【数学A】場合の数

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 集合の要素の個数

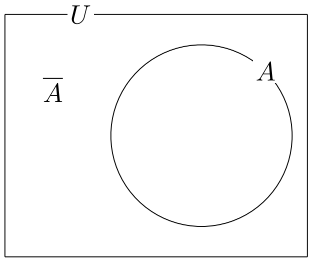
1.1 集合の要素の個数

要素の個数が有限である集合を**有限集合**、要素の個数が無限である集合を**無限集合**といいます。

集合 A が有限集合であるとき、その要素の個数を $n(A)$ で表します。空集合 ϕ は要素を持たないので、その要素の個数 $n(\phi)$ は

$$n(\phi)=0$$

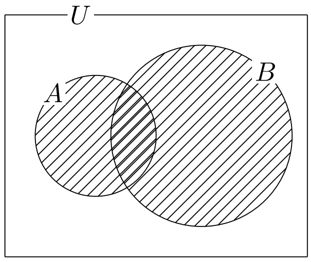
となります。



全体集合 U が有限集合である場合には、その部分集合 A とその補集合 $\overline{A}$ の間には、

$$n(A)+n(\overline{A})=n(U)$$

という関係が成り立ちます。

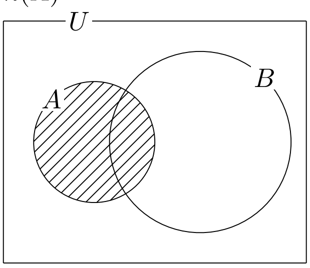


また、集合 A と B がともに有限集合であるとき、集合 A と B の和集合 $A\cup B$ の要素の個数 $n(A\cup B)$ は、集合 A の要素の個数 $n(A)$ と、集合 B の要素の個数 $n(B)$ から、A と B の共通部分の要素の個数 $n(A\cap B)$ を除いた $n(B)-n(A\cap B)$ を加えたものになるので、

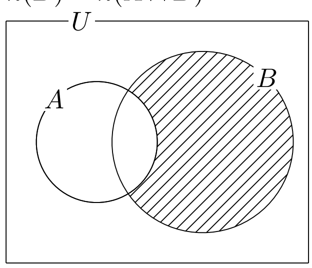
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

という関係が成り立ちます。

(i) $n(A)$



(ii) $n(B)-n(A\cap B)$



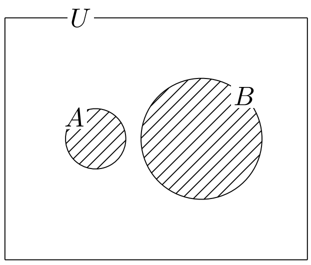
とくに、次の図のように $A\cap B=\phi$ である場合には、

$$n(A\cap B)=0$$

となるので、

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

になります。



【例題 1 − 1】

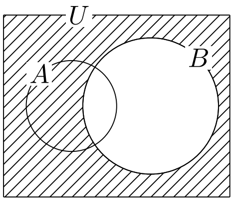
A、B は全体集合 U の部分集合で、その要素の個数が $n(U)=100,\ n(A)=28,\ n(B)=49,\ n(A\cap B)=9$ のとき、次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) $\overline{B}$　(2) $A\cup B$　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$

＜解説＞

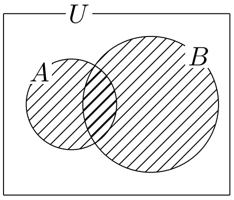
公式に当てはめてしまえば答えを求めることもできてしまいますが、どの集合の要素の個数を求めているのか、図を利用して考えることがポイントです。

(1) $n(\overline{B})$ は、右の図より、



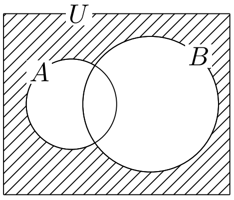
$$\begin{aligned} n(\overline{B}) &= n(U) - n(B) \\ &= 100 - 49 \\ &= 51 \end{aligned}$$

(2) $n(A \cup B)$ は、右の図より、



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 28 + 49 - 9 \\ &= 68 \end{aligned}$$

(3) $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ は、右の図より、



$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - 68 \\ &= 32 \end{aligned}$$

1.2　倍数の個数

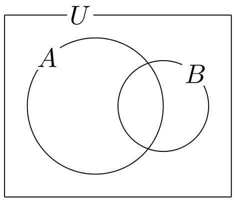
【例題 1 − 2】

1 から 100 までの整数のうちで、2 の倍数の集合を A、3 の倍数の集合を B とするとき、次の集合の個数を求めなさい。

(1) $A \cap B$　　(2) $A \cup B$　　(3) $A \cap \overline{B}$　　(4) $\overline{A \cup B}$

＜解説＞

全体集合（ 1 から 100 までの整数を表す集合）を U とします。それぞれの集合を要素を書き並べる方法で表し、それぞれの集合の要素の個数を求めると次のようになります。



- $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 99,\ 100\} \longrightarrow n(U) = 100$
- $A = \{2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 2 \cdot 50\} \longrightarrow n(A) = 50$
- $B = \{3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 3 \cdot 33\} \longrightarrow n(B) = 33$

(1) $A \cap B$ の表す集合は、2 の倍数であり 3 の倍数である集合なので、6 の倍数の集合になります。

$$A \cap B = \{6 \cdot 1,\ 6 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 6 \cdot 16\}$$

$$n(A \cap B) = 16$$

(2) ベン図を利用すると、

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 50 + 33 - 16 = 67 \end{aligned}$$

(3) ベン図を利用すると、

$$\begin{aligned} n(A \cap \overline{B}) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 50 - 16 = 34 \end{aligned}$$

(4) ベン図を利用すると、

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - 67 = 33 \end{aligned}$$

2　場合の数

2.1　樹形図

ある事柄の起こり得るすべての場合を数えあげるとき、数えもらすことなく、そして、重複することなく数えあげることが大切です。そのための 1 つの方法として、各場合を枝分かれしていくように次々と表した**樹形図**をかいて考える方法があります。

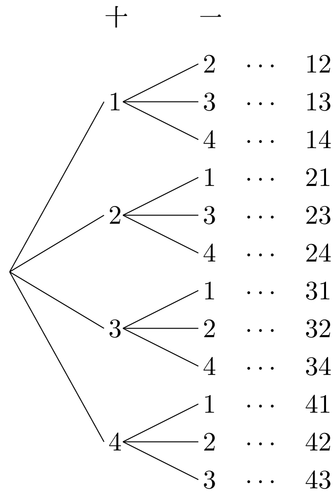
【例題 2 − 1】

1、2、3、4 の数字だけを使って、次のような 2 けたの整数をつくるとき、それぞれ全部で何通りありますか。

(1) 各数字を 1 回だけ使う　　(2) 同じ数字を 2 回使ってもよい

＜解説＞

(1) 各数字を 1 回だけ使う条件では、十の位を 1, 2, 3, 4 のいずれかに決めると、それ以外の数が一の位になります。

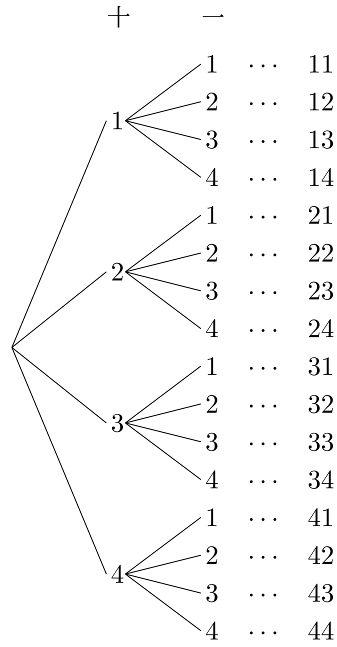


このことから、条件を満たす整数は全部で

12 通り

あります。

(2) 同じ数字を 2 回使ってもよくなると、十の位を 1, 2, 3, 4 のいずれかに決めても、一の位は再度その数字を選ぶことができます。



このことから、条件を満たす整数は全部で

16 通り

あります。

2.2　和の法則

2つの事柄 A と B があって、A と B が同時に起こらないとき、A の起こり方が m 通り、B の起こり方が n 通りあるとすると、A または B の起こる場合の数は、

$m+n$ (通り)

になり、これを**和の法則**といいます。

これは、A、B の起こる場合の集合を、そのまま A、B で表すと、

A または B の起こる集合（和集合）: $A \cup B$

A、B がともに起こる集合（共通部分）: $A \cap B$

と表すことができ、A と B が同時に起こらないときは、

$$A \cap B = \phi$$

となります。つまり、

$$n(A \cap B) = n(\phi) = 0$$

であるので、A または B の起こる場合の数 $n(A \cup B)$ は、

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

になるということと同じです。もちろん、$A \cap B \fallingdotseq \phi$ のときは、A または B の起こる場合の数 $n(A \cup B)$ は、

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

となります。

【例題2－2】

1から12までの数字を書いたカードが12枚あります。この中から2枚のカードを同時に取り出すとき、数字の和が7の倍数になる場合は何通りありますか。

<解説>

数字の和の最小は

$$1+2=3$$

で、最大は

$$11+12=23$$

です。このため、数字の和が7の倍数になるのは、和が7, 14, 21という3つの場合があるので、その各場合について、条件満たす2数（2枚のカード）の組合せを考えます。

(ｉ) 和が7のとき

$$(1,\ 6),\quad (2,\ 5),\quad (3,\ 4)$$

の3通りがあります。

(ii) 和が 14 のとき

$$(2,\ 12),\quad (3,\ 11),\quad (4,\ 10),\quad (5,\ 9),\quad (6,\ 8)$$

の 5 通りあります。

(iii) 和が 21 のとき

$$(9,\ 12),\quad (10,\ 11)$$

の 2 通りあります。

和が 7, 14, 21 になる場合は同時には起こらないので、以上より、数字の和が 7 の倍数になる場合は、

$$3+5+2=10\text{（通り）}$$

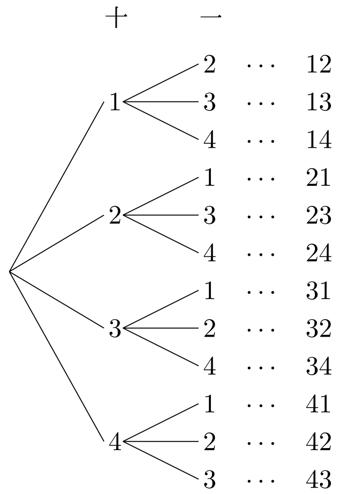
あります。

2.3 積の法則

1，2，3，4 の各数字を 1 回だけ使って 2 桁の整数をつくるとき、右図のようにして、12 通りあることを学習しました。このとき、十の位は 1，2，3，4 の 4 通りあり、その各場合に対して一の位は 3 通りずつ選び方があるので、

$4 \times 3 = 12$（通り）

として考えることもできます。



このように、2 つの事柄 A と B があって、これらの起こり方が互いに影響せず、A の起こり方が m 通りあって、そのどの場合に対しても B の起こり方が n 通りあるとき、A と B がともに起こる場合の数は、

$m \times n$ (通り)

となり、これを**積の法則**といいます。

【例題 2 − 3】

次の式を展開したとき、異なる項は何項できますか。

(1) $(a+b+c)(x+y)$　　(2) $(a+b)(c+d)(e+f+g)$

＜解説＞

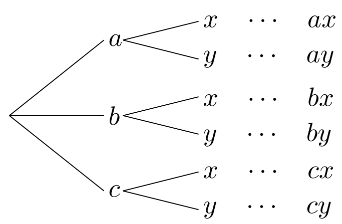
(1)

$$(a+b+c)(x+y) = ax+ay+bx+by+cx+cy$$

のように展開しても 6 つの項ができることがわかりますが、右図のように、「$a+b+c$」の 3 つの項から 1 つ、「$x+y$」の 2 つの項から 1 つ選ぶことで異なる項を作ることができるので、

$3 \times 2 = 6$（項）

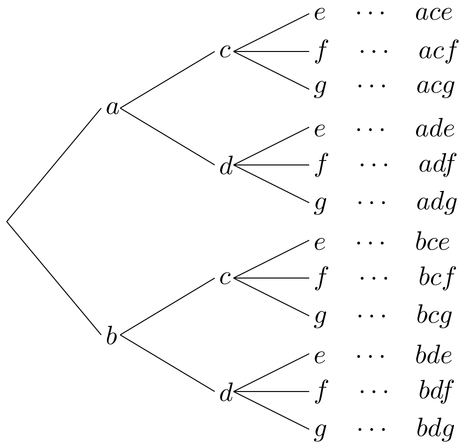
として求めることができます。



(2) 「$a+b$」の 2 つの項から 1 つ、「$c+d$」の 2 つの項から 1 つ、「$e+f+g$」の 3 つの項から 1 つ選ぶことで異なる項を作ることができるので、

$$2\times2\times3=12\,(\text{項})$$

のようにして求めることができます。



2.4 約数の個数とその総和

ある正の整数 A が $A = a^k b^l c^m$ のように素因数分解できるとき、その正の約数の個数は

$$(k+1)(l+1)(m+1) \text{ 個}$$

あり、その総和は

$$(1+a+a^2+\cdots+a^k)(1+b+b^2+\cdots+b^l)(1+c+c^2+\cdots+c^m)$$

となります。

【例題 2 − 4】

508 について、正の約数の個数とその総和を求めなさい。

<解説>

508 の約数には

$$1,\ 2,\ 4,\ 127,\ 254,\ 508$$

の 6 個あり、その和は

$$1+2+4+127+254+508 = 896$$

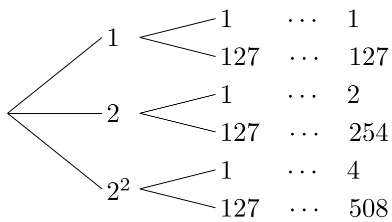
となります。

このように地道に解いてももちろん問題はありませんが、場合の数の考え方を利用して解いてみたいと思います。

508 を素因数分解すると

$$508 = 2^2 \times 127$$

となります。



ここで、「2^2」の正の約数は、

$$1, \quad 2, \quad 2^2\ (=4)$$

の 3 通りあり、「127」の正の約数は

$$1, \quad 127$$

の 2 通りあります。また、先ほど地道に求めた「508」の正の約数は

$$1 = 1\times 1, \qquad 2 = 2\times 1, \qquad 4 = 2^2\times 1,$$
$$127 = 1\times 127, \qquad 254 = 2\times 127, \qquad 508 = 2^2\times 127$$

のように表すことができ、「2^2」の正の約数と「127」の正の約数の積になっています。

このことから、積の法則を利用して

$$3 \times 2 = 6\ (\text{個})$$

のようにして正の約数の個数を求めることができます。

さらに約数の総和についても、

$$
\begin{aligned}
&1+2+4+127+254+508\\
=&1\times 1+2\times 1+2^2\times 1+1\times 127+2\times 127+2^2\times 127\\
=&(1\times 1+2\times 1+2^2\times 1)+(1\times 127+2\times 127+2^2\times 127)\\
=&(1+2+2^2)\times 1+(1+2+2^2)\times 127\\
=&(1+2+2^2)\times(1+127)
\end{aligned}
$$

のように変形することができ、「2^2」の約数の和と「127」の約数の和との積を計算すればよいことになります。これを計算すれば、

$$
\begin{aligned}
(1+2+2^2)\times(1+127)&=7\times 128\\
&=896
\end{aligned}
$$

のように求めることができます。

3 順列

3.1 順列の基本

いくつかのものに順序をつけて並べたものを**順列**といい、n 個の異なるものから r 個取り出して並べるとき、これを **n 個のものから r 個取る順列**といいます。この順列の総数は、「順列」を意味する英単語「Permutation」の頭文字「P」を用いて、${}_n\mathrm{P}_r$ で表されます。

n 個の異なるものから r 個取り出して並べるとき、

1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	$\cdots$	r 番目
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\cdots$	$\boxed{}$
n 通り	$n-1$ 通り	$n-2$ 通り	$n-3$ 通り		$n-(r-1)$ 通り

となるので、積の法則から、

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

となり、その総数は n から順に 1 ずつ減らした r 個の積で求めることができます。

また、$r=n$ となるときは、

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

と、1 から n までのすべての整数の積になり、これを n の**階乗**といい、記号 $n!$ で表します。

$$ n! = {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

この階乗を使うと ${}_n\mathrm{P}_r$ は

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots\cdots\text{①} \end{aligned} $$

と表すことができます。

$r=n$ のとき、①は

$$ {}_n\mathrm{P}_n = \frac{n!}{0!} $$

となりますが、

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n! $$

であるので、

$$ 0! = 1 $$

と約束します。

また、$r=0$ のときには、①より

$${}_n\mathrm{P}_0=\frac{n!}{n!}=1$$

となるので、

$${}_n\mathrm{P}_0=1$$

と約束します。

【例題 3 − 1】

(1) 次の値を求めなさい。

① $4!$　② $5!$　③ $6!$　④ ${}_5\mathrm{P}_3$　⑤ ${}_{45}\mathrm{P}_2$　⑥ $\dfrac{95!}{93!}$

(2) A, B, C, D, E, F の 6 人がいます。この 6 人から 4 人を選んで、リレーのチームを作るとき、全部で何通りの走り方がありますか。

<解説>

(1) ① $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

② $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

③ $6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

④ ${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$

⑤ ${}_{45}\mathrm{P}_2=45\cdot44=1980$

⑥ $\dfrac{95!}{93!}=\dfrac{95\cdot94\cdot\cancel{93\cdots3\cdot2\cdot1}}{\cancel{93\cdots3\cdot2\cdot1}}=8930$

また、$\dfrac{95!}{93!}$ は、次のようにして計算することもできます。

$$\frac{95!}{(95-2)!}={}_{95}\mathrm{P}_2$$

(2) 第 1 走者を A〜F の 6 人のうち誰にするかで 6 通り、第 2 走者は第 1 走者意外の 5 人から 1 人選ぶので 5 通り、というようにして選んでいくと右図のようになります。

第 1 走者	第 2 走者	第 3 走者	第 4 走者
$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
6 通り	5 通り	4 通り	3 通り

つまり、異なる 6 個のものから 4 個取って並べる順列を考えればよいので、その総数は

$${}_6\mathrm{P}_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360\ (\text{通り})$$

となります。

3.2 隣り合う順列

【例題 3 − 2】

1，2，3，4，5 の 5 個の数字を全部使って作られる 5 桁の整数の中で、1 と 2 が隣り合うものは何個ありますか。

＜解説＞

1 と 2 が隣り合う 5 桁の整数とは

$$\underline{12}345,\quad \underline{21}345,\quad 3\underline{12}45,\quad 543\underline{21},\quad \cdots$$

などのような整数のことです。このような整数の個数を数えるには、1 と 2 が隣り合っているので、これをまとまりとして考えてしまうのが手っ取り早い方法です。つまり、「1」、「2」、「3」、「4」、「5」という 5 個の数字を並べるのではなく、「1，2」、「3」、「4」、「5」という 4 つのものを並べると考えます。すると、4 つの異なるものを 1 列に並べる順列の総数は

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{（通り）}$$

あります。そして、この 24 通りの整数それぞれについて、

$$\underline{12}345,\qquad \underline{21}345$$

のように、1 と 2 の順番を入れかえたものが存在するので、1 と 2 が隣り合う 5 桁の整数の個数は

$$24 \times 2 = 48 \text{（個）}$$

になります。

3.3 数字の順列

【例題 3 − 3】

6 個の数字 0，1，4，5，8，9 の中から異なる数字を使って、次のような数を作ります。それぞれいくつできますか。

(1) 6 桁の整数　　(2) 4 桁の偶数　　(3) 4 桁の奇数

<解説>

(1) 6 個の異なるものを 1 列に並べる順列の総数を考えて

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\ (個)$$

としたくなりますが、

014589,　098541,　$\cdots$

などのように、最高位である十万の位に「0」を並べることができません。そこで、十万の位には「1」、「4」、「5」、「8」、「9」の 5 個の数から 1 つ選び、万の位から一の位までは十万の位で選ばれなかった残りの 5 つの数から 1 つずつ選んでいけばよいことになります。

十万の位	万の位	千の位	百の位	十の位	一の位
□	□	□	□	□	□
5 通り	5 通り	4 通り	3 通り	2 通り	1 通り

よって、6 桁の整数は全部で

$$5 \times 5! = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600\ (個)$$

になります。

このように、制約のあるところから順に数え上げていくことで、残りの部分は制約の影響を無視でき、数え上げやすくなります。

(2) 偶数になるためには一の位が偶数である必要があるので、「0」、「4」、「8」のいずれかでなければいけないという制約があります。そして、最高位である千の位には「0」を並べることができないという制約もありますね。しかし、一の位に「0」を使ってしまえば千の位に「0」が並ばれることはなくなるため、「0」を並べることができないという制約は必要なくなります。そのため、一の位が「0」になるのかそうでないのかで場合分けをして考えます。

(i) 一の位が「0」であるとき

千の位、百の位、十の位に並べる数に特別な制約はないので、「1」、「4」、「5」、「8」、「9」の異なる 5 個の数から 3 つ取って並べる順列を考えて

千の位	百の位	十の位	一の位
□	□	□	0
5 通り	4 通り	3 通り	

$$_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60\ (個)$$

(ii) 一の位が「0」でない（「4」または「8」である）とき
千の位には「0」を並べることができないので、一の位で選んだ数と 0 以外の数、百の位と十の位には、千の位と一の位で選ばれなかった数を 1 つずつ選んでいけばよいので、

千の位	百の位	十の位	一の位
			4，8
4 通り	4 通り	3 通り	2 通り

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96\,(個)$$

(i)，(ii) は同時には起こらないので、4 桁の偶数は全部で

$$60 + 96 = 156\,(個)$$

になります。

(3) 奇数になるためには一の位が奇数であればよいので、一の位は「1」、「5」、「9」のいずれかになります。そして、千の位は一の位で選んだ数と 0 以外の数を選び、百の位と十の位は残りの数から 1 つずつ選べばよいので、4 桁の奇数は全部で

千の位	百の位	十の位	一の位
			1，5，9
4 通り	4 通り	3 通り	3 通り

$$4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144\,(個)$$

になります。
また、4 桁の整数には偶数と奇数があり、

(4 桁の整数の個数) = (4 桁の偶数の個数)+(4 桁の奇数の個数)

千の位	百の位	十の位	一の位
5 通り	5 通り	4 通り	3 通り

という関係が成り立ちます。そこで、4 桁の整数の個数は、千の位に 0 以外の 5 つの数から 1 つ選び、百の位から一の位には残りの 5 つの数から 3 つ選ぶ順列を考えればよいので、

$$5 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300\,(個)$$

あり、（2）より、4 桁の偶数の個数は 156 個であるので、

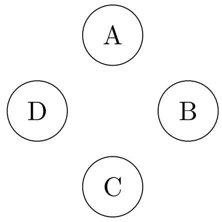
$$\begin{aligned}(4\,桁の奇数の個数) &= (4\,桁の整数の個数) - (4\,桁の偶数の個数)\\ &= 300 - 156 = 144\,(個)\end{aligned}$$

として求めることもできます。

このように、場合の数を求める際には、直接求めるのではなく全体からそれ以外の場合を取り除いて求めることもできます。直接数え上げるのが面倒であったり困難である場合には、このような手法を利用して求めましょう。

3.4 円順列

いくつかのものを円形に並べる順列を**円順列**といいます。
ここで、次の図のように、A, B, C, D の 4 人を円形に並べるような円順列を考えてみます。

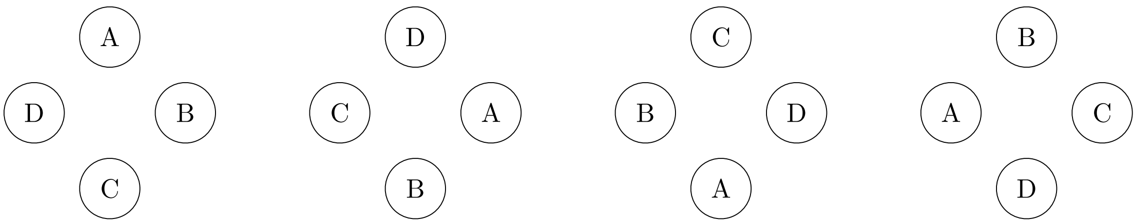


4 人を 1 列に並べるような順列では、その並べ方の総数は、

$4! = 24$ （通り）

となりますが、円順列では

(i) (ii) (iii) (iv)



のように、回転して並びが同じになるものは同じ順列と考えるので、その並べ方の総数は「4!」とはなりません。そこで、回転しないようにするために A を固定し、残りの B, C, D の 3 人を並べると考えます。つまり、異なる n 個の円順列の総数は、ある特定の 1 個の位置を固定し、他の $n-1$ 個を並べると考えるので、

異なる n 個の円順列の総数：$(n-1)!$ （通り）

となります。

【例題 3 − 4】

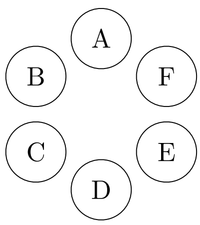
色の異なる 6 個の玉を金の台にのせ、円形に並べてアクセサリーを作るとき、全部で何通りできますか。

<解説>

異なる 6 個のものを円形に並べる円順列を考えるので、その総数は

$(6-1)! = 5! = 120$ (通り)

になります。



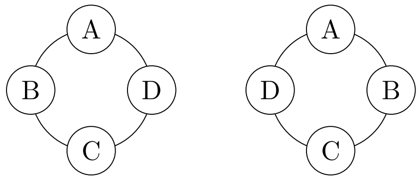
3.5 じゅず順列

n 個の異なる玉でじゅずを作るような順列を、**じゅず順列**といいます。

円順列と同様にして考えますが、右図のように、裏返せば同じになるものは 1 つとカウントします。そのためじゅず順列の総数は、円順列と比べて半分になるので、

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

となります。



【例題 3 − 5】

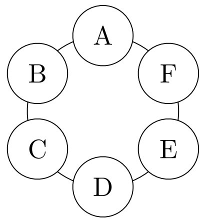
色の異なる 6 個の玉を糸でつないで腕輪を作るとき、全部で何通りできますか。

＜解説＞

6 個の玉を糸でつなぐことで、ひっくり返すことが可能になります。そのため、6 個の異なるものの円順列の総数を 2 で割って（じゅず順列を考えて)、

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = 60 \text{（通り）}$$

となります。



3.6 重複順列

異なる n 個のものから同じものを繰り返し使うことを許して r 個取って並べる順列を、**n 個のものから r 個取る重複順列**といいます。そのときの総数は、

1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	$\cdots$	r 番目
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$
n 通り	n 通り	n 通り	n 通り		n 通り

となるので、積の法則から、

n 個のものから r 個取る重複順列の総数：n^r

となります。

【例題 3 − 6】

1 と 2 の 2 つの数字があります。この 2 つの数字を使って 5 けたの整数を作るとき、全部で何通りの数ができますか。ただし、1、2 は繰り返し使ってもよいとします。

＜解説＞

右図のように、各位には「1」か「2」のどちらかを選ぶことができるので、それぞれ 2 通りの選び方があります。よって、その総数は

万の位	千の位	百の位	十の位	一の位
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2 通り	2 通り	2 通り	2 通り	2 通り

$2^5 = 32$ （通り）

になります。

4　組合せ

4.1　組合せの基本

いくつかのものを順序を問題にしないで 1 組にしたものを**組合せ**といい、n 個の異なるものから r 個を取り出して作る組合せを、**n 個のものから r 個取る組合せ**といいます。この組合せの総数は、「組合せ」を意味する英単語「Combination」の頭文字「C」を用いて、${}_n\mathrm{C}_r$ で表されます。

ここで、「順列」と「組合せ」の違いを理解するために、A，B，C という 3 つの文字から 2 つ選んで並べる（順列）ことを考えると、

AB，　BA，　AC，　CA，　BC，　CB

といったように、その並べ方の総数は

$${}_3\mathrm{P}_2 = 6 \text{（通り）}$$

あります。しかし、A，B，C の 3 つの文字から 2 つの文字を選ぶ（組合せ）とき、順序は関係なくなるので、

AB と BA，　AC と CA，　BC と CB

は同じものだと考えます。つまり、その選び方は

(A，B)，　(A，C)，　(B，C)

という 3 通りになるので、

$${}_3\mathrm{C}_2 = 3 \quad \text{（通り）}$$

と表せることになります。

以上のことから、3 つの文字から 2 つの文字を選ぶ選び方（組合せ）の総数は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあり、そのそれぞれについて 2! 通りの並べ方があるので、3 つの文字から 2 つの文字を選んで並べる（順列）の総数は、積の法則から

$${}_3\mathrm{C}_2 \times 2! \quad \text{（通り）}$$

となります。つまり、

$${}_3\mathrm{C}_2 \times 2! = {}_3\mathrm{P}_2$$

という関係が成り立つことになります。

一般に、n 個から r 個取る場合には、

① n 個から r 個選ぶ $\longrightarrow {}_n\mathrm{C}_r$ （通り）　　② その r 個を並べる $\longrightarrow r!$ （通り）

というように、「選んで並べる」ことにより順列が求まるので、

$${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$$

という関係が成り立ちます。そして、この式は

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

と変形することができ、この式を用いて組合せの総数を求めます。

さらに、

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

を用いると

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

と表すこともできます。

【例題 4 − 1】

(1) 次の値を求めなさい。

① ${}_{10}\mathrm{C}_2$　　② ${}_5\mathrm{C}_3$　　③ ${}_3\mathrm{C}_3$

(2) A, B, C, D, E の 5 人がいます。この 5 人から 2 人を選んでテニスのチームを作るとき、全部で何通りのチームができますか。

＜解説＞

(1) ①

$$ {}_{10}\mathrm{C}_2 = \frac{{}_{10}\mathrm{P}_2}{2!} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9}{\cancel{2} \cdot 1} = 45 $$

②

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10 $$

③

$$ {}_3\mathrm{C}_3 = \frac{{}_3\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1 $$

(2) 2 人を選ぶとき、その 2 人の順序は関係ありませんね。つまり、5 個のものから 2 個取る組合せの総数を求めればよいので、

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{{}_5\mathrm{P}_2}{2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2} \cdot 1} = 10 \quad （通り） $$

となります。

(1) の例題②で、

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = 10 $$

となり、(2) の例題の計算結果

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = 10 $$

と一致していますが、これは偶然の一致ではありません。そのことについて少し考えてみましょう。

A, B, C, D, E の 5 人のうち A, B の 2 人を選ぶとすると、C, D, E の 3 人が残ります。逆にいえば、C, D, E の 3 人を残すことを決めれば、A, B の 2 人がチームに選ばれることになります。つまり、5 人のうちから 2 人を選ぶことは、5 人のうちからチームに選ばれずに残る 3 人を選ぶことと一致し、

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_3 $$

という関係が成り立ちます。

一般に、n 個から r 個取る組合せの総数は、n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しくなり、

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \qquad (0 \leqq r \leqq n)$$

が成り立ちます。この関係式を利用すると、

$${}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_{10-7} = {}_{10}\mathrm{C}_3$$

のように扱う数を小さくすることでき、計算が楽になります。

4.2　図形の個数

どの 3 点も一直線上にない n 個の点があるとき、異なる 2 点を結ぶことで直線を描くことができるので、直線の本数は、

直線の本数 :${}_n\mathrm{C}_2$ （本）

あることになります。

また、一直線上にない 3 点を結べば三角形を作ることができるので、三角形の個数は、

三角形の個数 :${}_n\mathrm{C}_3$ （個）

と表すことができます。

【例題 4 − 2】

八角形の 3 つの頂点を結んでできる三角形について答えなさい。

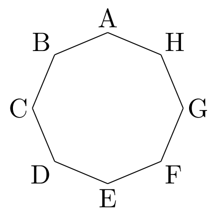
(1) 八角形と 2 辺を共有する三角形はいくつできますか。

(2) 八角形と 1 辺のみを共有する三角形はいくつできますか。

(3) 八角形と 1 辺も共有しない三角形はいくつできますか。

<解説>

説明のため、右図のような八角形で考えます。



(1) 八角形と 2 辺を共有する三角形は、

$$\triangle\mathrm{ABH},\ \triangle\mathrm{BCA},\ \triangle\mathrm{CDB},\ \triangle\mathrm{DEC},\ \triangle\mathrm{EFD},\ \triangle\mathrm{FGE},\ \triangle\mathrm{GHF},\ \triangle\mathrm{HAG}$$

の 8 個。

(2) 辺 AB のみを共有する三角形は、辺 AB の隣にある頂点 C, H と辺以外の残りの 4 つの頂点のいずれかと結べば作ることができます。残りの 7 つの辺についても、辺を作る 2 点とその両側にある頂点 2 つ以外の 4 つの頂点と結べば、八角形と 1 辺のみを共有する三角形を作ることができるので、1 つの辺について 4 つずつの三角形ができることから、

$$4 \times 8 = 32\,(\text{個})$$

(3) 八角形には 8 個の頂点があるので、その 8 個の頂点から 3 つを選んで結べば三角形を作ることができます。そのことから、八角形の 3 つの頂点を結んでできる三角形の総数は、

${}_8\mathrm{C}_3$ （個）

となります。この三角形の総数から、八角形と辺を共有する三角形の個数を取り除いてあげれば、八角形と 1 辺も共有しない三角形の個数を求めることができるので、その個数は、

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{C}_3 - (8+32) &= \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} - 40 \\ &= 56 - 40 = 16\,(\text{個}) \end{aligned}$$

となります。

4.3 組分け

A, B, C という 3 つの文字から 2 つ選んで並べる場合、

$$\text{AB},\quad \text{BA},\quad \text{AC},\quad \text{CA},\quad \text{BC},\quad \text{CB} \longrightarrow {}_3\text{P}_2 = 6\,(\text{通り})$$

となりました。しかし、A, B, C の 3 つの文字から 2 つの文字を選ぶ場合は、

$$(\text{A, B}),\quad (\text{A, C}),\quad (\text{B, C}) \longrightarrow {}_3\text{C}_2 = 3\,(\text{通り})$$

となります。このことから、選んで（${}_3\text{C}_2$）並べる（2!）ことで順列を求めることができるので、

$${}_3\text{C}_2 \times 2! = {}_3\text{P}_2$$

という関係が成り立ちますが、この式から、

$$\frac{{}_3\text{P}_2}{2!} = {}_3\text{C}_2$$

という関係式を導くことができます。この式は、3 つの文字から 2 つを選んで並べたものから、2 つの文字の並べ方で割り算することで、3 つの文字から 2 つの文字の選び方の総数になることを表しています。

つまり、ある並べ方の総数から、順序（区別）をなくした場合が何通りあるかを求めたい場合には、順序（区別）をなくしたいものの並べ方の総数で割り算することで求めることができます。

【例題 4 − 3】

9 人の生徒を次のように分ける方法は何通りありますか。

(1) 6 人と 3 人の 2 組に分ける。

(2) 4 人と 3 人と 2 人の 3 組に分ける。

(3) 3 人ずつ A，B，C の 3 つの組に分ける。

(4) 3 人ずつ 3 組に分ける。

＜解説＞

(1) 9 人の生徒から 3 人を選べば、残りの 6 人は自動的に決まるので、その分け方は、

$${}_9\text{C}_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84\,(\text{通り})$$

(2) 9 人の生徒から 2 人を選び、残りの 7 人から 3 人を選べば 3 組に分けることができるので、

$${}_9\text{C}_2 \times {}_7\text{C}_3 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} \times \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 1260\,(\text{通り})$$

(3) A の組に入る 3 人を 9 人の生徒から選び、残りの 6 人から B の組に入る 3 人を選べば、残った 3 人が C の組に入ることになるので、その選び方は、

$${}_9\text{C}_3 \times {}_6\text{C}_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 1680\,(\text{通り})$$

(4) (3) と比べ、A, B, C 3 つの組の区別がなくなります。つまり、その並べ方の総数である 3! だけ同じものが含まれることになるので、3 組に分ける方法は、

$$\frac{1680}{3!} = \frac{3\cdot 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 280\,(\text{通り})$$

4.4 同じものを含む順列

A, A, B という 3 つの文字を並べるとき、この順列の総数は 3! 通りとしたいところですが、実際には、

AAB,　ABA,　BAA

の 3 通りしかありません。この理由を考えてみたいと思います。

もし、2 つの A が A_1, A_2 のように区別できたとすると、

A_1A_2B,　A_2A_1B,　A_1BA_2,　A_2BA_1,　BA_1A_2,　BA_2A_1

の 6 通りになるので、通常の順列の通り 3! でその順列の総数を求めることができます。しかし、実際には 2 つの A は A_1, A_2 のような区別がないので、

① $A_1A_2B, A_2A_1B \longrightarrow AAB$　② $A_1BA_2, A_2BA_1 \longrightarrow ABA$　③ $BA_1A_2, BA_2A_1 \longrightarrow BAA$

のようにそれぞれの場合において、A_1 と A_2 の並べ方の総数 2! だけ同じものが含まれることになります。つまり、A, A, B という 3 つの文字を並べるときの順列の総数は、3! の中に含まれている同じものを取り除くために 2! で割って、

$$\frac{3!}{2!} = 3\,(\text{通り})$$

とすることで計算できることになります。

このように、同じ文字（もの）が含まれている場合には、その同じ文字（もの）が区別があるものだと考えたときのすべての並べ方の総数を、同じ文字（もの）の並べ方の総数で割ると、区別のなくしたものの総数を求めることができます。n 個から r 個取る組合せの総数も、

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

で求めることができるのは、すべてが区別があるものだとして考えた並べ方の総数「${}_n\mathrm{P}_r$」を、その区別（順序）をなくすために「$r!$」で割って求めていると考えることができるわけです。

このことから、一般に、n 個のもののうちで p 個は同じもの、また別の q 個も同じもの、$\cdots$ であるとき、それらを 1 列に並べる順列の総数は、

$$\frac{n!}{p!q!\cdots}$$

となり、これが**同じものを含む順列の公式**になります。

【例題 4 − 4】

a, a, a, b, b, c の 6 つのアルファベットを 1 列に並べるとき、並べる方法は何通りありますか。

<解説>

同じものを含む順列の公式より

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\times \cancel{2}\cdot 1} = 60\,(\text{通り})$$

となります。

すべての文字が区別があるとしたときの並べ方の総数は

$6!$（通り）

になりますが、3 つの「a」と 2 つの「b」の区別（順序）をなくすために、それぞれの並べ方の総数

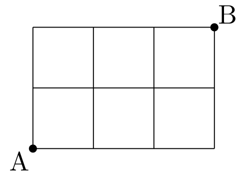
$3!, \quad 2!$

で割っているのだということをしっかり理解して公式を使えるようにしてください。

4.5 最短経路

ここでは、ある地点から別のある地点に向かうまでに最短で何通りの道順 (最短経路) があるのかを考えます。

右の図のように、A 地点から B 地点へ向かう最短経路が何通りあるかを求める場合、主に、次の 2 通りの方法があります。



(i) 同じものを含む順列の公式を利用

A 地点から B 地点に行くには、

右右右上上, 右上右上右, $\cdots\cdots$, 上上右右右

のように、右に 3 回、上に 2 回進むことでたどり着きます。このことから、その道順は、3 個の右、2 個の上の並べ方の総数と同じだけあることになるので、

$$\frac{5!}{3!2!}$$

となります。

(ii) 経路の数を書き込む方法

各交差点で、そこにたどりつくまでの経路の数を順に書き入れていくことで、A 地点から B 地点までの道順を求めることができます。また、この方法には、

- すべてのパターンが網羅されている
- 様々な道に対応できる

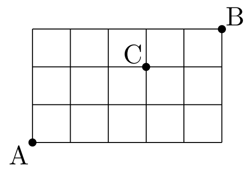
というメリットがあるので、こちらの方法もマスターしておきましょう。

【例題 4 − 5】

右の図のような碁盤の目になっている道を、A を出発点として、遠まわりをせずに B 地点に向かいます。このとき、次の道順は何通りありますか。

(1) すべての道順

(2) (1) のうちで、C 地点を通る道順



＜解説＞

(1) すべての道順：右右右右右上上上

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1} = 56\ (\text{通り})$$

(2) (1) のうちで、C 地点を通る道順

① A 地点から C 地点には、右に 3 回、上に 2 回進めばたどり着くことができるので、その道順は、

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1} = 10\ (\text{通り})$$

② C 地点から B 地点には、右に 2 回、上に 1 回進むことでたどり着くことができるので、その道順は、

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 3\ (\text{通り})$$

①, ②より、C 地点を通る道順は、積の法則から、

$$10\times3 = 30\ (\text{通り})$$