして解くこともできます。

【演習 2 − 7】

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+5):(x-9)=3:2$

(2) $(2x+5):5=(3x-2):3$

3　1次方程式の利用

文章問題は、大まかに次のような流れで考えていきます。

(ｉ) 問題文の把握
問題文に書かれている内容を正しく理解しなければ、問題を解くことはできません。そのために、問題文に書かれている言葉の意味や用語の意味を、辞書を引くなどして正しく理解しておく必要があります。また、問題文に書かれている内容を整理するために、図や表などを利用します。

(ii) 式を立てる
問題文に書かれている内容を数学の言葉に翻訳します（数式にする）。このとき、求めるものを x として関係を表す式を作ります。

(iii) 計算する
立てた式を計算して（1 次方程式を解いて）解を求めます。

(iv) 答えの妥当性のチェック
先ほどまでの手順でとりあえずの答えを求めることができますが、その答えが適切かどうかをチェックします。問題文に書かれている内容と答えを比べたときに、明らかに変な数であれば、どこかでミスをしている（立てた式が間違っていたり、計算ミスをしている）可能性があります。

3.1　数に関する問題

【例題 3 − 1】

(1) ある数と 15 との和は、ある数の 4 倍より 9 小さいといいます。ある数を求めなさい。

(2) 連続する 3 つの整数の和が 63 のとき、この 3 つの整数の積を求めなさい。

＜解説＞

(1) 問題文が「〜〜は（が)、〜〜」となっていたら、その「は（が)」を等号「=」に変えても意味が変わらないことがよくあります。この問題でも、「ある数と 15 との和は、ある数の 4 倍より 9 小さい」を

「ある数と 15 との和」=「ある数の 4 倍より 9 小さい」

のようにして書き換えても同じ意味になります。そこで、ある数を x とすると、和は「足し算の答え」であったので、

ある数と 15 との和 $\longrightarrow x + 15$

のようにして表すことができ、また、

ある数の 4 倍より 9 小さい $\longrightarrow 4x - 9$

のように表すことができるので、「ある数と 15 との和」=「ある数の 4 倍より 9 小さい」より

$$x + 15 = 4x - 9$$

という 1 次方程式を作ることができます。あとは 1 次方程式の解き方にしたがって

$$\begin{aligned} x+15&=4x-9\\ x-4x&=-9-15\\ -3x&=-24\\ x&=-\cancel{24}^{8}\times\left(-\frac{1}{\cancel{3}^{1}}\right)=8 \end{aligned}$$

のようにして求めることができます。

(2) 問題文には「連続する 3 つの数の和が 63」と書いてあるので、この「が」を等号「=」に置き換えて

「連続する 3 つの整数の和が 63」$\longrightarrow$「連続する 3 つの整数の和」$=63$

となります。ここで、「連続する 3 つの整数」とは、「3, 4, 5」のように、整数を小さい順（もしくは大きい順）に並べていったときに、連続して並ぶ 3 つの整数のことです。この問題では 3 つの整数の積を求めるので、それを文字 x としたいところですが、それでは 3 つの数の和を文字 x で表すことができません。そこで、3 つの整数の 1 つを文字 x にします。一番小さい整数を x とすると、連続する 3 つの整数は、

$$x,\ x+1,\ x+2$$

のように表すことができるので、

「連続する 3 つの整数の和」$=63$

より、

$$\begin{aligned} x+(x+1)+(x+2)&=63\\ x+x+1+x+2&=63\\ 3x+3&=63\\ 3x&=63-3=60\\ x&=\cancel{60}^{20}\times\frac{1}{\cancel{3}^{1}}=20 \end{aligned}$$

となります。これで方程式を解くことができましたが、油断は禁物です。これを答えにする人がよくいますが、今求めた x は、連続する 3 つの整数の一番小さい整数であって、「3 つの整数の積」ではありませんね。求めた x から、連続する 3 つの整数は、「20, 21, 22」であることがわかったので、この積、つまり、掛け算を計算して答えを求めると

$$20\times21\times22=9240$$

となります。

方程式を作るときに、連続する 3 つの整数のうち、一番小さい整数を x としましたが、真ん中の整数を x にした場合を考えてみたいと思います。このとき、連続する 3 つの整数は

$$x-1,\ x,\ x+1$$

と表すことができるので、

「連続する 3 つの整数の和」$=63$

より

$$\begin{aligned}(x-1)+x+(x+1)&=63\\x-1+x+x+1&=63\\3x&=63\\x&=\cancel{63}^{21}\times\frac{1}{\cancel{3}^{1}}=21\end{aligned}$$

となり、連続する 3 つの整数が

$$20,\ 21,\ 22$$

であることがわかります。
一番小さい整数を x とするときと、真ん中の整数を x とするときではどちらの方が計算しやすいでしょう？おそらくほとんどすべての人が、真ん中の整数を x としたときだと答えると思います。このように、何を文字 x で表すかによって問題の解きやすさが変わることがあります。多くの経験を積まないとなかなか気づきにくいものもありますが、そのようなところにも注意を払えるようにしましょう。また、余裕のある人は、一番大きい整数を x としたときにどのようになるのかも考えてみてください。

3.2 分配に関する問題

【例題 3 − 2】

全校生徒が講堂の長いすに着席するために、長いす 1 脚に 3 人ずつかけると 87 人がかけられなくなり、5 人ずつかけるとちょうどかけられ、長いすが 3 脚余ります。この学校の全生徒数は何人か求めなさい。

＜解説＞

問題文から、「3 人」、「87 人」、「5 人」といった「人数」に関することと、「3 脚」といった「長いすの数」に関することが書かれていることがわかります。つまり、人数の関係を式にするか、もしくは、長いすの数の関係を式にすれば方程式を作ることができそうです。

そこで、求めたい全生徒数を x 人として文字を使って表すと、「長いす 1 脚に 3 人ずつかけると 87 人がかけられなくなる」ことから、長いすの数は

$$(\text{長いすの数}) = \frac{x-87}{3}\ (\text{脚})$$

と表され、また、「5 人ずつかけるとちょうどかけられ、長いすが 3 脚余る」ことから、長いすの数は、

$$(\text{長いすの数}) = \frac{x}{5} + 3\ (\text{脚})$$

と表すこともできます。

このことから、「長いすの数」について 2 つの方法で表すことができたので、

$$\begin{aligned} \frac{x-87}{3} &= \frac{x}{5} + 3 \\ \frac{x-87}{3} \times 15 &= \left(\frac{x}{5} + 3\right) \times 15 \\ 5x - 435 &= 3x + 45 \\ 5x - 3x &= 45 + 435 \\ 2x &= 480 \\ x &= 480 \times \frac{1}{2} = 240\ (\text{人}) \end{aligned}$$

のようにして 1 次方程式を作り、解くことができます。

ただし、この解き方だと、分数を含む 1 次方程式になるので、計算がやや面倒になります。そこで、長いすの数を x 脚として考えると、「長いす 1 脚に 3 人ずつかけると 87 人がかけられなくなる」ことから、全生徒数は、

$$(\text{全生徒数}) = 3x + 87\ (\text{人})$$

と表され、「5 人ずつかけるとちょうどかけられ、長いすが 3 脚余る」ことから、全生徒数は、

$$(\text{全生徒数}) = 5(x-3)\ (\text{人})$$

と表すこともできます。

このことから、「全生徒数」について 2 つの方法で表すことができたので、

$$\begin{aligned}
3x + 87 &= 5(x-3) \\
3x + 87 &= 5x - 15 \\
3x - 5x &= -15 - 87 \\
-2x &= -102 \\
x &= -102 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 51 \text{（脚）}
\end{aligned}$$

のようにして 1 次方程式を作り、解くことができます。

しかし、ここで求めたものは「長いすの数」であって、「全生徒数」ではありません。そのため、全生徒数を表す $(3x+87)$、または、$5(x-3)$ の式に $x = 51$ を代入して全生徒数を求める必要があります。

$$3 \times 51 + 87 = 240 \text{（人）}, \qquad 5 \times (51 - 3) = 240 \text{（人）}$$

3.3 代金に関する問題

【例題 3 − 3】

ある日、1 個 25 円のなすと、1 個 30 円のきゅうりを合わせて 20 個買って、540 円払いました。なすを x 個買ったとして方程式を作り、なすの個数を求めなさい。

<解説>

問題文の内容を正しく理解するために、表などを使って問題文の内容を整理することも有効な方法です。そのとき、問題文に書かれている情報はすべて表の中に書き入れ、表を見ただけで問題文の内容がわかるようにすることが大切です。

この例題では、次のような表を作ることができます。

	なす	きゅうり	合計
1 個の値段 （円）	25	30	
個数 （個）	x		20
代金 （円）	$25x$		540

そして、作成した表の空欄を埋めることで次のようになります。

	なす	きゅうり	合計
1 個の値段 （円）	25	30	
個数 （個）	x	$20-x$	20
代金 （円）	$25x$	$30(20-x)$	540

この表から、文字と数値がわかっている項目に着目すると、代金について方程式を作ることができ、

$$\begin{aligned} 25x+30(20-x)&=540\\ 25x+600-30x&=540\\ 25x-30x&=540-600\\ -5x&=-60\\ x&=-\cancel{60}^{12}\times\left(-\frac{1}{\cancel{5}^{1}}\right)=12\,(\text{個}) \end{aligned}$$

のようにして方程式を解き、解を求めることができます。

3.4 平均に関する問題

平均とは、「でこぼこをならして平らにする」という意味です。つまり、「でこぼこ（ばらばら）になっているものを全部同じにする」ことだと考えることができます。

【例題 3 − 4】

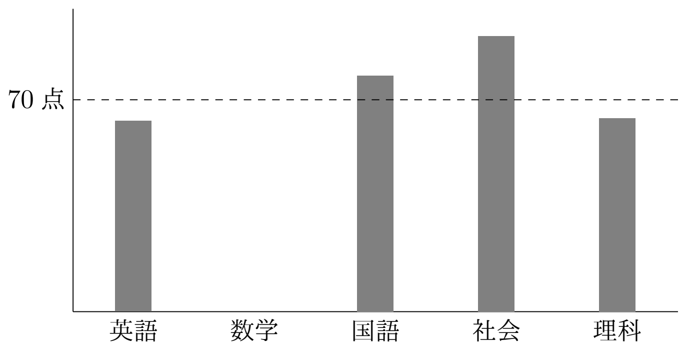
A 君のある定期テストの成績は、下の表のようになりました。

英語	数学	国語	社会	理科
63		78	91	64

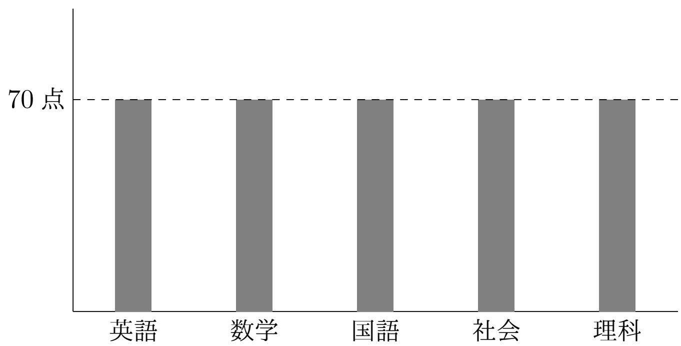
数学のテストが返ってきて平均点を計算してみると、70 点になりました。A 君の数学のテストの点数を求めなさい。

<解説>

まずは、「平均」について考えやすくするために、A 君の定期テストの成績について、次のような棒グラフで表します。このとき、数学のテストの点数はわからないので、その部分は空白になっています。



そして、このテストの平均点が 70 点になったとは、次のグラフのように、このばらばら（でこぼこ）だった点数が、全部同じ 70 点になったということです。



このことから、平均点を求めるためには、テストの点数を合計し、それを科目ごとに等しく分けてあげればよいことになります。

今、数学の点数を求めたいので、その点数を x 点とすれば、合計点は、

$$(\text{合計点}) = 63 + x + 78 + 91 + 64 \text{（点）}$$

となり、その合計点を 5 つの科目に分けてあげれば平均点の 70 点になるはずです。そのため、次のような方程式を作り、それを解くことで数学の点数を求めることができます。

$$\begin{aligned} \frac{63 + x + 78 + 91 + 64}{5} &= 70 \\ 63 + x + 78 + 91 + 64 &= 70 \times 5 \\ x + 296 &= 350 \\ x &= 350 - 296 = 54 \text{（点）} \end{aligned}$$

また、「平均」を考えるときに、ばらばらになっているものを等しくするには、多いものを少ないものに分けてあげる方法でも可能です。つまり、70 点を基準にすると、英語は 7 点低く、国語は 8 点高い。社会は 21 点高く、理科は 6 点低いということがわかるので、「平均との違い」という項目を表に付け加えてあげると、次のようになります。

	英語	数学	国語	社会	理科
点数（点）	63		78	91	64
平均との違い（点）	-7		$+8$	$+21$	-6

そして、この 70 点よりも余分になっている国語と社会の点数（合わせて 29 点）を、英語と理科の足りない点数（合わせて 13 点）だけ穴埋めしてあげればいいのです。しかし、それでも、

$$29 - 13 = 16 \text{（点）}$$

さらに点数は余りますが、その余った点数 16 点は、数学の足りない点数を穴埋めする分に使われるはずです。つまり、数学は平均点の 70 点よりも 16 点だけ低くなることになるので、

$$(\text{数学の点数}) = 70 - 16 = 54 \text{（点）}$$

と求めることができます。

このようにして、平均点を基準にして考えると、扱う数が小さいものになるので計算が楽になる場合があります。このような考え方も有効になるので、そのことも是非おさえておいてください。

3.5 速さに関する問題

【例題 3 − 5】

池のまわりを 1 周するコースがある。このコースを 1 周するとき毎分 240m の速さの自転車と、毎分 80m の速さの徒歩とでは、かかる時間に、12 分 30 秒のちがいがあるといいます。このコース 1 周の長さを求めなさい。

＜解説＞

数学や理科の問題では、単位をそろえて計算する必要があります。この問題では、

「毎分 240m」、「毎分 80m」$\longrightarrow$ 分、m　　　12 分 30 秒 $\longrightarrow$ 分、秒

のように時間の単位は「分」と「秒」の 2 つがあることになります。そこで、「秒」を「分」に直して単位を統一させます。

60 秒 = 1 分

なので、秒を分にするには $\dfrac{1}{60}$ 倍して、

$$30\text{ 秒} = \cancel{30}^{1} \times \frac{1}{\cancel{60}_{2}} = \frac{1}{2}\text{分}$$

となり、

$$12\text{ 分 }30\text{ 秒} \longrightarrow 12\frac{1}{2}\text{分} = \frac{25}{2}\text{分}$$

です。これで、準備が整ったので、問題文の条件から方程式を作ります。

「速さ」に関する問題では、「速さ」、「時間」、「道のり（距離）」を扱うことがほとんどです。そのため、これらに関する項目についての表を作っておくと考えやすくなります。そこで、コース 1 周の長さを求めるので、その長さを x m として、速さ、1 周するのにかかる時間、1 周の長さについて表にまとめると次のようになります。

	速さ	かかる時間	長さ
自転車	毎分 240 m	$\dfrac{x}{240}$ 分	x m
徒歩	毎分 80 m	$\dfrac{x}{80}$ 分	x m

すると問題文の条件から、「かかる時間に 12 分 30 秒のちがい」があることから、

$$\frac{x}{80} - \frac{x}{240} = \frac{25}{2}$$

という方程式を作ることができます。徒歩のほうが自転車よりも遅いので、1 周するのにかかる時間には、

(徒歩で 1 周するのにかかる時間) > (自転車で 1 周するのにかかる時間)

という関係があることに注意してください。あとは、作った方程式を解きますが、分数を含む 1 次方程式なので、分母の最小公倍数である「240」を方程式の両辺に掛けて

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{80}-\frac{x}{240}\right)\times 240 &= \frac{25}{\cancel{2}^{\,1}}\times \cancel{240}^{\,120} \\
\frac{x}{\cancel{80}^{\,1}}\times \cancel{240}^{\,3}-\frac{x}{\cancel{240}^{\,1}}\times \cancel{240}^{\,1} &= 25\times 4\times 30 \\
3x-x &= 3000 \\
2x &= 3000 \\
x &= \cancel{3000}^{\,1500}\times \frac{1}{\cancel{2}^{\,1}} = 1500
\end{aligned}$$

と解くことができ、コース 1 周の長さは 1500 m であることがわかります。

3.6 割合に関する問題

「割合に関する問題」を苦手としている人を多く見かけますが、割合は、「もとにする量の何倍か？」ということを表しているだけです。そのため、割合特有の表し方をわかりやすい表し方に直して考えると、問題文を簡単に感じることができると思います。

【例題 3 − 6】

(1) a の 7 %が 1.4 であるとき、a の値を求めなさい。

(2) ある商品を定価の 2 割引で買うと 960 円になります。この商品の定価を求めなさい。

＜解説＞

(1) 問題文を書き直すと、

「a の 7 %が 1.4」$\longrightarrow$「a の $\dfrac{7}{100}$ 倍が 1.4」

となります。さらに、「が」を等号「=」にすれば

「a の 7 %が 1.4」$\longrightarrow$「a の $\dfrac{7}{100}$ 倍」$= 1.4$

のようにして、割合の問題を非常に簡単な文章題に変えることができます。このことから a の値は

$$a \times \frac{7}{100} = 1.4$$

$$a = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{10}^{1}} \times \frac{\cancel{100}^{10}}{\cancel{7}^{1}} = 20$$

(2) 求める定価を x 円として問題文を書き直すと、

「定価の 2 割引で買うと 960 円」$\longrightarrow$「x 円の 2 割引で買うと 960 円」

$\longrightarrow$「x 円の $\dfrac{1}{5}$ 倍を引いた値段で買うと 960 円」

となります。x 円の $\dfrac{1}{5}$ 倍は「$\dfrac{1}{5}x$ 円」なので、それを引いた値段ということは

$$x - \frac{1}{5}x\ (\text{円})$$

ということになります。その値段が 960 円になるので、

$$x - \frac{1}{5}x = 960$$

という方程式を作ることができます。分数を含む 1 次方程式なので、分母をはらうために方程式の両辺を 5 倍して、

$$\left(x - \frac{1}{5}x\right) \times 5 = 960 \times 5$$

$$x \times 5 - \frac{1}{\cancel{5}^{1}} x \times \cancel{5}^{1} = 4800$$

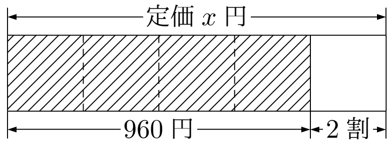
$$5x - x = 4800$$

$$4x = 4800$$

$$x = \cancel{4800}^{1200} \times \frac{1}{\cancel{4}^{1}} = 1200\ (\text{円})$$

となり、定価は 1200 円であることがわかります。

また、問題文の様子を図で表してみると、右図のように、定価 x 円の 2 割引き、つまり、定価 x 円の $\dfrac{1}{5}$ 倍を取り除いた部分（図の斜線部分）が 960 円ということになるので、x 円の $\dfrac{4}{5}$ 倍が 960 円ということになります。このことから、



$$x \times \frac{4}{5} = 960$$

という方程式を作ることができるので、

$$\frac{4}{5}x = 960$$
$$x = \cancel{960}^{240} \times \frac{5}{\cancel{4}^{1}} = 1200\,(\text{円})$$

として解くこともできます。このようにして、割合の問題は図を描くとイメージしやすくなるので、図を使って問題を考える習慣も身につけるようにしましょう。

3.7　食塩水に関する問題

食塩水の濃度は、「食塩水全体に対して食塩がどれだけの割合（何倍）溶けているか」を数値で表したもので、

$$\text{食塩水の濃度 }(\%) = \frac{\text{食塩の重さ (g)}}{\text{食塩水全体の重さ (g)}} \times 100$$

という式で求めることができます。例えば、食塩水の濃度が 20 %であるとき、食塩水全体の重さに対して $\frac{20}{100}$ 倍が食塩の重さということを表しています。

【例題 3 − 7】

8 %の食塩水 500 g と 10 %の食塩水 350 g とを混ぜ合わせた食塩水を 5 %の食塩水にするためには、何 g の水を加えればよいか求めなさい。

＜解説＞

食塩水は、食塩と水で作ることができ、その重さによって濃度が決まることになるので、「食塩水の重さ」、「食塩の重さ」、「水の重さ」を表にまとめ考えることで、食塩水に関する問題は解きやすくなります。

そこで、加える水の重さを x g として表にまとめると次のようになります。ただし、食塩水に関する問題では、食塩の重さに着目することが多いので、水の重さについては省略できる場合があります。

	8 %の食塩水	10 %の食塩水	5 %の食塩水
食塩水の重さ (g)	500	350	$850 + x$
食塩の重さ (g)	$500 \times \frac{8}{100}$	$350 \times \frac{10}{100}$	$(850 + x) \times \frac{5}{100}$
水の重さ (g)			

このことから、食塩の重さに着目すると、

$$500 \times \frac{8}{100} + 350 \times \frac{10}{100} = (850 + x) \times \frac{5}{100}$$

という x についての方程式を作ることができるので、この方程式を解けば、

$$\begin{aligned}(850 + x) \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{100}} &= \cancel{500}^{100} \times \frac{8}{\cancel{100}} + \cancel{350}^{70} \times \frac{10}{\cancel{100}} \\ 850 + x &= 800 + 700 \\ x &= 1500 - 850 = 650 \text{ (g)}\end{aligned}$$

よって、加えた水の重さは 650 g であることがわかります。

【演習 3 − 7】

8 %の食塩水 100 g に、水 160 g と食塩を加えたら、10 %の食塩水ができました。加えた食塩の量を求めなさい。