【数学 A】図形の性質

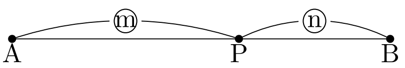
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　三角形と比

1.1　線分の内分・外分



右の図のように、線分 AB 上に点 P があり、

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$　（$m,\ n$ は正の整数）

であるとします。

このとき、点 P は線分 AB の**内**部で線分を $m : n$ の比に**分**割しているので、

「P は AB を $m : n$ の比に**内分する**」

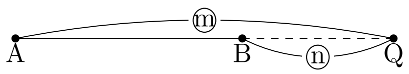
といい、点 P のことを**内分点**といいます。

また、次の図のように、線分 AB の延長線上に点 Q があり、

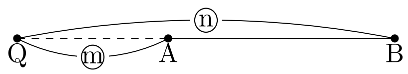
$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$　（$m,\ n$ は正の整数）

であるとします。

(i) $m > n$



(ii) $m < n$



このとき、点 Q は線分 AB の**外**部で線分を $m : n$ の比に**分**割していると考えられるので、

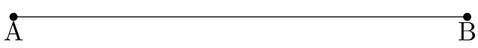
「Q は AB を $m : n$ の比に**外分する**」

といい、点 Q のことを**外分点**といいます。

【例題 1 － 1】

線分 AB に対して、次の点を図示しなさい。

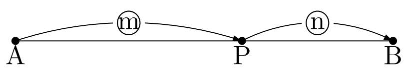
(1) 線分 AB を $4 : 1$ に内分する点 P　　(2) 線分 AB を $4 : 1$ に外分する点 Q



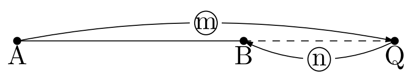
＜解説＞

線分 AB を $m : n$ に内分（外分）する場合、点 A をスタート点として m だけ進んで内分（外分）点に到達し、その点を中継点として、そこからまた n だけ進んでゴール点 B に到達するというイメージです。

(i) 線分 AB を $m : n$ の比に内分

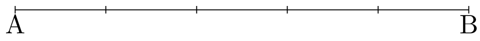


(ii) 線分 AB を $m : n$ の比に外分

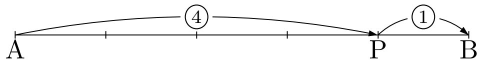


内分する場合は、線分 AB 間を $m+n$ かけて進むので、$m+n$ 分割すると内分点を図示しやすく、外分する場合は、線分 AB 間を $|m-n|$ かけて進むことになるので、$|m-n|$ 分割すると外分点を図示しやすくなります。

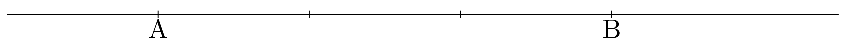
(1) 線分 AB を 4 : 1 に内分するので、まずは線分 AB を 5 $(=4+1)$ 分割します。



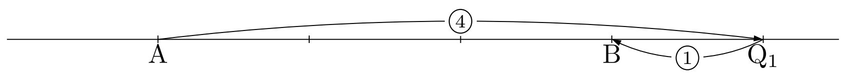
そして、点 A から出発し、4 進んで内分点 P、そこから 1 進んで点 B に到達するので、次の図のようになります。



(2) 線分 AB を 4 : 1 に外分するので、まずは線分 AB を 3 $(=4-1)$ 分割し、線分 AB を延長しておきます。



そして、点 A から出発し、4 進んで外分点 Q、そこから 1 進んで点 B に到達するので、次の図のようになります。

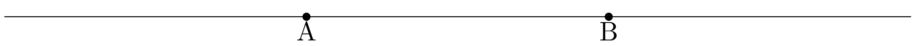


【演習 1 − 1】

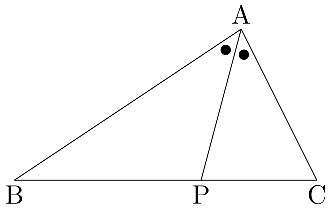
線分 AB に対して、次の点を図示しなさい。

(1) 線分 AB を 1 : 3 に内分する点 P

(2) 線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q



1.2 三角形の内角の二等分線と比



右の図のように、$\triangle$ABC の $\angle$A の二等分線と対辺 BC との交点を P とします。

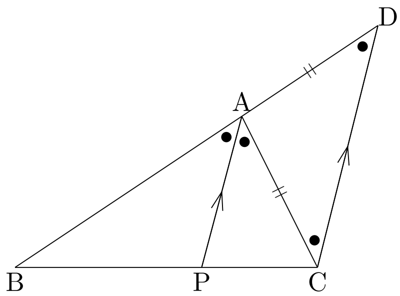
$$\angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{CAP} \ \cdots\cdots\ ①$$

また、頂点 C を通り、AP に平行な直線を引き、BA の延長との交点を D とすると、平行線の同位角、錯角は等しくなるので、

$$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{BAP}\ (\text{同位角})\ \cdots\cdots\ ②, \qquad \angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{CAP}\ (\text{錯角})\ \cdots\cdots\ ③$$

となります。

①〜③より、



$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ADC}$$

このことから、$\triangle$ACD は二等辺三角形であることがわかるので、

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} \ \cdots\cdots\ ④$$

となります。

また、

$$\mathrm{AP} \parallel \mathrm{DC}$$

より、平行線と線分の比の関係から

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AD} \ \cdots\cdots\ ⑤$$

となり、④, ⑤より

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

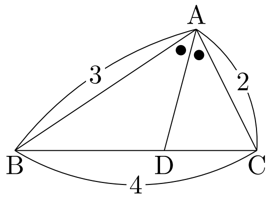
という関係が導き出され、

$\triangle$ABC の$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点は、内角をはさむ 2 辺の比 (AB : AC) に内分する

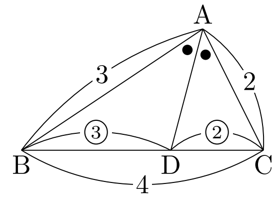
ことがわかります。

【例題 1 − 2】

$\triangle$ABC において、$\angle$A の二等分線が対辺 BC と交わる点を D とします。AB$= 3$, AC$= 2$, BC$= 4$ のとき、BD の長さを求めなさい。



＜解説＞



内角の二等分線とその対辺の交点は、内角をはさむ 2 辺の比に、対辺を内分する点になります。

このことから、

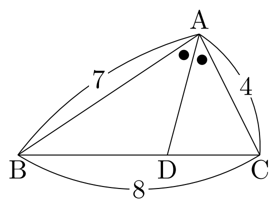
$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 3 : 2$$

となるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{BD} &= \mathrm{BC} \times \frac{3}{5} \\ &= 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}\end{aligned}$$

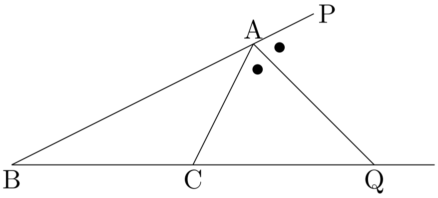
【演習 1 − 2】

△ABC において、∠A の二等分線が対辺 BC と交わる点を D とします。AB= 7, AC= 4, BC= 8 のとき、DC の長さを求めなさい。



1.3 三角形の外角の二等分線と比

右の図のように、辺 AB の延長上にある点を P、△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とします。



また、頂点 C を通り、AQ に平行な直線を引き、AB との交点を D とすると、平行線の同位角、錯角は等しくなるので、

$$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{PAQ}\ (\text{同位角}), \qquad \angle \mathrm{DCA} = \angle \mathrm{CAQ}\ (\text{錯角})$$

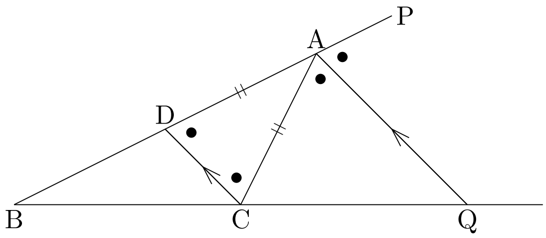
となります。

すると、△ADC は

$$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{ACD}$$

より二等辺三角形になるので、

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} \ \cdots\cdots\ ①$$



となります。

また、

$$\mathrm{AQ} \parallel \mathrm{DC}$$

より、平行線と線分の比の関係から

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{CQ} = \mathrm{BA} : \mathrm{DA} \ \cdots\cdots\ ②$$

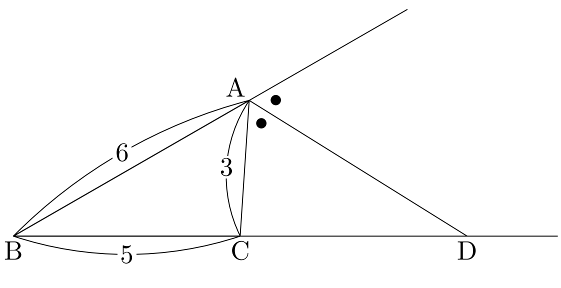
となり、①, ②より

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

という関係が導き出されます。

【例題 1 − 3】

△ABC において、頂点 A の外角の二等分線が対辺 BC の延長と交わる点を D とします。AB = 6, BC = 5, CA = 3 のとき、CD の長さを求めなさい。



＜解説＞

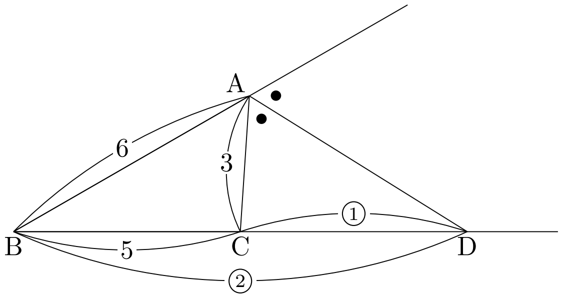
先に導出したように、外角の二等分線とその対辺の延長との交点は、その内角をはさむ 2 辺の比に対辺を外分する点になります。

このことから、

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}:\mathrm{DC} &= \mathrm{AB}:\mathrm{AC} \\ &= 6:3 = 2:1 \end{aligned}$$

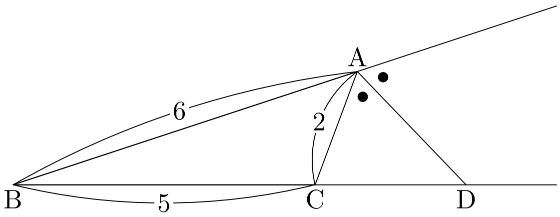
となるので、

$$\mathrm{CD} = \mathrm{BC} = 5$$

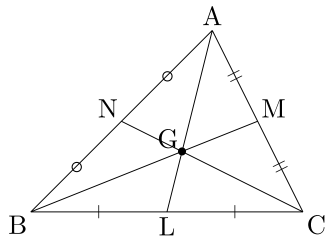


【演習 1 − 3】

△ABC において、頂点 A の外角の二等分線が対辺 BC の延長と交わる点を D とします。AB $=6$, BC $=5$, CA $=2$ のとき、CD の長さを求めなさい。



1.4　三角形の重心



三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分（右図の線分 AL, BM, CN）を**中線**といいます。

三角形の 3 本の中線には、

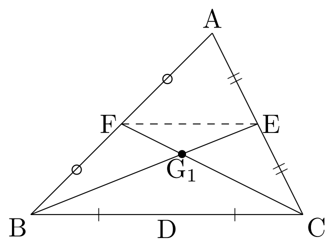
「三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり、その交点は、それぞれの中線を 2 : 1 に内分する」

という性質があり、その交点（点 G）を、三角形の**重心**といいます。

【例題 1 － 4】

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり、その交点はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分することを証明しなさい。

＜証明＞



$\triangle$ABC において、辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とし、2 本の中線 BE と CF の交点を G_1 とする。

点 E, F はそれぞれ辺 AC, AB の中点なので、中点連結定理より

$$\mathrm{FE} \parallel \mathrm{BC} \ \cdots\cdots\ ①$$

$$\mathrm{BC} = 2\mathrm{FE} \ \cdots\cdots\ ②$$

となり、また、$\triangle G_1BC$ と $\triangle G_1EF$ において、平行線の錯角は等しいので、①より、

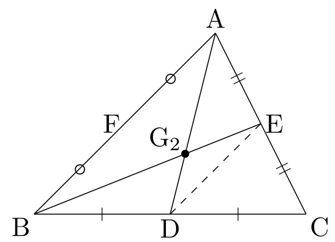
$$\angle G_1BC = \angle G_1EF, \quad \angle G_1CB = \angle G_1FE$$

2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle G_1BC \backsim \triangle G_1EF \ \cdots\cdots\ ③$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので、②, ③より、

$$BG_1 : EG_1 = BC : EF = 2 : 1 \ \cdots\cdots\ ④$$



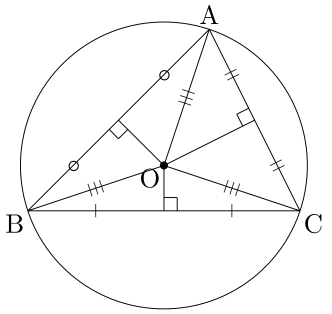
次に、$\triangle$ABC において、2 本の中線 BE と AD の交点を G_2 とすると、同様にして

$$BG_2 : EG_2 = AB : DE = 2 : 1 \ \cdots\cdots\ ⑤$$

④, ⑤より、点 G_1 と点 G_2 は、中線 BE を 2 : 1 に内分する点であるので一致する。

以上のことから、3 本の中線は 1 点で交わり、その交点はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する。

1.5　三角形の外心



三角形の 3 辺の垂直二等分線には、

「三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる」

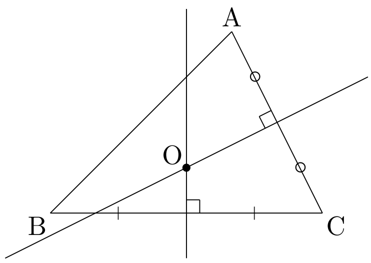
という性質があり、その交点（点 O）を**外心**といいます。

また、外心（点 O）を中心として、三角形の 3 つの頂点（A, B, C）を通る円をかくことができ、この円を、三角形に対して 外 側で 接 する 円 であるので、**外接円**といいます。

【例題 1 − 5】

三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わることを証明しなさい。

<証明>

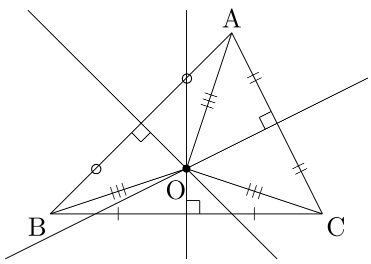


△ABC において、2 辺 BC, CA の垂直二等分線の交点を O とすると、辺 BC の垂直二等分線上の点は、2 点 B, C から等しい距離にあるので、

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

同じように、辺 CA の垂直二等分線上の点も、2 点 C, A から等しい距離にあるので、

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \quad \cdots\cdots \text{②}$$



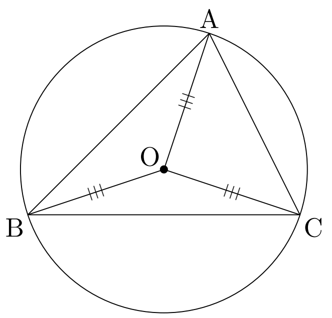
となり、①, ②より

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

また、2 点から等しい距離にある点は、その 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるので、③より、点 O は辺 AB の垂直二等分線上にもある。

以上のことから、三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

（証明終わり）



①, ②より

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

であるので、点 O は 3 つの頂点 A, B, C から等しい距離にある点になり、点 O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができます。

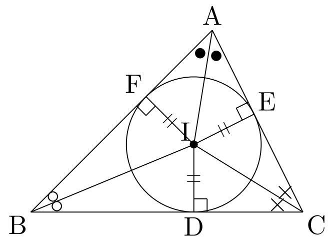
1.6　三角形の内心

三角形の 3 つの内角の二等分線には、

「三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる」

という性質があり、その交点（点 I）を**内心**といいます。

また、内心（点 I）を中心として、三角形の 3 辺（AB, BC, CA）に接する円をかくことができ、この円を、三角形に対して内側で接する円であるので、**内接円**といいます。



【例題 1 － 6】

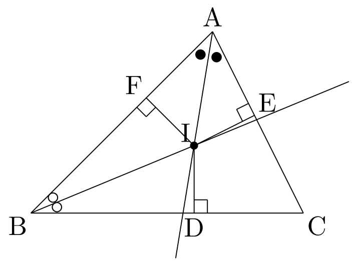
三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わることを証明しなさい。

<証明>

△ABC において、∠A と ∠B の二等分線の交点を I とし、点 I から辺 BC, CA, AB にそれぞれ垂線 ID, IE, IF を下ろす。

∠A の二等分線上の点は、2 辺 AB, AC から等しい距離にあるので、

IE = IF ……. ①



同じように、∠B の二等分線上の点も、2 辺 BA, BC から等しい距離にあるので、

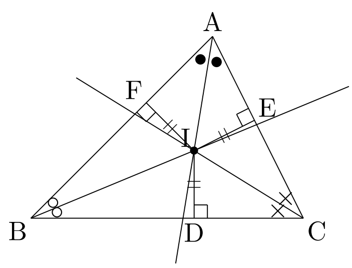
IF = ID ……. ②

となり、①, ②より

ID = IE ……. ③

また、2 辺から等しい距離にある点は、その 2 辺が作る角の二等分線上にあるので、③より、点 I は ∠C の二等分線上にもある。

以上のことから、三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

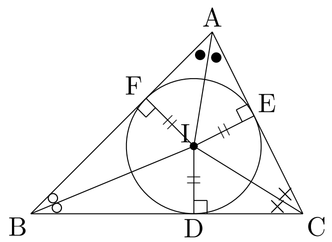


（証明終わり）

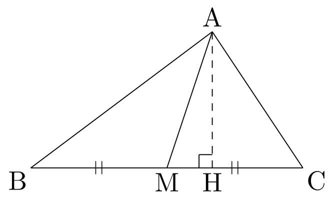
①, ②より

ID = IE = IF

であるので、点 I は 3 点 D, E, F から等しい距離にある点になり、点 I を中心として 3 つの点 D, E, F を通る円（3 辺 AB, BC, CD に接する円）をかくことができます。



1.7 中線定理



右図の △ABC について、頂点 A から垂線 AH を下ろし、中線を AM とします。

M は辺 BC の中点であるので、

$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM}$$

となり、線分 BH, CH はそれぞれ

$$\mathrm{BH} = \mathrm{BM} + \mathrm{MH}, \qquad \mathrm{CH} = \mathrm{CM} - \mathrm{MH} = \mathrm{BM} - \mathrm{MH}$$

と表すことができます。

ここで、△ABH に着目すると、三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BH}^2 + \mathrm{AH}^2 \\ &= (\mathrm{BM} + \mathrm{MH})^2 + \mathrm{AH}^2 \\ &= \mathrm{BM}^2 + 2\mathrm{BM} \cdot \mathrm{MH} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2 \ \cdots\cdots \ ①\end{aligned}$$

同じように △AHC に着目すると、三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{AH}^2 \\ &= (\mathrm{BM} - \mathrm{MH})^2 + \mathrm{AH}^2 \\ &= \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{BM} \cdot \mathrm{MH} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2 \ \cdots\cdots \ ②\end{aligned}$$

となるので、① + ② より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= (\mathrm{BM}^2 + \cancel{2\mathrm{BM} \cdot \mathrm{MH}} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2) + (\mathrm{BM}^2 - \cancel{2\mathrm{BM} \cdot \mathrm{MH}} + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2) \\ &= 2(\mathrm{BM}^2 + \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2) \\ &= 2\{\mathrm{BM}^2 + (\mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2)\} \ \cdots\cdots \ ③\end{aligned}$$

さらに、△AMH に着目すると、三平方の定理より

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{AH}^2$$

であるので、③の式は

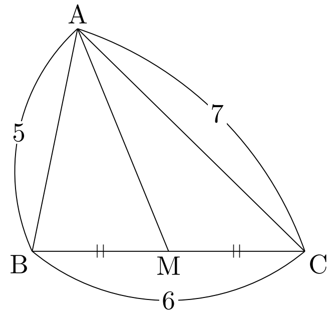
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

のように表すことができ、これを**中線定理**といいます。

【例題 1 − 7】

△ABC で、AB = 5, BC = 6, CA = 7 のとき、辺 BC の中点を M とした中線 AM の長さを求めなさい。

＜解説＞



$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = 3$$

であるので、中線定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2 &= 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2) \\ 5^2 + 7^2 &= 2(\mathrm{AM}^2 + 3^2) \\ 2(\mathrm{AM}^2 + 9) &= 74 \\ \mathrm{AM}^2 &= \cancel{74}^{37} \times \frac{1}{\cancel{2}} - 9 = 28 \end{aligned}$$

$\mathrm{AM} > 0$ より　$\mathrm{AM} = 2\sqrt{7}$

【演習１－７】

△ABC において、辺 BC の中点を M とします。$\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = 5$, $\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ のとき、a の値を求めなさい。

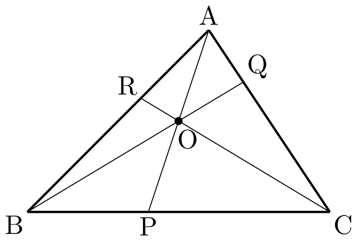
1.8 チェバの定理

次の図のように、△ABC の頂点 A, B, C と、この三角形の辺やその辺の延長上にない点 O とを結ぶ直線が、対辺またはその延長と、それぞれ P, Q, R で交わるとき、

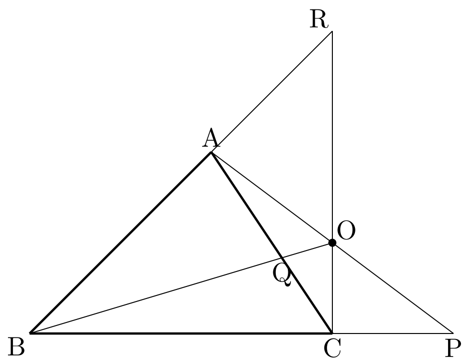
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

という関係が成り立ち、これを**チェバの定理**といいます。

(i) 点 O が △ABC の内部

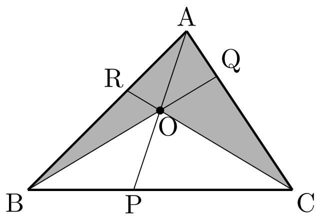


(ii) 点 O が △ABC の外部

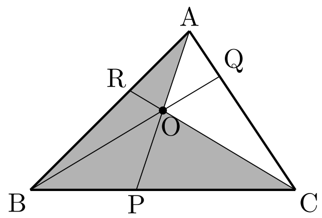


点 O が △ABC の内部になるとき（この場合が主に利用されます）、面積と線分の比の関係から次のように表すことができます。

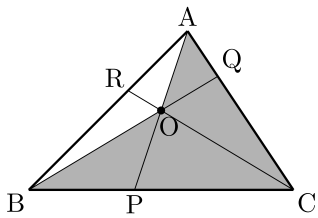
① △OAB : △OCA = BP : PC　② △OBC : △OAB = CQ : QA　③ △OCA : △OBC = AR : RB



$$\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$$



$$\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}$$



$$\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$$

このことから、

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}=1$$

となり、チェバの定理が成り立つことがわかります。

【例題 1 − 8】

△ABC において、辺 AB を 2 : 3 に、辺 AC を 4 : 3 に、それぞれ内分する点を D, E とし、BE と CD との交点を O とする。
頂点 A から、点 O を通る直線が、辺 BC と交わる点を F とするとき、BF : FC の値を求めなさい。

＜解説＞

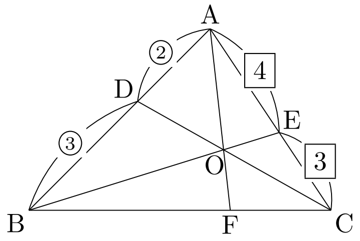
△ABC において、チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \cdot \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} = 2$$

$$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 2 : 1$$

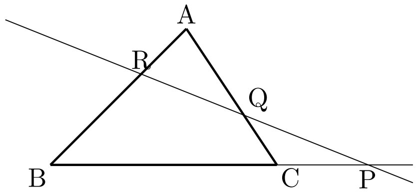


【演習 1 − 8】

△ABC において、辺 AB を 3 : 4 に、辺 AC を 5 : 6 に、それぞれ内分する点を D, E とし、BE と CD との交点を O とする。
頂点 A から、点 O を通る直線が、辺 BC と交わる点を F とするとき、BF : FC の値を求めなさい。

1.9 メネラウスの定理

右図のように、△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない 1 つの直線と、それぞれ P, Q, R で交わるとき、

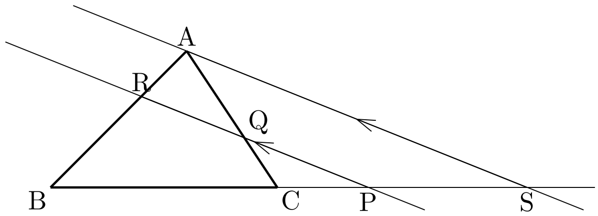


$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

という関係が成り立ち、これを**メネラウスの定理**といいます。

△ABC の頂点 A を通り、直線 PR に平行な直線を引き、直線 BC との交点を S とします。

平行線と線分の比の関係から、



$$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=\mathrm{SP}:\mathrm{PB},\quad \mathrm{CQ}:\mathrm{QA}=\mathrm{CP}:\mathrm{PS}$$

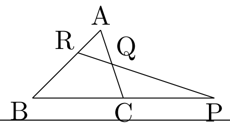
このことから、

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PS}}=1$$

となり、メネラウスの定理が成り立つことがわかります。

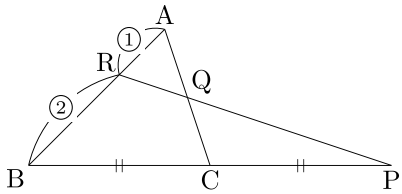
【例題 1 − 9】

右の図の三角形で、2AR = RB, BC = CP, PR と AC の交点を Q とするとき AQ : QC を求めなさい。



＜解説＞

△ABC と直線 PR について、メネラウスの定理より



$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

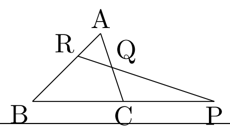
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1:1$$

【演習 1 − 9】

右の図の三角形で、2AR = RB, BC = CP, PR と AC の交点を Q とするとき PQ : QR を求めなさい。

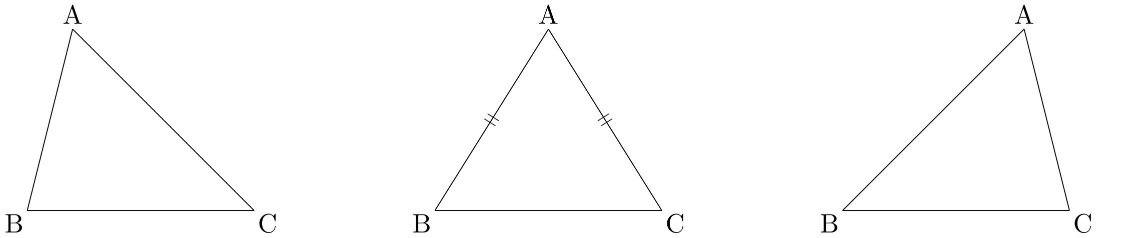


2 三角形の辺と角

2.1 三角形の辺と角の大小

$\triangle$ABC において、2 辺 AB と AC の関係には、次の 3 つの場合が考えられます。

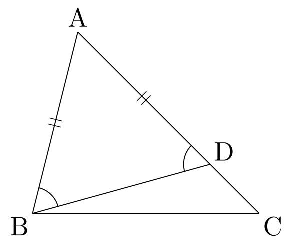
(i) AB $<$ AC (ii) AB $=$ AC (iii) AB $>$ AC



このとき、それぞれの辺に対する角の大小関係がどのようになるのかを考えたいと思います。

(i) AB $<$ AC のとき

辺 AC 上に AB $=$ AD となる点 D をとると、$\triangle$ABD は二等辺三角形になるので、



$$\angle B > \angle ABD = \angle ADB \cdots\cdots ①$$

また、$\triangle$DBC に着目することで

$$\angle ADB = \angle C + \angle DBC > \angle C \cdots\cdots ②$$

となるので、①, ②より

$$\angle C < \angle B$$

という関係が成り立ちます。

(ii) AB $=$ AC のとき

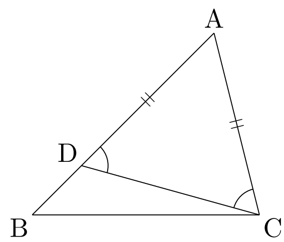
$\triangle$ABC は二等辺三角形なので 2 つの底角は等しく、

$$\angle B = \angle C$$

となります。

(iii) AB $>$ AC のとき

辺 AB 上に AC $=$ AD となる点 D をとると、$\triangle$ADC は二等辺三角形になるので、



$$\angle C > \angle ACD = \angle ADC \cdots\cdots ③$$

また、$\triangle$DBC に着目することで

$$\angle ADC = \angle B + \angle DCB > \angle B \cdots\cdots ④$$

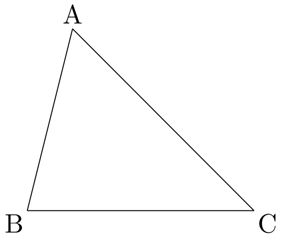
となるので、③, ④より

$$\angle C > \angle B$$

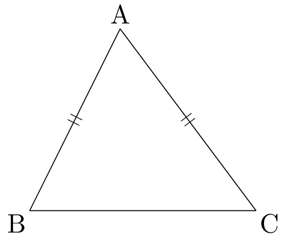
という関係が成り立ちます。

次に、$\triangle$ABC において、$\angle$B と $\angle$C の関係にも次の 3 つの場合が考えられるので、それぞれの角に対する辺の大小関係がどのようになるのかを考えます。

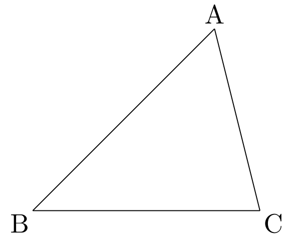
(i) $\angle B > \angle C$



(ii) $\angle B = \angle C$

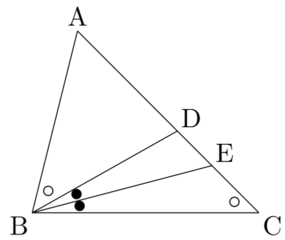


(iii) $\angle B < \angle C$



(i) $\angle B > \angle C$ のとき

辺 AC 上に $\angle ABD = \angle C$ となる点 D をとり、$\angle$DBC の二等分線と AC との交点を E とします。このとき、



$$\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE = \circ + \bullet \qquad \angle AEB = \angle ACB + \angle EBC = \circ + \bullet$$

であるので、

$$\angle ABE = \angle AEB$$

となり、$\triangle$ABE は二等辺三角形であるから、

$$AB = AE \qquad \cdots\cdots ⑤$$

また、点 E は 2 点 A, C の間の点であるので、

$$AE < AC \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤, ⑥より

$$AB < AC$$

という関係が成り立ちます。

(ii) $\angle B = \angle C$ のとき

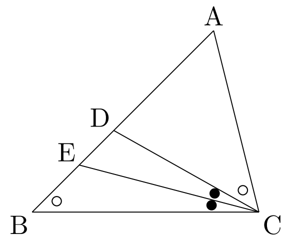
$\triangle$ABC は 2 つの角が等しい三角形であるので二等辺三角形です。つまり、

$$AB = AC$$

となります。

(iii) $\angle B < \angle C$ のとき

辺 AB 上に $\angle ACD = \angle B$ となる点 D をとり、$\angle$DCB の二等分線と AB との交点を E とします。このとき、



$$\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = \circ + \bullet \qquad \angle AEC = \angle ABC + \angle ECB = \circ + \bullet$$

であるので、

$$\angle ACE = \angle AEC$$

となり、$\triangle$AEC は二等辺三角形であるから、

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC} \ \cdots\cdots \ ⑦$$

また、点 E は 2 点 A, B の間の点であるので、

$$\mathrm{AE} < \mathrm{AB} \ \cdots\cdots \ ⑧$$

⑦, ⑧より

$$\mathrm{AC} < \mathrm{AB}$$

という関係が成り立ちます。

以上のことから、$\triangle$ABC において、

(i) $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} \Longleftrightarrow \angle\mathrm{C} < \angle\mathrm{B}$　(ii) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \Longleftrightarrow \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{B}$　(iii) $\mathrm{AB} > \mathrm{AC} \Longleftrightarrow \angle\mathrm{C} > \angle\mathrm{B}$

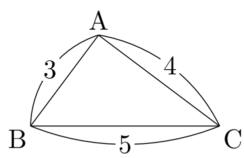
となり、**三角形の辺の大小関係と角の大小関係は一致**します。

【例題 2 − 1】

(1) $\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 5, \mathrm{CA} = 4$ である $\triangle$ABC の 3 つの角の大小を調べなさい。

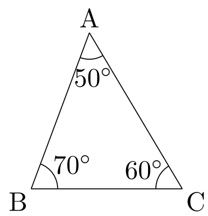
(2) $\angle\mathrm{A} = 50^\circ, \angle\mathrm{B} = 70^\circ$ である $\triangle$ABC の 3 つの辺の長さの大小を調べなさい。

＜解説＞



(1) 三角形の辺の大小関係と角の大小関係は一致するので、

$$\mathrm{AB} < \mathrm{CA} < \mathrm{BC} \text{ より}\quad \angle\mathrm{C} < \angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{A}$$



(2)

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{C} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B}) \\ &= 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ\end{aligned}$$

三角形の辺の大小関係と角の大小関係は一致するので、

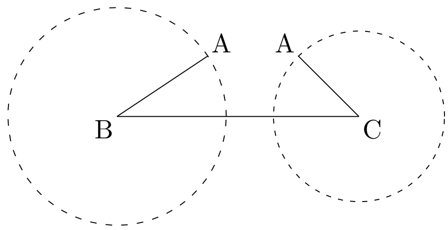
$$\angle\mathrm{A} < \angle\mathrm{C} < \angle\mathrm{B} \text{ より}\quad \mathrm{BC} < \mathrm{AB} < \mathrm{CA}$$

【例題 2 − 1】

(1) $\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 2, \angle\mathrm{C} = 90^\circ$ である $\triangle$ABC の 3 つの角の大小を調べなさい。

(2) $\angle\mathrm{A} = 50^\circ, \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ である $\triangle$ABC の 3 つの辺の長さの大小を調べなさい。

2.2 三角形の成立条件



△ABC において、辺 AB と AC の長さの和が、辺 BC の長さよりも小さい場合、次の図のように辺 AB と AC を結ぶことができず、三角形を作ることができません。

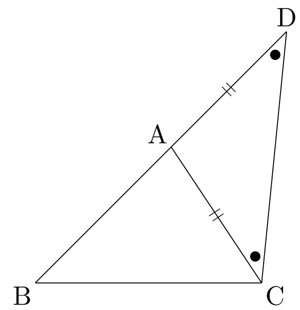
このことからもわかるように、三角形において、

「2 辺の長さの和は、他の 1 辺の長さより大きい」

という関係があります。このことを △ABC を例にとって、

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} > \mathrm{BC}$$

となることを証明します。



右図の △ABC において、辺 AB の延長上に、AC = AD となるように点 D をとります。

このとき、△ACD は二等辺三角形になるので、2 つの底角は等しく

$$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{D}$$

よって、

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BCD} &= \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{ACD} \\ &= \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{D} > \angle\mathrm{D}\end{aligned}$$

となるので、△BCD において、辺と角の大小関係により

$$\mathrm{BD} > \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となります。また、

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BA} + \mathrm{AD} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

であるので、①, ②より

$$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} > \mathrm{BC} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

が成り立ちます。

同様にして証明することで、

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} > \mathrm{AC} \quad \cdots\cdots \text{④} \qquad \mathrm{AC} + \mathrm{BC} > \mathrm{AB} \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

も成り立ちます。

そして、④, ⑤を変形することで

$$\mathrm{BC} > \mathrm{AC} - \mathrm{AB}, \qquad \mathrm{BC} > \mathrm{AB} - \mathrm{AC}$$

となり、

「2 辺の長さの差は、他の 1 辺の長さより小さい」

という関係があることになります。

以上のことから、三角形の 3 辺の長さには

$$|\,\mathrm{AB} - \mathrm{AC}\,| < \mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$$

つまり、

　　2 辺の長さの差 < 1 辺 < 2 辺の長さの和

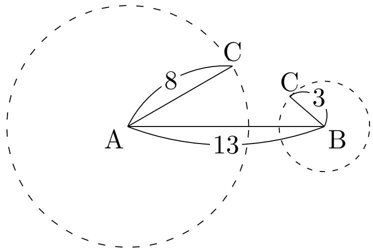
という関係が成り立ち、三角形が成立するための必要十分条件になります。

【例題 2 − 2】

次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するかどうかを調べなさい。

(1) 3, 8, 13　　(2) 3, 11, 11

＜解説＞



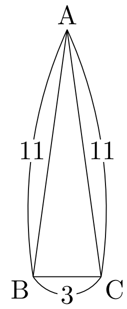
(1) $a = 3,\ b = 8,\ c = 13$ とおくと、$a < b < c$ であるので、

$$a + b = 3 + 8 = 11$$

より

$$a + b < c$$

よって、三角形は存在しない。



(2) $a = 3,\ b = 11,\ c = 11$ とおくと、$a < b = c$ であるので、

$$a + b = 3 + 11 = 14$$

より

$$a + b > c$$

よって、三角形は存在する。

【演習 2 − 2】

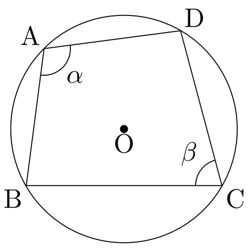
次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するかどうかを調べなさい。

(1) 3, 12, 13　　(2) 2, 2, 10

3 円に内接する四角形

3.1 円に内接する四角形

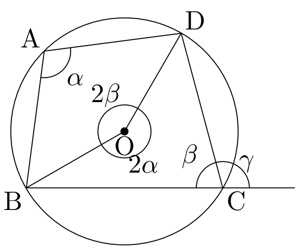
多角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき、その多角形は円の 内 側で 接 するので、円に**内接する**といい、円は多角形の 外 側で 接 するので、多角形の**外接円**といいます。



ここでは、右図のような円 O に内接する四角形 ABCD について考えます。

$$\angle \mathrm{A} = \alpha, \qquad \angle \mathrm{C} = \beta$$

とすると、∠A は弧 BCD に対する円周角、∠C は弧 BAD に対する円周角であるので、それぞれの中心角は、円周角の定理より 2α, 2β となります。



このことから、

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となり、

「**円に内接する四角形において、対角の和は 180°**」

という関係が成り立ちます。

また、∠C の外角を γ とすると、

$$\beta + \gamma = 180^\circ \quad \cdots\cdots \text{②}$$

となるので、①, ②より

$$\alpha = \gamma$$

となり、

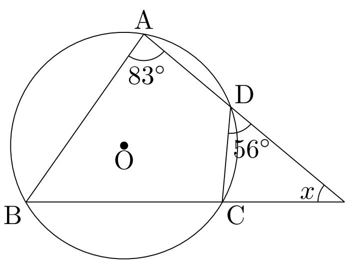
「**円に内接する四角形において、外角は、それと隣り合う内角の対角に等しい**」

という関係も成り立つことになります。

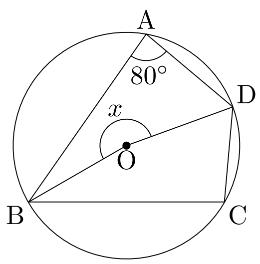
【例題 3 − 1】

点 O が円の中心であるとき、次の x の値を求めなさい。

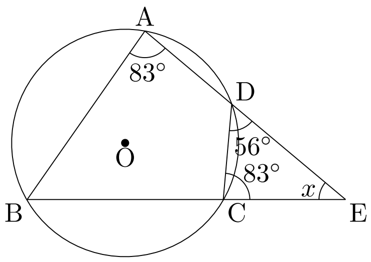
(1)



(2)



＜解説＞

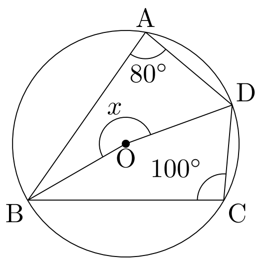


(1) AD と BC の交点を E とすると、

$$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{DCE} = 83^\circ$$

$\triangle$DCE において、

$$x = 180^\circ - (56^\circ + 83^\circ) = 41^\circ$$



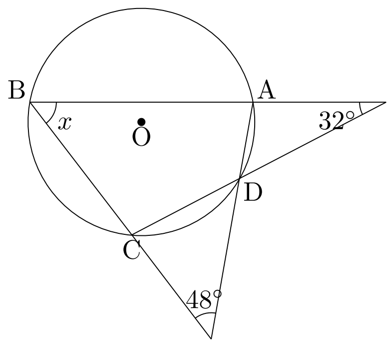
(2)

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C} = 180^\circ$$
$$\angle \mathrm{C} = 180^\circ - \angle \mathrm{A}$$
$$= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$
$$x = 2\angle \mathrm{C}$$
$$= 2 \times 100^\circ = 200^\circ$$

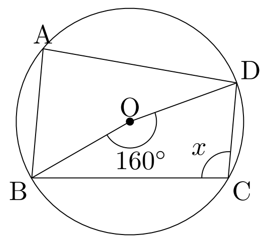
【演習 3 − 1】

点 O が円の中心であるとき、次の x の値を求めなさい。

(1)



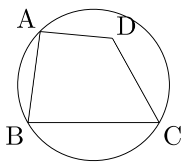
(2)



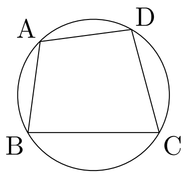
3.2　四角形が円に内接するための条件

三角形は外接円を作図することができたので、必ず円に内接します。そのため、四角形 ABCD の 3 つの頂点 A, B, C を通るような円を作図することはできますが、残りの頂点 D も円周上にあるとは限らないので、四角形の場合は必ず円に内接するとはかぎりません。

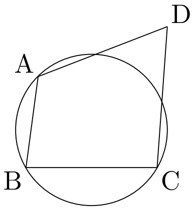
(i) 円に内接しない



(ii) 円に内接する



(iii) 円に内接しない



四角形が円に内接するには、次のような条件が成り立つときです。

(i) 1 組の対角の和が 180°　　(ii) 外角が、それと隣り合う内角の対角に等しい

【例題 3 − 2】

1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを証明しなさい。

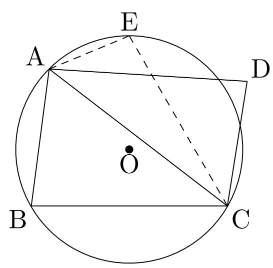
＜解説＞

右図のような四角形 ABCD において、

$\angle B + \angle D = 180^\circ$ ······· ①

であるとする。

また、△ABC の外接円をかき、これを円 O とし、AC に対して B と反対側の円周上に点 E をとる。



このとき、四角形 ABCE は円 O に内接するので、対角の和は 180° になり、

$\angle B + \angle E = 180^\circ$ ······· ②

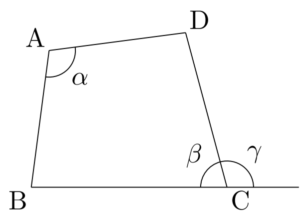
①, ②より

$\angle D = \angle E$

点 D, E は直線 AC に対して同じ側にあるので、円周角の定理の逆より、4 点 A, C, D, E は同一円周上にある。

ここで、△ACE の外接円は円 O であるので、点 D は円 O の円周上に存在する。つまり、4 点 A, B, C, D は円 O の円周上にあることになり、四角形 ABCD は円 O に内接する。

（証明終わり）



もちろん、1 つの外角がそれと隣り合う内角の対角に等しい場合についても、次の図のように、

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta + \gamma = 180^\circ$$

という関係から、結局

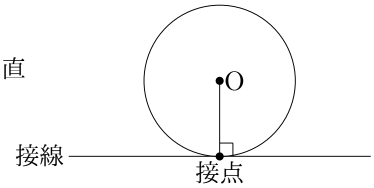
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

のようになり、「1 組の対角の和が 180° である四角形」と同じ条件になるので、円に内接します。

以上のことから、円に内接する四角形に関する定理の逆についても成り立つことがわかります。

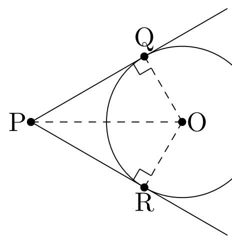
4　円と直線

4.1　円の接線



直線と円がただ 1 点を共有するとき、この直線は円に**接する**といい、この直線を円の**接線**、この共有点を**接点**といいます。

また、円の中心と接点とを結ぶ直線は、円の接線に垂直になります。



右図のように、円 O の外部の点 P から円に接線を引くと、2 本の接線を引くことができ、そのときの接点をそれぞれ Q, R とすると、円外の点 P から接点 Q, R までの距離 PQ, PR を**接線の長さ**といいます。

ここで、△PQO と △PRO に着目すると、

$$\angle \mathrm{PQO} = \angle \mathrm{PRO} = 90^\circ \ \cdots\cdots \ ①$$

また、円の半径は等しいので

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR} \ \cdots\cdots \ ②$$

さらに、PO は共通であるので

$$\mathrm{PO} = \mathrm{PO} \ \cdots\cdots \ ③$$

①〜③より、直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

$$\triangle \mathrm{PQO} \equiv \triangle \mathrm{PRO}$$

となり、合同な図形の対応する線分の長さは等しいので、

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$$

となります。このことから、

「**円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しい**」

ということがわかります。

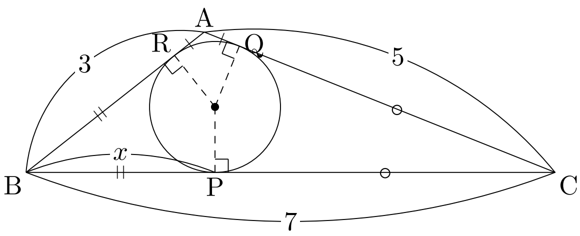
【例題 4 − 1】

AB = 3, BC = 7, CA = 5 である △ABC において、内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とします。

(1) BP = x とするとき、AQ, CQ の長さをそれぞれ x で表しなさい。

(2) BP の長さを求めなさい。

＜解説＞



(1) 円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいので、

$$\mathrm{BP} = \mathrm{BR} = x$$
$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AR} = \mathrm{AB} - \mathrm{BR} = 3 - x$$
$$\mathrm{CQ} = \mathrm{CP} = \mathrm{BC} - \mathrm{BP} = 7 - x$$

(2) (1) より

$$\mathrm{AQ} + \mathrm{CQ} = \mathrm{AC}$$
$$(3 - x) + (7 - x) = 5$$
$$10 - 2x = 5$$
$$2x = 10 - 5 = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

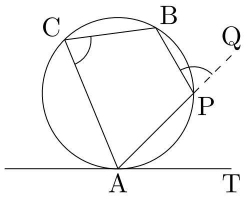
【演習 4 − 1】

AB $= c$, BC $= a$, CA $= b$ である △ABC において、内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とします。

(1) BP $= x$ とするとき、AQ, CQ の長さをそれぞれ x で表しなさい。

(2) BP の長さを求めなさい。

4.2 接弦定理

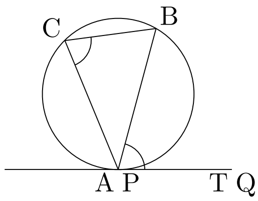


右図のような、円に内接する四角形 APBC を考えます。(直線 AT は点 A における円の接線)

このとき、円に内接する四角形の性質から、「外角は、それと隣り合う内角の対角と等しい」ので、

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BPQ}$$

となります。



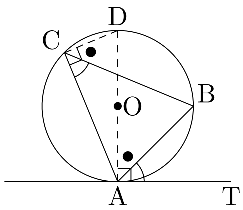
ここで、A, B, C を固定したまま P を円周上に沿って A に近づけていくと、$\angle \mathrm{BPQ}$ と $\angle \mathrm{BAT}$ は一致します。

すると、

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BAT} \quad (= \angle \mathrm{BPQ})$$

という関係が成り立つはずです。ここでは、そのことを証明してみたいと思います。

(i) $\angle \mathrm{BAT}$ が鋭角であるとき



直径 AD を引くと、$\angle \mathrm{BAD}$, $\angle \mathrm{BCD}$ は弧 DB に対する円周角であるので、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BCD} \ \cdots\cdots \ ①$$

円の中心と接点を結んだ直線は接線と垂直に交わるので $\angle \mathrm{DAT} = 90^\circ$。このことから、

$$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{DAT} - \angle \mathrm{BAD} = 90^\circ - \angle \mathrm{BAD} \ \cdots\cdots \ ②$$

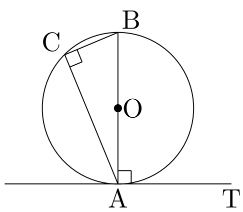
さらに、AD は円 O の直径であるので、$\angle \mathrm{ACD} = 90^\circ$。よって、

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ACD} - \angle \mathrm{BCD} = 90^\circ - \angle \mathrm{BCD} \ \cdots\cdots \ ③$$

①〜③より

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BAT}$$

(ii) $\angle \mathrm{BAT}$ が直角($\angle \mathrm{BAT} = 90^\circ$)のとき

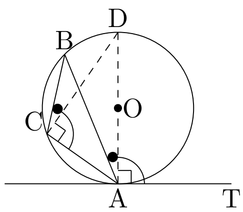


AB は円 O の直径であるので、$\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$ となり、

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BAT}$$

が成り立ちます。

(iii) $\angle \mathrm{BAT}$ が鈍角であるとき



直径 AD を引くと、$\angle \mathrm{BAD}$, $\angle \mathrm{BCD}$ は弧 DB に対する円周角であるので、

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BCD} \ \cdots\cdots \ ①$$

円の中心と接点を結んだ直線は接線と垂直に交わるので $\angle \mathrm{DAT} = 90^\circ$。このことから、

$$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{DAT} + \angle \mathrm{BAD} = 90^\circ + \angle \mathrm{BAD} \ \cdots\cdots \ ②$$

さらに、AD は円 O の直径であるので、$\angle\mathrm{ACD} = 90^\circ$。よって、

$$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ACD} + \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ + \angle\mathrm{BCD} \ \cdots\cdots \ ③$$

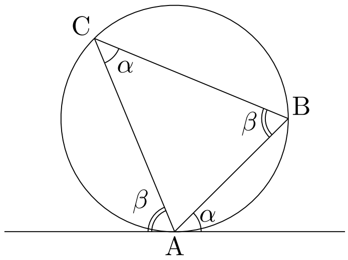
①〜③より

$$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{BAT}$$

以上のことから、

「**円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。**」

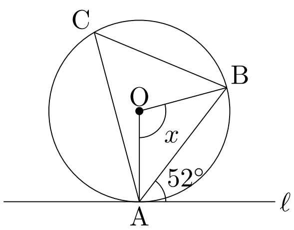
ということが成り立ち、これを**接弦定理**といいます。



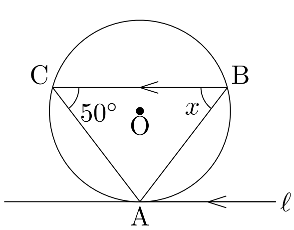
【例題 4 − 2】

次の図において、x を求めなさい。ただし、ℓ は円 O の接線で、点 A は接点である。

(1)



(2)



<解説>

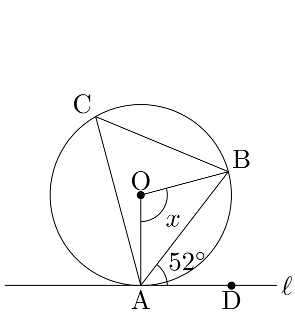
(1) 右図のように、直線 ℓ 上に点 D をとると、接弦定理より、

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCA} = 52^\circ$$

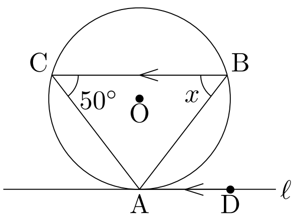
円周角の定理より、

$$\angle\mathrm{BOA} = 2\angle\mathrm{BCA}$$

$$x = 2 \times 52^\circ = 104^\circ$$



(2) 右図のように、直線 ℓ 上に点 D をとると、接弦定理より、



$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCA} = 50^\circ$$

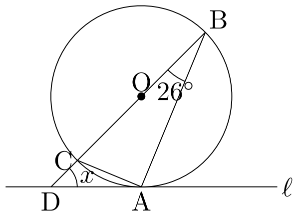
また、平行線における錯角は等しいので、

$$x = \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BAD} = 50^\circ$$

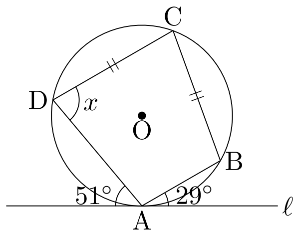
【演習 4 − 2】

次の図において、x を求めなさい。ただし、ℓ は円 O の接線で、点 A は接点である。

(1)



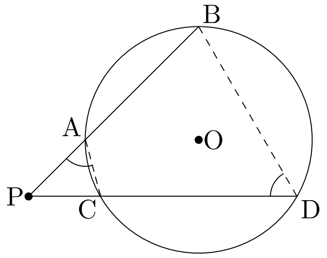
(2)



4.3 方べきの定理①

次の図のように、点 P を通る 2 本の直線が円 O と 4 つの交点を持つような場合を考えます。

(i) 点 P が円 O の外部にある



△PAC と △PDB において、円に内接する四角形の性質より、外角は隣り合う内角の対角に等しいので、

$\angle PAC = \angle PDB$ ······· ①

また、$\angle P$ は共通なので

$\angle APC = \angle DPB$ ······· ②

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

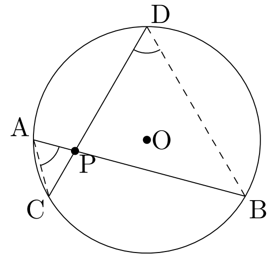
$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

$$PA : PD = PC : PB$$
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

という関係が成り立ちます。

(ii) 点 P が円 O の内部にある



△PAC と △PDB において、円周角の定理より、弧 BC に対する円周角は等しいので、

$\angle PAC = \angle PDB$ ······· ③

また、対頂角は等しいので

$\angle APC = \angle DPB$ ······· ④

③, ④より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

$$PA : PD = PC : PB$$
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

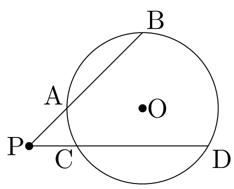
という関係が成り立ちます。

このことから、

「**2 直線の交点と直線と円との 2 交点までの距離の積は等しい**」

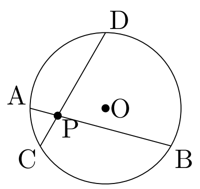
という関係が成り立ち、これを**方べきの定理**といいます。

(i) 点 P が円 O の外部にある



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

(ii) 点 P が円 O の内部にある

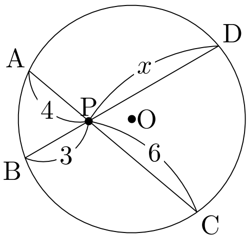


$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

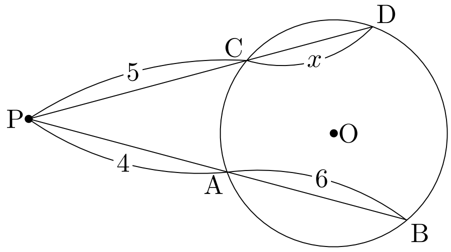
【例題 4 − 3】

次の図において、x の値を求めなさい。

(1)



(2)



＜解説＞

(1) 方べきの定理より

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PC}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PD}$$
$$4\cdot 6=3\cdot x$$
$$x=8$$

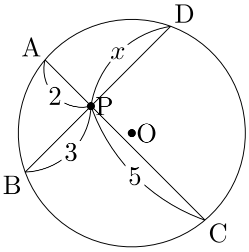
(2) 方べきの定理より

$$\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$
$$5\cdot(x+5)=4\cdot(4+6)$$
$$x+5=8$$
$$x=8-5=3$$

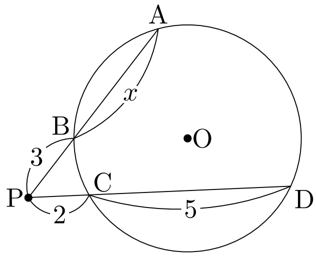
【演習 4 − 3】

次の図において、x の値を求めなさい。

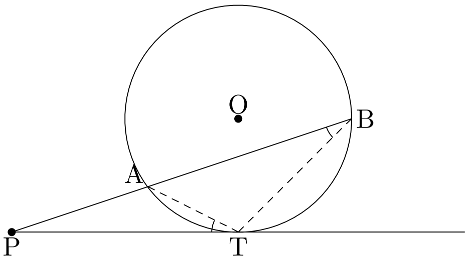
(1)



(2)



4.4 方べきの定理②



点 P が円 O の外部にあり、点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A, B で交わり、もう一方が点 T で接するような場合を考えてみます。

このとき、$\triangle$PAT と $\triangle$PTB に着目すると、接弦定理より、

$$\angle \mathrm{ATP} = \angle \mathrm{TBP} \quad \cdots\cdots \ ①$$

また、$\angle$P は共通なので、

$$\angle \mathrm{APT} = \angle \mathrm{TPB} \quad \cdots\cdots \ ②$$

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle \mathrm{PAT} \backsim \triangle \mathrm{PTB}$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいので、

$$\mathrm{PA} : \mathrm{PT} = \mathrm{PT} : \mathrm{PB}$$

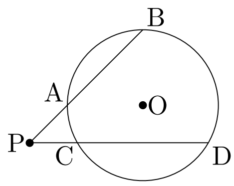
$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$

という関係が成り立ちます。

これは、点 P が円 O の外部にあって円と 2 直線が 4 つの交点を持つ場合において、点 C と点 D が重なって点 T になったすると、

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT} \cdot \mathrm{PT}$$

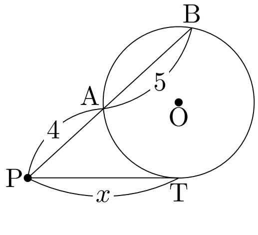
となり、どちらも同じ方べきの定理であると考えることができます。



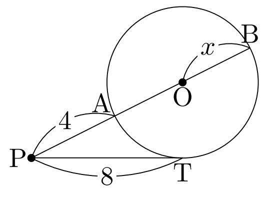
【例題 4 − 4】

次の図において、T が円の接点であるとき、x の値を求めなさい。

(1)



(2)



＜解説＞

(1) 方べきの定理より、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PT}^2 \\
4\cdot(4+5) &= x^2 \\
x^2 &= 36
\end{aligned}
$$

$x>0$ より　$x=6$

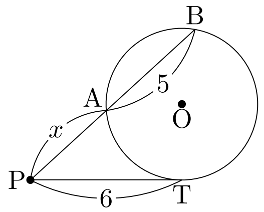
(2) 方べきの定理より、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PT}^2 \\
4\cdot(2x+4) &= 8^2 \\
2x+4 &= 16 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

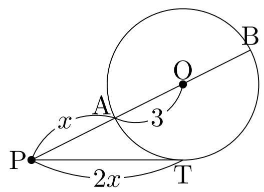
【演習 4 − 4】

次の図において、T が円の接点であるとき、x の値を求めなさい。

(1)



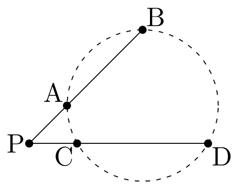
(2)



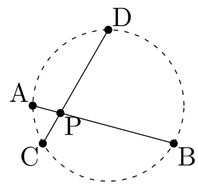
4.5 方べきの定理の逆

次の図のように、2 つの線分 AB, CD、またはその延長の交点を P とするとき、$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば、4 点 A, B, C, D は同一円周上にあり、方べきの定理の逆が成り立ちます。

(i) 線分 AB, CD の延長の交点 P



(ii) 線分 AB, CD の交点 P



【例題 4 − 5】

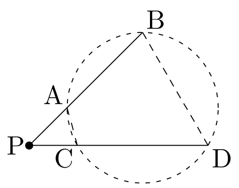
2 つの線分 AB, CD、またはその延長の交点を P とするとき、$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば、4 点 A, B, C, D は同一円周上にある（方べきの定理の逆が成り立つ）ことを証明しなさい。

<証明>

$\triangle$PAC と $\triangle$PDB において、条件より

$PA : PD = PC : PB$ ······· ①

(i) 点 P が線分 AB, CD の延長の交点であるとき



$\angle$P は共通なので、

$\angle APC = \angle DPB$ ······· ②

①, ②より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

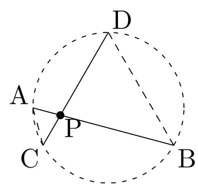
$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$\angle PAC = \angle PDB$

よって、四角形 ACDB は円に内接するので、4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。

(ii) 点 P が線分 AB, CD の交点であるとき



対頂角は等しいので、

$\angle APC = \angle DPB$ ······· ③

①, ③より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので、

$\angle PAC = \angle PDB$

よって、円周角の定理の逆より、4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。

（証明終わり）

このように、方べきの定理の逆も成り立ちます。

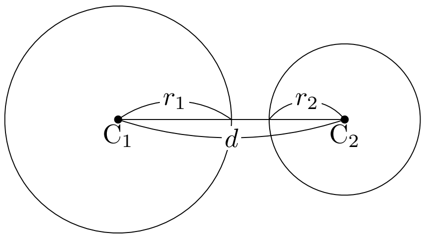
5　2つの円

5.1　2つの円の位置関係

半径の異なる2つの円 C_1, C_2 があるとき、この2つの円の位置関係には、次のように5つの場合が考えられます。このとき、それぞれの円の半径を r_1, r_2（ただし、$r_1 > r_2$）、そして、中心間の距離を d とすると、2つの円の位置関係は、半径と中心間の距離で定めることができます。

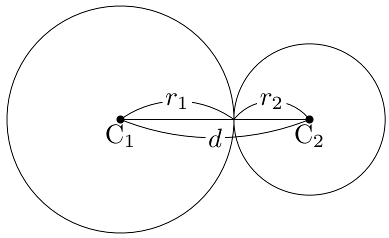
また、2つの円がただ1点を共有するとき、2つの円は**接する**といい、その共有点を**接点**といいます。特に、2つの円が互いに外側で接するときを**外接する**、一方の円の内側で接するときを**内接する**といいます。

(i) 互いに外部にある



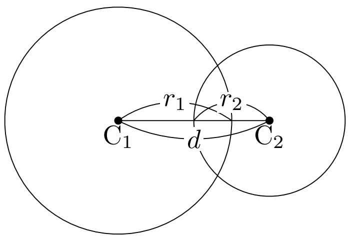
$d > r_1 + r_2$

(ii) **外接する**（互いに外側で接する）



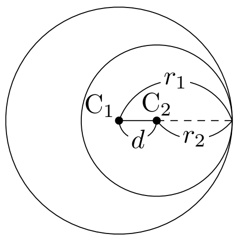
$d = r_1 + r_2$

(iii) 2点で交わる



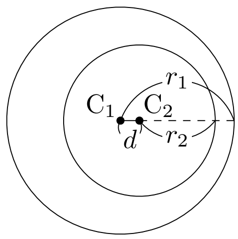
$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

(iv) **内接する**



$d = r_1 - r_2$

(v) 一方が他方を含む



$d < r_1 - r_2$

【例題5－1】

半径が6, 4である2つの円があります。この2円が2点で交わるのは、中心間の距離 d がどんな範囲のときか求めなさい。

＜解説＞

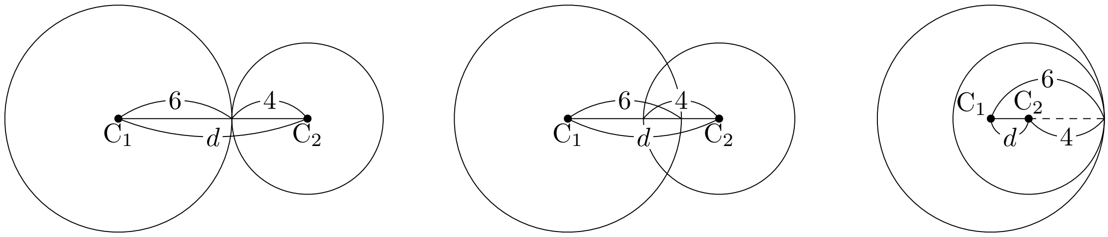
関係式にあてはまれば求めることができますが、2円の様子をイメージして考えることが大切です。

2円の中心間の距離を大きなものからだんだん小さくしていくと（次の図を左から右に見ていくと）、外接したとき $(d = 6 + 4 = 10)$ に1点を共有し、そこから2つの円は2点で交わり、内接したとき $(d = 6 - 4 = 2)$ にまた1点を共有することになります。

　このことから、中心間の距離が、

$$2 < d < 10$$

のときに 2 円は 2 点で交わることになります。



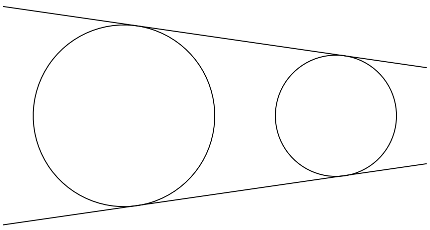
【演習 5 − 1】

中心間の距離が 8 のとき外接し、中心間の距離が 2 のとき内接する 2 円があります。この 2 円の半径を求めなさい。

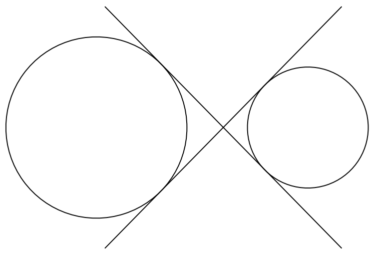
5.2　2 つの円の共通接線

1 本の直線が 2 つの円の両方の接線となることがあり、このような接線を、2 つの円の**共通接線**といいます。共通接線には、その接線に対して同じ側に 2 つの円がある（2 つの円に対して外側に接線がある）場合、反対側に 2 つの円がある（2 つの円に対して内側に接線がある）場合の 2 通りあり、そのときの接線をそれぞれ**共通外接線**、**共通内接線**といいます。

(i) 共通外接線



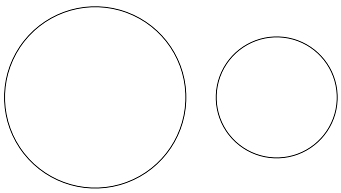
(ii) 共通内接線



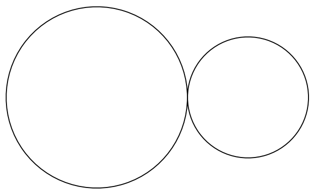
【例題 5 − 2】

2 つの円の位置関係における 5 つの場合において、2 つの円の共通接線の本数をそれぞれ求めなさい。

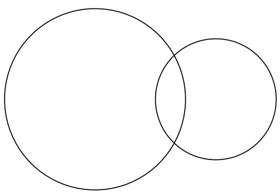
(1) 互いに外部にある



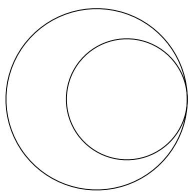
(2) 外接する（互いに外側で接する）



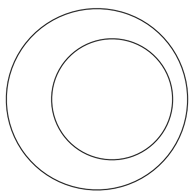
(3) 2 点で交わる



(4) 内接する



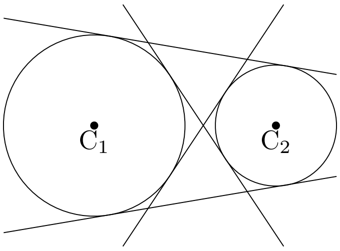
(5) 一方が他方を含む



＜解説＞

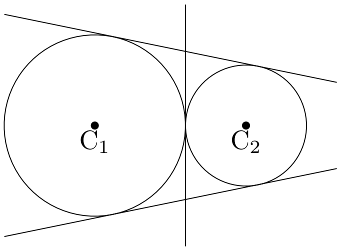
2 つの円の位置関係における 5 つの場合について、2 つの円の共通接線を引いてみると、次の図のようになります。

(1) 互いに外部にある



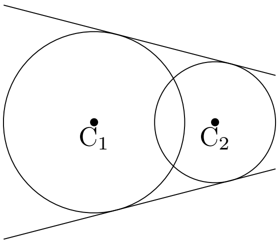
共通接線 : 4 本

(2) 外接する（互いに外側で接する）



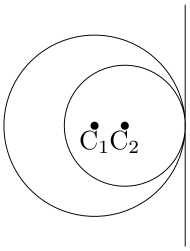
共通接線 : 3 本

(3) 2 点で交わる



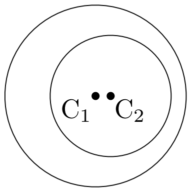
共通接線 : 2 本

(4) 内接する



共通接線 : 1 本

(5) 一方が他方を含む



共通接線 : 0 本

6　図形の性質

6.1　多面体

平面だけで囲まれた立体を**多面体**といいます。普通、立体を作るためには「1 つ」の平面だけでなく「多」くの平面が必要であるので、そのような名前になっていると思ってください。

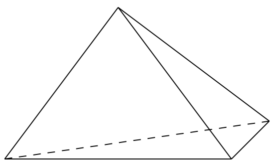
そして、多面体のうち、へこみのない多面体を**凸多面体**といいます。凸多面体の頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f とすると、

$$v - e + f = 2 \qquad ((\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2)$$

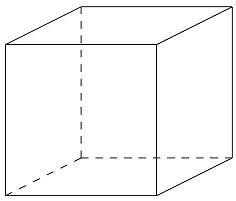
という関係が成り立ち、これを**オイラーの多面体定理**といいます。

また、合同な多角形で囲まれ、頂点に集まる面の数がすべて等しい多面体を**正多面体**といい、正多面体は次の 5 種類だけ存在します。

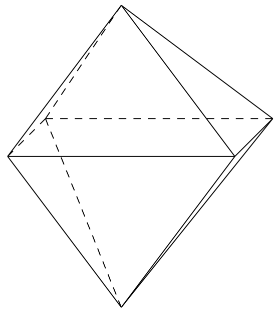
① 正四面体



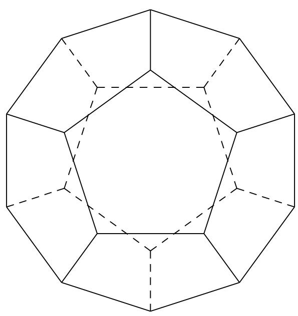
② 正六面体（立方体）



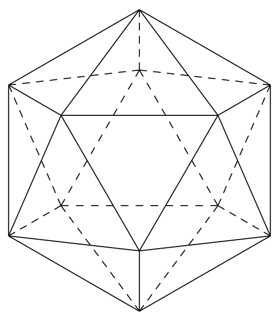
③ 正八面体



④ 正十二面体



⑤ 正二十面体



【例題 6 − 1】

正多面体について、次の表を完成させなさい。

	面の形	1 つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体					
正六面体					
正八面体					
正十二面体					
正二十面体					

＜解説＞

正多面体の図を参考に、空欄を埋めていきます。

- 面の形
  正多面体は、合同な多角形で囲まれているので、それぞれの面の辺の長さと角の大きさは同じになります。つまり、それぞれの面は正多角形になります。
- 1 つの頂点に集まる面の数
  正多面体は、頂点に集まる面の数がすべて等しいので、どれか 1 つの頂点に着目して、そこに集まる面の数を数えます。
- 面の数
  多面体は、その面の数によって

  4 つの面をもつ立体 $\longrightarrow$ 四面体

  のように名前がつけられているので、立体の名前を見ることで数がわかります。また、そのようになっていることを正多面体の図でも確認しておきましょう。
- 辺の数
  正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1 つの面にいくつ辺があるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1 つの面における辺の数」に「面の数」を掛けた分だけ辺はあることになりますが、正多面体では、それぞれの辺を重ね合わせることで立体を作ることになるので、その辺の数は、

  $$(\text{辺の数}) = (1\ \text{つの面における辺の数}) \times (\text{面の数}) \div 2$$

  という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めることもできます。
- 頂点の数
  正多面体の図から、数え間違えないように数え上げればいいのですが、まずは、1 つの面にいくつ頂点あるのかを数えます。正多面体の面がばらばらになっていたら、「1 つの面における頂点の数」に「面の数」を掛けた分だけ頂点はあることになりますが、正多面体では、それぞれの頂点を重ね合わせることで立体を作ることになるので、その頂点の数は、

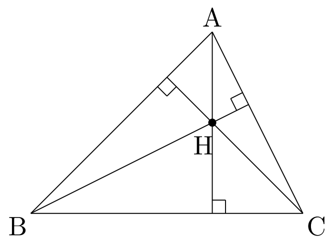
  $$(\text{頂点の数}) = (1\ \text{つの面における頂点の数}) \times (\text{面の数}) \div (1\ \text{つの頂点に集まる面の数})$$

という関係式であらわすことができ、この関係式を用いることで、辺の数を求めることもできます。

以上のことから、表は次のようになります。

	面の形	1 つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体	正三角形	3	4	6	4
正六面体	正方形	3	6	12	8
正八面体	正三角形	4	8	12	6
正十二面体	正五角形	3	12	30	20
正二十面体	正三角形	5	20	30	12

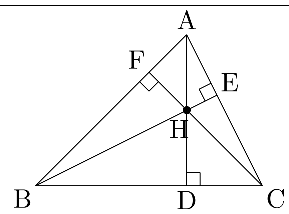
6.2 三角形の垂心



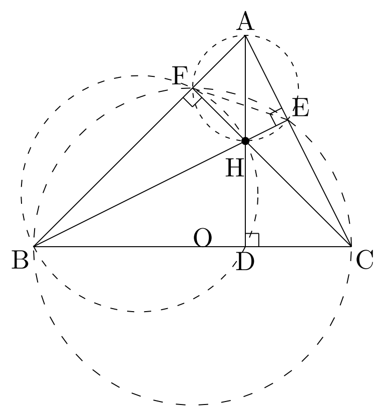
右の図のように、三角形の 3 つの頂点 (A, B, C) から対辺またはその延長に下ろした 3 つの垂線は 1 点で交わり、その交点 (H) を、三角形の**垂心**といいます。

【例題 6 − 2】

右の図のように、鋭角三角形 ABC の頂点 B, C から対辺に下ろした垂線を BE, CF とし、BE と CF の交点を H とします。AH と辺 BC の交点を D とするとき、AD $\perp$ BC であることを証明しなさい。



＜証明＞



$\angle$BEC $=$ $\angle$BFC $= 90^\circ$ より、4 点 B, C, E, F は同一円周上にあるので、四角形 BCEF は円に内接する。よって、

$$\angle\text{ABD} = \angle\text{FEA} \;\cdots\cdots\; ①$$

また、$\angle$AFH $=$ $\angle$HEA $= 90^\circ$ より、$\angle$AFH $+$ $\angle$HEA $= 180^\circ$ であるので、四角形 AFHE は円に内接する。よって、

$$\angle\text{FEA} = \angle\text{FHA} \;\cdots\cdots\; ②$$

①, ②より

$$\angle\text{ABD} = \angle\text{FHA}$$

となるので、四角形 BDHF は円に内接する。このことから、

$$\begin{aligned} \angle\text{HFB} + \angle\text{BDH} &= 180^\circ \\ \angle\text{BDH} &= 180^\circ - \angle\text{HFB} \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

となり、

$$\text{AD} \perp \text{BC}$$