# 【数学 III】微分法

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

# 目次

# 1　微分係数と導関数

## 1.1　微分係数と極限

関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといいます。また，その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**（**変化率**）といい、$f'(a)$ と表します。このとき，$a+h=x$ とおくと，$h\longrightarrow0$ のとき $x\longrightarrow a$ となるので，$f'(a)$ は次のように表すことができます。

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

【例題 1 − 1】

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $a$, $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表しなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

＜解説＞

微分係数の定義式が使える形に変形します。このとき，次のように $\square$ には同じものが当てはまるように注意します。

$$f'(a)=\lim_{\square\to0}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$$

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}&=\lim_{h\to0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\right\}\\&=2\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=2f'(a)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-a\{f(x)-f(a)\}-af(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\left\{f(a)-a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\\&=\lim_{x\to a}f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a)\end{aligned}$$

【演習 1 − 1】

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $a$, $f(a)$, $f'(a)$ を用いて表しなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-3h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}$

## 1.2 微分可能性

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\} &= \lim_{x \to a}\left\{(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\\ &= 0 \cdot f'(a) = 0\end{aligned}$$

このことから，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

という関係が成り立つので，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続になります。ただし，この命題の逆は成り立たず，関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限りません。

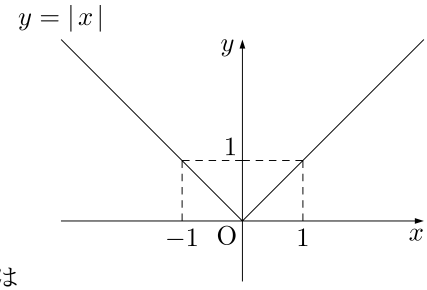
一般に，関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，その関数のグラフは途切れることなくつながっていて（連続），なおかつなめらかな（尖っていない）ものになります。

【例題 1 − 2】

次の関数の $x=0$ における微分可能性を調べなさい。

$$f(x) = |\,x\,|$$

＜解説＞




$x \geqq 0$ のとき $f(x)=x$, $x<0$ のとき $f(x)=-x$ になるので，

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h \to -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-h}{h} = -1$$

このことから，極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しないので，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能ではありません。

【演習 1 − 2】

次の関数の $x=0$ における微分可能性を調べなさい。

(1) $f(x) = |\,x^2+x\,|$

(2) $f(x) = \begin{cases} x+7 & (x<0) \\ x^3+7 & (x \geqq 0) \end{cases}$

## 1.3 積の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき，その積の導関数 $\{f(x)g(x)\}'$ は次のようになります。

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

【例題 1 − 3】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=(x^2-2)(x+1)$　　(2) $y=x^3(2x^2-x+1)$

＜解説＞

(1)
$$\begin{aligned}
y' &= (x^2-2)'(x+1)+(x^2-2)(x+1)'\\
&= 2x(x+1)+(x^2-2)\cdot 1\\
&= 2x^2+2x+x^2-2\\
&= 3x^2+2x-2
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
y' &= (x^3)'(2x^2-x+1)+x^3(2x^2-x+1)'\\
&= 3x^2(2x^2-x+1)+x^3(4x-1)\\
&= 6x^4-3x^3+3x^2+4x^4-x^3\\
&= 10x^4-4x^3+3x^2
\end{aligned}$$

【演習 1 − 3】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=(3x^2-1)(x+4x^3)$　　(2) $y=(2x^2-x^3)(4x+3x^2)$　　(3) $y=(2x-1)(x^2+2x-1)$

## 1.4 商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき，その商の導関数 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'$ は次のようになります。

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

また，$f(x)=1$ とすれば，$f'(x)=0$ となるので，

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \frac{0\cdot g(x)-1\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【例題１－４】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$

(2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

＜解説＞

(1) $y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) 
$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

【演習１－４】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=-\dfrac{4}{2x-3}$

(2) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

## 1.5 $x^n$ の導関数

$n$ が自然数（正の整数）であるとき，

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

が成り立ちますが，

$$\left(x^0\right)' = (1)' = 0, \qquad 0 \cdot x^{0-1} = 0$$

となり，$n=0$ のときも成り立ちます。また，$n=-m$ ($m$ は正の整数) とすると，商の導関数の公式から，

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

となり，$n$ が負の整数であるときにも成り立ちます。

以上のことから，$n$ が整数であるとき次の関係が成り立ちます。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

【例題 1 − 5】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \dfrac{1}{x^3}$　(2) $y = -\dfrac{1}{4x^4}$　(3) $y = \dfrac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

<解説>

(1)
$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{x^3}\right)' \\ &= (x^{-3})' \\ &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= \left(-\frac{1}{4x^4}\right)' \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (x^{-4})' \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (-4x^{-4-1}) \\ &= x^{-5} = \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}\right)' \\ &= (x-5+4x^{-2})' \\ &= 1-0+4\cdot(-2x^{-2-1}) \\ &= 1-8x^{-3} = 1-\frac{8}{x^3} \end{aligned}$$

## 1.6　合成関数の導関数

微分可能な 2 つの関数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ について，$x$ の増分 $\varDelta x$ に対する $u = g(x)$ の増分を $\varDelta u$ とし，$u$ の増分 $\varDelta u$ に対する $y = f(u)$ の増分を $\varDelta y$ とします。

$$\varDelta u = g(x + \varDelta x) - g(x), \qquad \varDelta y = f(u + \varDelta u) - f(u)$$

$u = g(x)$ は連続であるので，

$$\varDelta x \longrightarrow 0 \text{ のとき}, \varDelta u = g(x + \varDelta x) - g(x) \longrightarrow 0$$

このことから，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \left( \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \cdot \frac{\varDelta u}{\varDelta x} \right) = \left( \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \right) \left( \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta u}{\varDelta x} \right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

また，$\dfrac{dy}{du} = f'(u)$, $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ であるので，合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は次のように表すこともでき，これらを公式として利用します。

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

【例題 1 − 6】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = (2x + 3)^2$　　(2) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)^2}$

<解説>

(1) $u = 2x + 3$ とすると，$y = u^2$ と表すことができるので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2$$

よって，

$$y' = 2(2x + 3) \cdot 2 = 4(2x + 3)$$

(2) $u = x^2 - 1$ とすると，$y = \dfrac{1}{u^2}$ と表すことができるので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u^{-3} \cdot 2x$$

よって，

$$y' = -\frac{2}{(x^2 - 1)^3} \cdot 2x = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^3}$$

【演習 1 − 6】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = (x^2 + 3x + 1)^3$　　(2) $y = \dfrac{1}{(3x + 2)^3}$　　(3) $y = \left( \dfrac{x^2}{2x - 3} \right)^4$

## 1.7 逆関数の微分法

微分可能な関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき，$y = f^{-1}(x)$ とすると $x = f(y)$ であるので，この両辺を $x$ で微分すると，

$$1 = \frac{d}{dx}f(y)$$

右辺を合成関数の導関数の公式を用いて変形すると，

$$1 = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

【例題 1 − 7】

関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $y = f(x)$ とおいて $x$ を $y$ の式で表しなさい。　(2) $f'(x)$ を求めなさい。

＜解説＞

(1) $y = \sqrt{x}$ より，両辺を 2 乗して，

$$x = y^2$$

(2) (1) より，$\dfrac{dx}{dy} = 2y$ となるので，

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

【演習 1 − 7】

次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を $x$ の関数で表しなさい。

(1) $x = y^2 - y + 1$　(2) $x = \dfrac{1}{y^2 - 2y}$

## 1.8　$x^p$ の導関数

$p$ が有理数であるとき，$n$ を正の整数，$m$ を整数として，$p=\dfrac{m}{n}$ と表すことができます。また，$x^{\frac{1}{n}}=y$ とすれば，$x^p$ を $x$ で微分すると次のようになります。

$$\frac{d}{dx}x^p=\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}}=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m=\frac{d}{dx}y^m$$

合成関数の導関数公式から，

$$\frac{d}{dx}y^m=\frac{d}{dy}y^m\cdot\frac{dy}{dx}=my^{m-1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

さらに，$x=y^n$ より $\dfrac{dx}{dy}=ny^{n-1}$ となるので，逆関数の微分法から，

$$\begin{aligned}my^{m-1}\cdot\frac{dy}{dx}&=my^{m-1}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=my^{m-1}\cdot\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{m}{n}y^{m-n}\\&=\frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=px^{p-1}\end{aligned}$$

となり，指数が有理数であるときも，次の公式が成り立ちます。

$$(x^p)'=px^{p-1}$$

**【例題 1 − 8】**

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\sqrt{x}$　　(2) $y=\sqrt[5]{x^3}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

＜解説＞

(1) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ であるので，

$$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}$ であるので，

$$y'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$ であるので，

$$y'=\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

**【演習 1 − 8】**

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=x^2\sqrt{x}$　　(2) $y=\sqrt[3]{2x+1}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

# 2　いろいろな関数の導関数

## 2.1　三角関数の導関数

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ より，

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{h}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = \cos x\cdot 1 = \cos x$$

また，$\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x$$

さらに，商の導関数の公式から，

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

【例題 2 − 1】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \sin(3x+2)$　　(2) $y = \tan^2 x$　　(3) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

＜解説＞

(1) $y' = \cos(3x+2)\cdot(3x+2)' = 3\cos(3x+2)$

(2) $y' = 2\tan x\cdot(\tan x)' = 2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

(3) $$y' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

【演習 2 − 1】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = (x^2+1)\sin x$　　(2) $\sin^2 3x$　　(3) $\cos^3 x\sin^2 x$　　(4) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}$

### 2.2 対数関数の導関数

導関数の定義から，対数関数 $\log_a x$ の導関数は，

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

ここで，$\dfrac{h}{x} = k$ とおくと，$h \longrightarrow 0$ のとき $k \longrightarrow 0$ となるので，

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{kx} \log_a (1+k) = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \log_a (1+k) = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

このことから，極限値 $\displaystyle\lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ がわかれば，対数関数 $\log_a x$ の導関数が求まることになりますが，この極限値は $2.718281828459045\cdots$ という値になることが知られており，この値を $e$ で表します。

$$e = \lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.718281828459045\cdots$$

つまり，対数関数 $\log_a x$ の導関数は，底の変換公式を用いて底を $e$ にすると，次のように表されます。

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$

また，底が $e$ であるときには，$a = e$ として，

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x \log_e e} = \frac{1}{x}$$

一般に，10 を底とする対数を常用対数といいますが，それに対し，$e$ を底とする対数を**自然対数**といい，$e$ を**自然対数の底**と呼ぶことがあります。また，自然対数の底 $e$ は省略されることが多く，$\log_e x$ は単に $\log x$ と表すことができます。

対数の真数は正であるため，$\log_a x$ は $x > 0$ の範囲でのみ考えることになりますが，$\log_a |x|$ とすれば $x < 0$ の場合も扱えるようになります。このとき，

- $x > 0$ のとき：$(\log_a |x|)' = (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$
- $x < 0$ のとき：$(\log_a |x|)' = \{\log_a(-x)\}' = \dfrac{(-x)'}{-x \log a} = \dfrac{-1}{-x \log a} = \dfrac{1}{x \log a}$

となるので，

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a} \qquad \left(a = e \text{ のとき} \quad (\log |x|)' = \frac{1}{x}\right)$$

【例題 2 − 2】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \log(3x+2)$　　(2) $y = \log_{10} 2x$　　(3) $y = (\log x)^2$

(4) $y = \log |x^3|$　　(5) $y = \log(x^2+1)$　　(6) $y = \log_4 |x-1|$

＜解説＞

対数関数は底の変換を行うことができるので，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ となることを覚えておけば，$\log_a x$ の導関数は次のようにして導出することができます。

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log a}$$

(1) $y' = \dfrac{(3x+2)'}{3x+2} = \dfrac{3}{3x+2}$ (2) $y' = \dfrac{(2x)'}{2x\log 10} = \dfrac{2}{2x\log 10} = \dfrac{1}{x\log 10}$

(3) $y' = 2(\log x)\cdot(\log x)' = 2\log x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\log x}{x}$ (4) $y' = \dfrac{(x^3)'}{x^3} = \dfrac{3x^2}{x^3} = \dfrac{3}{x}$

(5) $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (6) $y' = \dfrac{(x-1)'}{(x-1)\log 4} = \dfrac{1}{2(x-1)\log 2}$

【演習 2 − 2】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \log_{10}(3x+1)$ (2) $y = x\log 4x$ (3) $y = \log\dfrac{x}{1+\cos x}$ (4) $y = \log|\sin x|$

## 2.3 対数微分法

対数には次のように，真数の積は対数の和，真数の商は対数の差として表すことができます。

$$\log MN = \log M + \log N, \qquad \log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

一般的に，積や商の導関数を求めるよりも，和や差の導関数を求めることの方が簡単であるため，複雑な積，商，累乗の形の関数の微分では，この対数の性質を利用します。関数 $y = f(x)$ を微分する基本手順は次のようになりますが，このような対数を利用した導関数の求め方を**対数微分法**といいます。

(ｉ) 両辺の絶対値をとる（$|\,y\,| = |\,f(x)\,|$）
(ii) 両辺の自然対数をとる（$\log|\,y\,| = \log|\,f(x)\,|$）
(iii) 対数の性質を利用して式変形

$$\log MN = \log M + \log N, \qquad \log \frac{M}{N} = \log M - \log N, \qquad \log M^k = k \log M$$

(iv) 両辺を $x$ で微分する（$(\log|\,y\,|)' = \dfrac{y'}{y}$）
(ｖ) $y'$ を求める

【例題 2 − 3】

対数微分法により，次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \dfrac{x^2(x-2)}{x+1}$　　　(2) $y = x^x \quad (x > 0)$

＜解説＞

(1) 両辺の絶対値をとると，

$$|\,y\,| = \left|\,\frac{x^2(x-2)}{x+1}\,\right|$$

この式の両辺の自然対数をとって変形すると，

$$\begin{aligned}\log|\,y\,| &= \log\left|\,\frac{x^2(x-2)}{x+1}\,\right| \\ &= 2\log|\,x\,| + \log|\,x-2\,| - \log|\,x+1\,|\end{aligned}$$

となるので，この式の両辺を $x$ で微分すると，

$$\begin{aligned}(\log|\,y\,|)' &= 2(\log|\,x\,|)' + (\log|\,x-2\,|)' - (\log|\,x+1\,|)' \\ \frac{y'}{y} &= 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{(x-2)'}{x-2} - \frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2(x-2)(x+1) + x(x+1) - x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2+x-4}{x(x-2)(x+1)} \\ y' &= \frac{x^2(x-2)}{x+1}\cdot\frac{2x^2+x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x(2x^2+x-4)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

(2) $x>0$ より $y>0$ であるので，両辺の絶対値をとる必要はなく，両辺の自然対数をとって式変形します。

$$\begin{aligned}\log y &= \log x^x \\ &= x\log x\end{aligned}$$

両辺を $x$ で微分すると，

$$\begin{aligned}(\log y)' &= (x\log x)' \\ \frac{y'}{y} &= x'\log x + x(\log x)' \\ &= 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} \\ &= \log x + 1 \\ y' &= x^x(\log x + 1)\end{aligned}$$

【演習 2 − 3】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

## 2.4 指数関数の導関数

指数関数 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \fallingdotseq 1)$ の両辺の自然対数をとると，

$$\begin{aligned}\log y &= \log a^x \\ &= x \log a\end{aligned}$$

この式の両辺を $x$ で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \log a \\ y' &= y \log a = a^x \log a\end{aligned}$$

よって，

$$(a^x)' = a^x \log a$$

また，$a = e$ のときには，

$$(e^x)' = e^x \log e = e^x$$

【例題 2 − 4】

次の関数を微分しなさい。

(1) $y = 2^x$　　(2) $y = e^{5x}$

＜解説＞

(1) $y' = 2^x \log 2$　　(2) $y' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$

【演習 2 − 4】

次の関数を微分しなさい。ただし，$a \fallingdotseq 1$, $a > 0$ とします。

(1) $y = 3^{-x}$　　(2) $y = e^{-3x}$　　(3) $y = a^{-2x}$　　(4) $y = xa^x$

## 2.5 関数の極限

$\dfrac{0}{0}$ の形（不定形）の極限を求めるとき，因数定理を利用して不定形でない形に変形しますが，そのようにしても極限を求めることができない場合，微分係数の定義式 $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ を利用することで，極限が求められる場合があります。

【例題 2 − 5】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

＜解説＞

(1) $f(x) = e^x$ とすると，$f(0) = e^0 = 1$ であるので，

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$f'(x) = e^x$ であるので，

$$f'(0) = e^0 = 1$$

よって，

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(2) $f(x) = 3^x$ とすると，$f(0) = 3^0 = 1$ であるので，

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$f'(x) = 3^x \log 3$ であるので，

$$f'(0) = 3^0 \log 3 = \log 3$$

よって，

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \log 3$$

【演習 2 − 5】

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{2x} - 1}{x}$ (3) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin x - \sin \alpha}{\sin(x - \alpha)}$

## 2.6 $e$ に関する極限

$e$ の定義式 $e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を用いて極限を求める問題があります。このとき，定義式を利用できるよう，次のような形（◯ には同じ文字）に変形することがポイントです。

$$(1+\bigcirc)^{\frac{1}{\circ}} \longrightarrow (1+0)^{\infty}$$

【例題 2 − 6】

$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ であることを用いて，次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$　(2) $\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$　(3) $\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

＜解説＞

$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ は，

$$\lim_{h \to +0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to -0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

であることを意味します。

また，(1), (2) の結果から，次の形も $e$ の定義式として扱うこともあります。

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(1) $h = \frac{1}{x}$ とおくと，$x \longrightarrow \infty$ のとき $h \longrightarrow +0$ となるので，

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \to +0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

(2) $h = \frac{1}{x}$ とおくと，$x \longrightarrow -\infty$ のとき $h \longrightarrow -0$ となるので，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \to -0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

(3) $h = -\frac{3}{x}$ とおくと，$x \longrightarrow \infty$ のとき $h \longrightarrow -0$ となるので，

$$\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{h \to -0}(1+h)^{-\frac{3}{h}} = \lim_{h \to -0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

【演習 2 − 6】

$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ であることを用いて，次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \to \infty} x\{\log(2x+1) - \log 2x\}$　(2) $\lim_{x \to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\log(1+x)}$

# 3　種々の導関数

## 3.1　高次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ をさらに微分して得られる $f'(x)$ の導関数を $y=f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，次のような記号で表します。

$$y'', \qquad f''(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

同様にして，第 2 次導関数 $f''(x)$ の導関数を**第 3 次導関数**といい，次のように表します。

$$y''', \qquad f'''(x), \qquad \frac{d^3y}{dx^3}, \qquad \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

一般に，自然数 $n$ に対して，関数 $y=f(x)$ を $n$ 回微分して得られる関数を，$y=f(x)$ の第 $n$ 次導関数といい，次のように表し，2 次以上の導関数を総称して，**高次導関数**といいます。

$$y^{(n)}, \qquad f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^ny}{dx^n}, \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

【例題 3 − 1】

次の関数の第 2 次導関数と第 3 次導関数を求めなさい。

(1) $y=x^4$　　(2) $y=\sin x$　　(3) $y=e^{3x}$

<解説>

第 $n$ 次導関数を求めるには，基本的に，$y$ を微分して第 1 次導関数 $y'$ を求め，その $y'$ を微分して第 2 次導関数 $y''$，さらに $y''$ を微分して第 3 次導関数 $y'''$ をといったように，順に微分していきます。

(1)
$$y'=4x^3$$
$$y''=12x^2$$
$$y'''=24x$$

(2)
$$y'=\cos x$$
$$y''=-\sin x$$
$$y'''=-\cos x$$

(3)
$$y'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$$
$$y''=3e^{3x}\cdot(3x)'=9e^{3x}$$
$$y'''=9e^{3x}\cdot(3x)'=27e^{3x}$$

【演習 3 − 1】

次の関数の第 2 次導関数と第 3 次導関数を求めなさい。

(1) $y=\sin^2 x$　　(2) $y=\sqrt{2x+1}$　　(3) $y=e^x\cos x$

## 3.2 陰関数の導関数

$x$ と $y$ の関係が $F(x,\ y)=0$ の形で表される関数を**陰関数**といい，それに対し，$y=f(x)$ の形で表される関数を**陽関数**といいます。

陰関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めるとき，$y=f(x)$ の形に変形できれば，今までと同じように微分することができますが，変形が難しいことも多く，そのようにして求めることができない場合があります。そのため，式変形するのではなく，$F(x,\ y)=0$ の形のまま，$y$ を $x$ の関数と考えて両辺を $x$ で微分することで，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めていきます。このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ は $x,\ y$ を含む式で表されます。

【例題 3 − 2】

次の方程式で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい。

(1) $xy=4$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

＜解説＞

(1) 両辺を $x$ について微分すると，

$$\begin{aligned} 1\cdot y+x\frac{dy}{dx}&=0 \\ x\frac{dy}{dx}&=-y \end{aligned}$$

よって，$x\fallingdotseq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\qquad \left(y=\frac{4}{x}\text{を代入すれば，}\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}\right)$$

また，$y=\dfrac{4}{x}$ として $x$ で微分すると，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}$$

(2) 両辺を $x$ について微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{2x}{4}+\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}&=0 \\ \frac{2}{9}y\cdot\frac{dy}{dx}&=-\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

【演習 3 − 2】

次の方程式で定められる $x$ の関数 $y$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい。

(1) $x^2+2xy-5y^2=1$　　(2) $(y+1)^2=x^2-x$　　(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$

### 3.3　媒介変数表示された関数の導関数

平面上の曲線の方程式が，変数 $t$ のような 1 つの変数を用いて次のような形に表されるとき，これをその曲線の**媒介変数表示**といい，$t$ を**媒介変数**といいます。

$$x = f(t) \ \cdots\cdots \ ①, \qquad y = g(t) \ \cdots\cdots \ ②$$

①を $t$ について解いたとき，その式が $t = h(x)$ と表されれば，これを②に代入すると，

$$y = g(h(x))$$

となるので，$y$ は $x$ の関数となります。このとき，

合成関数の微分法：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$，　逆関数の微分法：$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

を用いることで，媒介変数で表された関数の導関数は，次のように求めることができます。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

【例題 3 − 3】

媒介変数 $t$ で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表しなさい。

(1) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

＜解説＞

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 2t - 2$ であるので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{1} = 2t - 2$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin t$ であるので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

【演習 3 − 3】

媒介変数 $t$ で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数として表しなさい。

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{t + \tan t} \\ y = \dfrac{\cos t}{t + \tan t} \end{cases}$

### 3.4 第 $n$ 次導関数と数学的帰納法

第 $n$ 次導関数 $y^{(n)}$ を推定し，それを数学的帰納法で証明することで第 $n$ 次導関数を求める場合があります。このとき，数学的帰納法の証明手順は次のようになります。

( i ) $n=1$ のときに等式が成り立つことを証明
(ii) $n=k$ のときに等式が成り立つと仮定し，$n=k+1$ のときに等式が成り立つことを証明

【例題 3 − 4】

次の等式が成り立つことを，数学的帰納法により証明しなさい。ただし，$n$ は自然数とします。

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

＜解説＞

( i ) $n=1$ のとき

$$\text{（左辺）}=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \qquad \text{（右辺）}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

よって，$n=1$ のとき等式は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，等式が成り立つと仮定すると，

$$\frac{d^k}{dx^k}\sin x=\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)$$

このことから，$n=k+1$ のときを考えると，

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\sin x&=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\sin x\right)=\frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)\\&=\cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)=\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも等式は成り立つ。

(i), (ii) から，すべての自然数 $n$ について等式は成り立つ。

【演習 3 − 4】

次の等式が成り立つことを，数学的帰納法により証明しなさい。ただし，$n$ は自然数とします。

(1) $\dfrac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ (2) $\dfrac{d^n}{dx^n}e^x\sin x=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\dfrac{n}{4}\pi\right)$

# 4　接線の方程式

## 4.1　曲線上の点における接線・法線

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ での接線の傾きを表します。

また，垂直に交わる 2 直線の傾きの積は $-1$ になることから，点 $(a,\ f(a))$ における曲線の接線に垂直な直線（法線）の傾きは，$-\dfrac{1}{f'(a)}$ となります。

以上のことから，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線と法線の方程式は，次のように表されます。

- 接線の方程式：$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- 法線の方程式：$y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$　　（ただし，$f'(a) \fallingdotseq 0$）

【例題 4 − 1】

次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めなさい。

(1) $y = x^3 - 3x^2$,　A$(1,\ -2)$

(2) $y = \dfrac{x}{2x+1}$,　A$\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$

＜解説＞

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$ とおくと，

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

となるので，

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

よって，点 A における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} &y = -3(x-1) - 2 \\ &y = -3x + 1 \end{aligned}$$

また，点 A における法線の傾きは $\dfrac{1}{3}$ となるので，その方程式は，

$$\begin{aligned} &y = \frac{1}{3}(x-1) - 2 \\ &y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (2x+1) - x \cdot 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

となるので，

$$f'(1) = \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{1}{9}$$

よって，点 A における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} &y = \frac{1}{9}(x-1) + \frac{1}{3} \\ &y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

また，点 A における法線の傾きは $-9$ になるので，その方程式は，

$$\begin{aligned} &y = -9(x-1) + \frac{1}{3} \\ &y = -9x + \frac{28}{3} \end{aligned}$$

【演習 4 − 1】

次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めなさい。

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}, \quad \mathrm{A}(0,\ 0)$

(2) $y = \sqrt{x^2+1}, \quad \mathrm{A}(-\sqrt{3},\ 2)$

(3) $y = \sin x, \quad \mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) $y = (\log x)^2, \quad \mathrm{A}(e,\ 1)$

## 4.2 曲線外の点を通る接線の方程式

曲線外の点を通る接線の方程式を求めるには，主に次の方法が考えられます。

(ｉ) 曲線外の点を通る直線が曲線に接する
(ii) 曲線上の点における接線が曲線外の点を通る

ただし，(i) の方法では曲線に接するための条件が求めにくいことが多いので，(ii) の方法で接線の方程式を求めることが基本になります。

【例題 4 − 2】

曲線 $y = \log x$ について，次の接線の方程式を求めなさい。

(1) 原点を通る　　　　(2) 傾きが $e$

＜解説＞

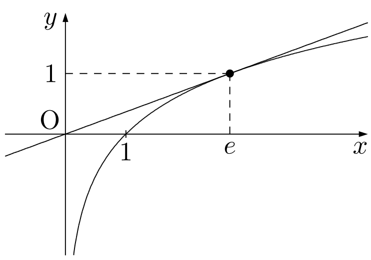
$f(x) = \log x$ とすると，

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(a) = \frac{1}{a}$$

となるので，曲線 $y = \log x$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線の方程式は，

$$y = \frac{1}{a}(x-a) + \log a$$
$$y = \frac{1}{a}x + \log a - 1 \quad \cdots\cdots\ ①$$

(1) ①の直線が原点 (0, 0) を通るので，

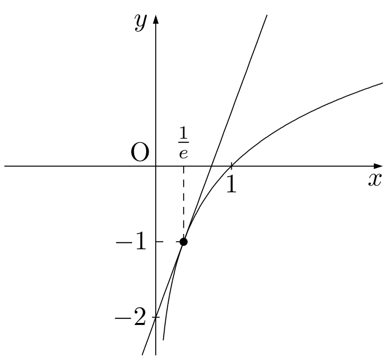



$$\log a - 1 = 0$$
$$a = e$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y = \frac{1}{e}x$$

(2) ①の直線の傾きが $e$ であるので，




$$\frac{1}{a} = e$$
$$a = \frac{1}{e}$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y = ex + \log\frac{1}{e} - 1$$
$$y = ex - 2$$

【演習４－２】

次のような接線の方程式を求めなさい。

(1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ の接線で $(-1,\ 0)$ を通る

(2) 曲線 $y=e^{2x+1}$ の接線で原点を通る

(3) 曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ の接線で原点を通る

### 4.3　2 次曲線の接線の方程式

曲線上の点における接線の方程式は，通る点（曲線上の点）がわかっているので，直線の傾き，つまり，接線の傾きがわかれば求めることができます。微分係数は曲線の接線の傾きを表すので，微分係数を求めることが接線の方程式を求めることにつながります。そこで，$x, y$ の方程式で表される曲線では，陰関数の導関数を求める方法で $\dfrac{dy}{dx}$ $(y')$ を求め，そこに接点の座標を代入することにより接線の傾きを求めます。

【例題 4 − 3】

次の方程式で表される曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めなさい。

(1) 放物線 $y^2 = 4px$

(2) 円 $x^2 + y^2 = a^2$

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(4) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

<解説>

(1) 両辺を $x$ で微分すると，

$$2yy' = 4p$$

$$y \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \quad y' = \frac{2p}{y}$$

よって，点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは，$y_1 \fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{2p}{y_1}$ となるので，求める接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{2p}{y_1}(x - x_1) + y_1 \\ y_1 y &= 2px - 2px_1 + {y_1}^2 \end{aligned}$$

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は放物線 $y^2 = 4px$ 上の点であるので，${y_1}^2 = 4px_1$ となることから，

$$\begin{aligned} y_1 y &= 2px - 2px_1 + 4px_1 \\ &= 2px + 2px_1 \\ y_1 y &= 2p(x + x_1) \qquad (y_1 = 0 \text{ のときも成り立つ}) \end{aligned}$$

(2) 両辺を $x$ で微分すると，

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y \fallingdotseq 0 \text{ のとき} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

よって，点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは，$y_1 \fallingdotseq 0$ のとき，$-\dfrac{x_1}{y_1}$ となるので，求める接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) + y_1 \\ y_1 y &= -x_1 x + {x_1}^2 + {y_1}^2 \\ x_1 x + y_1 y &= {x_1}^2 + {y_1}^2 \end{aligned}$$

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点であるので，${x_1}^2 + {y_1}^2 = a^2$ となることから，

$$x_1 x + y_1 y = a^2 \qquad (y_1 = 0 \text{ のときも成り立つ})$$

(3) 両辺を $x$ で微分すると，

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$$

$$y \fallingdotseq 0 \text{ のとき}\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

よって，点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは，$y_1 \fallingdotseq 0$ のとき，$-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ となるので，求める接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1 \\ a^2y_1y &= -b^2x_1x+b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2 \\ b^2x_1x+a^2y_1y &= b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2 \\ \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2} &= \frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2} \end{aligned}$$

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるので，$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ となることから，

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (y_1=0 \text{ のときも成り立つ})$$

(4) 両辺を $x$ で微分すると，

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$$

$$y \fallingdotseq 0 \text{ のとき}\quad y'=\frac{b^2x}{a^2y}$$

よって，点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きは，$y_1 \fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ となるので，求める接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1 \\ a^2y_1y &= b^2x_1x-b^2{x_1}^2+a^2{y_1}^2 \\ b^2x_1x-a^2y_1y &= b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2 \\ \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2} &= \frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2} \end{aligned}$$

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるので，$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ となることから，

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (y_1=0 \text{ のときも成り立つ})$$

【演習 4 − 3】

次の曲線上の，与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=9,\quad (1,\ -2\sqrt{2})$　　(2) $y^2=-2x,\quad (-2,\ 2)$

(3) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\quad \left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

## 4.4 媒介変数で表された曲線の接線

曲線上の点における接線の方程式は，通る点（曲線上の点）がわかっているので，直線の傾き，つまり，接線の傾きがわかれば求めることができます。微分係数は曲線の接線の傾きを表すので，微分係数を求めることが接線の方程式を求めることにつながります。

媒介変数で表された曲線では，媒介変数表示された関数の導関数により，媒介変数が $t$ であるとき，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

となるので，そこに条件を代入することにより接線の傾きを求めます。

【例題 4 − 4】

媒介変数 $\theta$ で表された曲線 $x = \sqrt{3}\cos\theta$, $y = 4\sin\theta$ について，$\theta = -\frac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ のとき，

$$x = \sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = 4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

となるので，接点の座標は $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$ になります。また，

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{3}\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta$$

より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{4\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}$$

となるので，接線の傾きは $\theta = -\frac{\pi}{6}$ のときを考えて，

$$-\frac{4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4$$

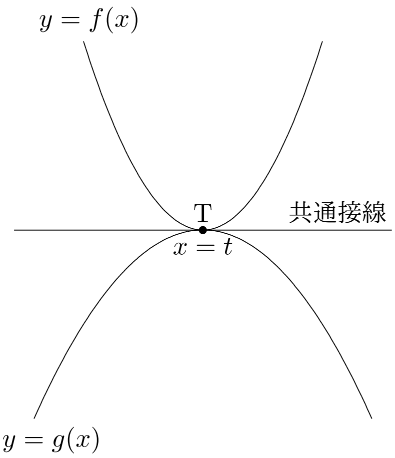
よって，求める接線の方程式は，

$$y = 4\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2$$
$$y = 4x - 8$$

【演習 4 − 4】

媒介変数 $\theta$ で表された曲線 $x = \sin 2\theta\cos\theta$, $y = \sin 2\theta\sin\theta$ について，$\theta = \frac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めなさい。

## 4.5 接する 2 曲線




右の図のように，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ である点 T で接するとき，2 曲線の共有点 T で共通な接線をもちます。逆に，点 T を通る直線に対し，その直線に点 T で接する 2 曲線も点 T で接することになるので，2 曲線が点 T で接するための必要十分条件は，「2 曲線の共有点 T で共通な接線をもつ」ことです。

直線は通る 1 点と傾きが決まれば 1 つに定まるので，2 曲線の点 T における接線が共通であることを示すには，それぞれの接線の，通る 1 点と傾きが一致していることを示せばよいことになります。

それぞれの接線は点 T を通るので，

$$f(t)=g(t) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

また，点 T における 2 曲線の接線の傾きは等しいので，

$$f'(t)=g'(t) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

よって，①, ②の条件を満たせば 2 曲線は接することになります。

【例題 4 − 5】

2 つの曲線 $y=e^x$ と $y=\sqrt{x+a}$ はともにある点 P を通り，しかも点 P において共通の接線をもっています。このとき，$a$ の値と接線の方程式を求めなさい。

<解説>

$f(x)=e^x,\ g(x)=\sqrt{x+a}$ とおくと，

$$f'(x)=e^x, \qquad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}$$

点 P の $x$ 座標を $x=p$ とすると，2 曲線は点 P を通るので，$f(p)=g(p)$ より，

$$e^p=\sqrt{p+a} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

また，点 P において共通の接線をもつので，$f'(p)=g'(p)$ より，

$$e^p=\frac{1}{2\sqrt{p+a}} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①, ②より，

$$\begin{aligned} e^p &= \frac{1}{2e^p} \\ e^{2p} &= \frac{1}{2} \\ 2p &= \log\frac{1}{2} \\ p &= -\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2p} &= p+a \\ a &= e^{2p}-p \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2=\frac{1}{2}(1+\log 2) \end{aligned}$$

また，

$$e^p = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるので，求める接線の方程式は，

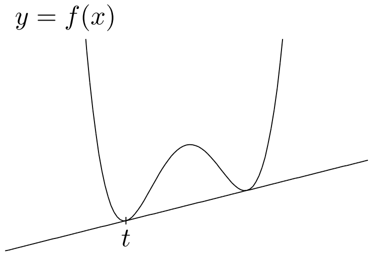
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{2}\log 2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\log 2\right)$$

【演習 4 − 5】

(1) 2 つの曲線 $y = e^{\frac{x}{3}}$ と $y = a\sqrt{2x-2} + b$ が $x = 3$ で接するとき，定数 $a$, $b$ の値を求めなさい。

(2) 2 つの曲線 $y = 2\cos x$ と $y = a - \sin 2x$ が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で接するように，定数 $a$ の値を定めなさい。

## 4.6　ある点から引ける接線の個数




曲線 $y = f(x)$ 上にある点の座標を $(t,\ f(t))$ とすると，その点における接線の方程式は次のように表されます。

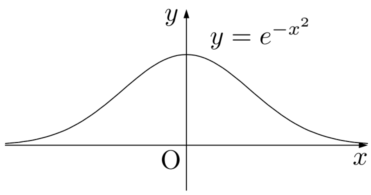
$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

この接線が曲線外のある点を通るとき，その点の座標を代入することで，$t$ についての方程式が得られます。その方程式の解は接点の $x$ 座標を表すので，方程式の解の個数は接点の個数を表すことになります。そして，接点に応じて曲線の接線が決まるので，接線の個数を考えることができます。ただし，上の図のように，1 本の直線が曲線と 2 点以上の点で接することもあり，異なる接点において異なる接線が必ず引けるとは限らないので注意が必要です。

【例題 4 − 6】

曲線 $y = e^{-x^2}$ に $x$ 軸上の点 $(a,\ 0)$ から接線を引くとき，異なる 2 本の接線が引けるような $a$ の値の範囲を求めなさい。

＜解説＞




曲線 $y = e^{-x^2}$ 上の点を $(t,\ e^{-t^2})$ とすると，$y = e^{-x^2}$ より，

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$$

となるので，点 $(t,\ e^{-t^2})$ における接線の方程式は，

$$y = -2te^{-t^2}(x-t) + e^{-t^2}$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るので，

$$-2te^{-t^2}(a-t) + e^{-t^2} = 0$$

$e^{-t^2} > 0$ より　$-2t(a-t) + 1 = 0$

$$2t^2 - 2at + 1 = 0 \ \cdots\cdots \ ①$$

点 $(a,\ 0)$ から異なる 2 本の接線が引けるためには，①の 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよいので，判別式を $D$ とすると，

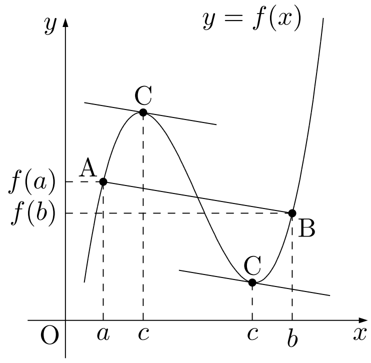
$$\frac{D}{4} = a^2 - 2 \cdot 1 > 0$$

よって，

$$a < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < a$$

# 5　平均値の定理

## 5.1　平均値の定理




右の図のように，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ線分 AB があります。グラフがなめらかな曲線であるとき，曲線上で A と B の間に，線分 AB と平行な接線を考えることができます。線分 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，また，接点を C とし，点 C における接線の傾きを $f'(c)$ とすると，一般に，関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が存在し，これを**平均値の定理**といいます。ただし，実数 $c$ は 1 つとは限らず，複数存在する場合があります。

【例題 5 − 1】

次の関数と示された区間について，平均値の定理の実数 $c$ の値を求めなさい。

(1) $f(x)=x^2$　　$[1,\ 3]$　　　(2) $f(x)=2x^3$　　$[-1,\ 1]$

＜解説＞

(1) $f(x)$ は区間 $[1,\ 3]$ で連続で，区間 $(1,\ 3)$ で微分可能。また，$f'(x)=2x$ であるので，

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,\qquad f'(c)=2c$$

よって，平均値の定理より，

$$\begin{aligned}2c&=4\\c&=2\end{aligned}$$

この $c$ の値は $1<c<3$ を満たします。

(2) $f(x)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，区間 $(-1,\ 1)$ で微分可能。また，$f'(x)=6x^2$ であるので，

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2\cdot1^3-2\cdot(-1)^3}{2}=2,\qquad f'(c)=6c^2$$

よって，平均値の定理より，

$$\begin{aligned}6c^2&=2\\c^2&=\frac{1}{3}\\c&=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

この $c$ の値は $-1<c<1$ を満たします。

【演習 5 − 1】

次の関数と示された区間について，平均値の定理の実数 $c$ の値を求めなさい。

(1) $f(x) = 2x^2 - 3 \quad [p,\ q]$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 \quad [1,\ 2]$

(3) $f(x) = e^x \quad [0,\ 1]$

(4) $f(x) = \log x \quad [1,\ 2]$

## 5.2　不等式と平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \cdots\cdots\ ①,\qquad a<c<b\ \cdots\cdots\ ②$$

を満たす実数 $c$ が存在します（平均値の定理）。

①の式を用いることで，関数の差 $f(b)-f(a)$ のような式を $f'(c)$ で表すことができ，また，②の大小関係が成り立つことから，平均値の定理を不等式に利用することができる場合があります。

【例題 5 − 2】

平均値の定理を用いて，次のことを証明しなさい。

$a>0$ のとき　$a<e^a-1<ae^a$

＜解説＞

関数 $f(x)=e^x$ とすれば，

$$e^a-1=e^a-e^0=f(a)-f(0)$$

と表すことができるので，平均値の定理が利用できそうです。そこで，次のようにして証明することができます。

関数 $f(x)=e^x$ は実数全体で微分可能で，$f'(x)=e^x$ となります。そこで，区間 $[0,\ a]$ において平均値の定理を用いると，

$$\frac{e^a-e^0}{a-0}=\frac{e^a-1}{a}=e^c,\qquad 0<c<a$$

を満たす実数 $c$ が存在します。

関数 $f(x)$ は増加関数であるので，$0<c<a$ より，

$$e^0<e^c<e^a$$

よって，

$$1<e^c<e^a$$

$$1<\frac{e^a-1}{a}<e^a$$

$a>0$ であるので，各辺に $a$ を掛けて，

$$a<e^a-1<ae^a$$

【演習 5 − 2】

平均値の定理を用いて，次のことを証明しなさい。

(1) $0<a<b$ のとき，$1-\dfrac{a}{b}<\log\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-1$

(2) $a>0$ のとき，$\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

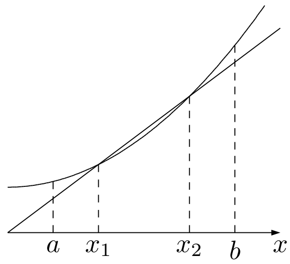
# 6 関数の値の変化

## 6.1 関数の増減

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとします。

(i) 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ であるとき

区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 $x_1,\ x_2$ をとると，平均値の定理より，




$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad x_1 < c < x_2$$

を満たす実数 $c$ が存在します。

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ であることから，

$$f'(c) > 0$$

さらに，$x_1 < x_2$ より，$x_2 - x_1 > 0$ となるので，

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

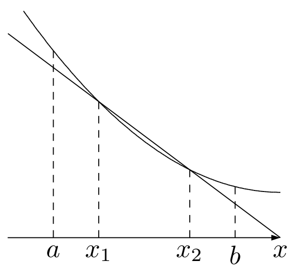
つまり，

$$f(x_1) < f(x_2)$$

となるので，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加します。

(ii) 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ であるとき

区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 $x_1,\ x_2$ をとると，平均値の定理より，




$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad x_1 < c < x_2$$

を満たす実数 $c$ が存在します。

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ であることから，

$$f'(c) < 0$$

さらに，$x_1 < x_2$ より，$x_2 - x_1 > 0$ となるので，

$$f(x_2) - f(x_1) < 0$$

つまり，

$$f(x_1) > f(x_2)$$

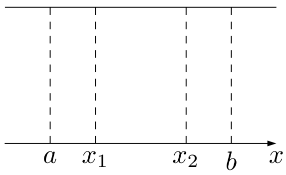
となるので，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少します。

(iii) 区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ であるとき

区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 $x_1,\, x_2$ をとると，

平均値の定理より，

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad x_1 < c < x_2$$




を満たす実数 $c$ が存在します。

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ であることから，

$$f'(c) = 0$$

さらに，$x_1 < x_2$ より，$x_2 - x_1 > 0$ となるので，

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

つまり，

$$f(x_1) = f(x_2)$$

となるので，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で $x$ の値によらず一定の値をとります。このことから，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数であることがわかります。

以上のことから，関数 $f(x)$ の増加・減少は，その導関数 $f'(x)$ の符号から次のように判断できることになります。

(i) $f'(x) > 0$ のとき：その区間で増加　　(ii) $f'(x) < 0$ のとき：その区間で減少

【例題 6 − 1】

次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x) = x^4 - 4x^2$　　(2) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$　　(3) $f(x) = x^4 e^{-x}$

＜解説＞

関数の増減を調べるには，増減表を利用して導関数 $f'(x)$ の符号を調べます。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

$f'(x) = 0$ とすると，

$$x = 0,\ \pm\sqrt{2}$$

となるので，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

よって，$f(x)$ は，

$x \leqq -\sqrt{2},\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ で減少し，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq 0,\ \sqrt{2} \leqq x$ で増加する。

(2) 分母は 0 にはならないので，この関数の定義域は $x \fallingdotseq 0$ になります。また，導関数 $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)' \cdot x - (x^2+4) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると，

$$x = \pm 2$$

となるので，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | / | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-4$ | $\searrow$ | / | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ |

よって，$f(x)$ は，

$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$ で増加し，$-2 \leqq x < 0,\ 0 < x \leqq 2$ で減少する。

(3) 導関数 $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x) = (x^4)' \cdot e^{-x} + x^4 \cdot (e^{-x})' = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = -x^3e^{-x}(x-4)$$

$f'(x) = 0$ とすると，

$$x = 0,\ 4$$

となるので，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $256e^{-4}$ | $\searrow$ |

よって，$f(x)$ は，

$x \leqq 0,\ 4 \leqq x$ で減少し，$0 \leqq x \leqq 4$ で増加する。

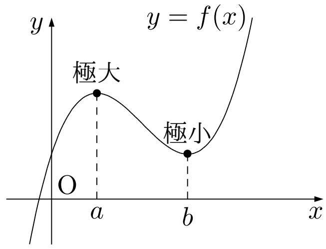
【演習 6 − 1】

次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$　　(2) $f(x) = \cos x + x\sin x \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$

(3) $f(x) = e^{x-1} - \log x + 1$　　(4) $f(x) = \sin 2x - 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

## 6.2 関数の極大・極小




連続な関数 $f(x)$ が $x=a$ を境にして増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**といいます。また，$x=b$ を境にして減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x=b$ で**極小**であるといい，$f(b)$ を**極小値**，極大値と極小値をあわせて**極値**といいます。

微分可能な関数 $f(x)$ では，導関数の符号と関数の増減には次の関係が成り立ちます。

(i) $f'(x)>0$ のとき：その区間で増加　　(ii) $f'(x)<0$ のとき：その区間で減少

そのため，微分可能な関数の極大・極小は，導関数 $f'(x)$ の変化から次のように判断することができます。

(i) 極大：$f'(x)$ の値が正から負に変わるところ　　(ii) 極小：$f'(x)$ の値が負から正に変わるところ

また，$f'(x)$ の符号が変化するところでは $f'(x)=0$ となるので，

$$f'(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(a)=0$$

という関係が成り立ちます。ただし，$f'(x)=0$ であったとしても，その前後の $x$ の値において $f'(x)$ の符号が変わらないこともあるので，この逆は成り立ちません。つまり，$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限りません。

【例題 6 − 2】

次の関数の極値を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$　　(2) $y=x^2e^{-x}$

＜解説＞

微分可能な関数 $f(x)$ の極大・極小は，導関数 $f'(x)$ の変化から判断することができるので，増減表を利用して極値を求めていきます。

(1) $y$ は実数全体で微分可能であるので導関数 $y'$ を求めると，

$$y'=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$y'=0$ とすると，

$$x=-\frac{1}{2}$$

となるので，$y$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{4}{3}$ | ↘ |

このことから，

$$x=-\frac{1}{2} \text{ のとき極大値 } \frac{4}{3}$$

(2) $y$ は実数全体で微分可能であるので導関数 $y'$ を求めると，

$$y' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = -e^{-x}x(x-2)$$

$y' = 0$ とすると，

$$x = 0,\ 2$$

となるので，$y$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{4}{e^2}$ | $\searrow$ |

このことから，

$x = 0$ のとき極小値 $0$，$x = 2$ のとき極大値 $\dfrac{4}{e^2}$

【演習 6 − 2】

次の関数の極値を求めなさい。

(1) $y = 2\sin x - x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2) $y = xe^{-x^2}$

## 6.3 関数の極値

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、

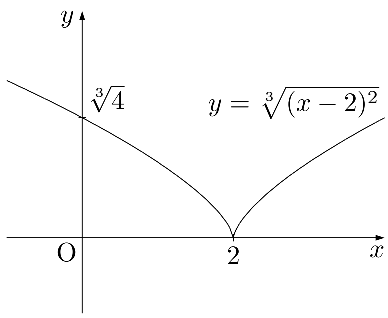
$$f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(a)=0$$

が成り立ちますが、$f'(a)=0$ のときに、$x=a$ で極値をとるとは限りません。また、$x=a$ で微分可能でないときでも、$x=a$ で極値をとることもあります。そのため、関数の極値を求めるには増減表を利用します。$f'(x)=0$ となる $x$ の値や、$f'(x)$ が存在しない $x$ の値の前後における $f'(x)$ の符号の変化から極値を判断しますが、$f'(x)$ が存在しない $x$ の値には、絶対値記号の中身が 0 になる $x$ の値や、$f'(x)$ の分母が 0 となる $x$ の値などが候補となります。

【例題 6 − 3】

関数 $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ の極値を求めなさい。

＜解説＞




関数の定義域は実数全体で、

$$y=\sqrt[3]{(x-2)^2}=(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

であるので、$x \fallingdotseq 2$ のとき、

$$y'=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

よって、関数 $y$ は $x=2$ のとき微分可能ではなく、$y'=0$ となる $x$ も存在しないため、$y$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | $+$ |
| $y$ | ↘ | 0 | ↗ |

よって、

$$x=2 \text{ のとき極小値 } 0$$

【演習 6 − 3】

次の関数の極値を求めなさい。

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}(x+5)$　　(2) $y=|x|\sqrt{x+3}$

## 6.4 極値から係数決定

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，

$$f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(a)=0$$

が成り立ちます。ただし，$f'(a)=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない（逆は成り立たない）ので，極値の条件から関数の係数を決定するような問題では，主に次の手順により係数を決定していきます。

(i) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求める
(ii) 極値の条件から係数で成り立つ関係式を導く
(iii) (ii) の方程式を解く
(iv) (iii) で得られた係数が条件を満たすことを確認（増減表）

【例題 6 − 4】

関数 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}+a$ が極値 1 をもつとき，極値をもつときの $x$ の値と $a$ の値を求めなさい。

＜解説＞

定義域は $x \fallingdotseq 0$ で，

$$f'(x)=2x+\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3+2}{x^2}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると，

$$x=-1$$

このことから，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | ／ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $f(-1)$ | ↗ | ／ | ↗ |

よって，$x=-1$ のとき極小値をもち，$f(-1)=1$ であるので，

$$\begin{aligned} f(-1)=1+2+a&=1 \\ a&=-2 \end{aligned}$$

【演習 6 − 4】

関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+3x}$ が $x=-\dfrac{1}{3}$ で極値 $-9$ をとるとき，$a$ と $b$ の値を求めなさい。また，このとき，$f(x)$ のすべての極値を求めなさい。

## 6.5 極値をもつ条件

関数 $f(x)$ が極値（極大値または極小値）をもつとき，増加から減少（減少から増加）となる点が存在します。関数 $f(x)$ の増加・減少は，その導関数 $f(x)$ の符号で判断できるので，次の関係が成り立ちます。

関数 $f(x)$ が極値をもつ $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が変わる点が存在

【例題 6 − 5】

$0 < x < \pi$ の範囲で定義された関数 $f(x) = \dfrac{a + \cos x}{\sin x}$ について，

(1) この関数が極値をもつように，実数 $a$ の値の範囲を求めなさい。

(2) (1) の範囲にある $a$ に対して，この関数の極値を求めなさい。

＜解説＞

$f'(x)$ の符号が変わる点は，次のようなものが候補となります。

- $f'(x) = 0$ となる $x$ の値
- 絶対値記号の中身が 0 になる $x$ の値
- $f'(x)$ の分母が 0 となる $x$ の値

(1) $0 < x < \pi$ において，

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (a + \cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - a\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{a\cos x + 1}{\sin^2 x}$$

このとき，$\sin^2 x > 0$ であるので，$f'(x)$ の符号は $-(a\cos x + 1)$ の符号と一致します。$f'(x) = 0$ とすると，

$$a\cos x + 1 = 0$$

$a = 0$ のとき，この方程式は成り立たないので $a \fallingdotseq 0$ となることから，

$$\cos x = -\frac{1}{a} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$0 < x < \pi$ のとき $-1 < \cos x < 1$ であるので，①の方程式の解が存在する条件は，

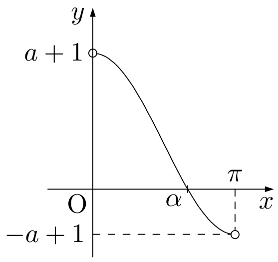
$$-1 < -\frac{1}{a} < 1$$

よって，

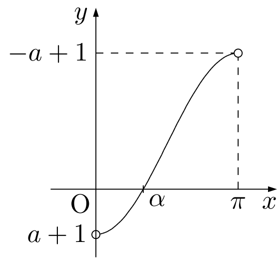
$$a < -1,\ 1 < a$$

このとき，①の方程式を満たす $x$ の値を $\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ とすると，$y = a\cos x + 1$ のグラフは次のようになり，$x = \alpha$ の前後で $y = a\cos x + 1$ の符号は変わることから，$f'(x)$ の符号も $x = \alpha$ の前後で変わることになります。

(i) $a>1$ のとき




(ii) $a<-1$ のとき




よって，求める $a$ の値の範囲は，

$$a<-1,\ 1<a$$

(2) (1) より，$f(x)$ の増減表は次のようになります。また，このとき，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{a}$ となることから，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$$

(i) $a>1$ のとき

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | |

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{a+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\\&=\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}=\sqrt{a^2-1}\end{aligned}$$

(ii) $a<-1$ のとき

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | |

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{a+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2-1}}\\&=\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2-1}}=-\sqrt{a^2-1}\end{aligned}$$

よって，

$a>1$ のとき極小値 $\sqrt{a^2-1}$，$a<-1$ のとき極大値 $-\sqrt{a^2-1}$

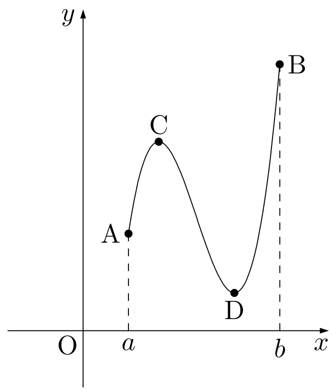
【演習 6 − 5】

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，関数 $f(x)=\sin x+\tan x-ax$ が極値をもつための $a$ の範囲を求めなさい。

## 6.6 関数の最大・最小

与えられた定義域において，与えられた関数 $y = f(x)$ に対し，その値域の中で最も大きな値を**最大値**，最も小さな値を**最小値**といいます。閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもちます（最大値・最小値の定理）。ただし，閉区間でない場合や関数が連続でない場合は，最大値や最小値をもつとは限らないので注意が必要です。

関数 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフが右図のようになる場合，最大・最小となる点の候補は次のようなものが考えられます。




- 最大となる点：極大となる点（点 C），端点（点 B）
- 最小となる点：極小となる点（点 D），端点（点 A）

極値を求めるには関数の増減について調べる必要があるので，関数の最大・最小を求めるには，与えられた定義域において増減表を作るのが効果的となります。

【例題 6 − 6】

次の関数の最大値，最小値を求めなさい。

(1) $y = e^{-x}\sin x + e^{x}\cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(2) $y = \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$

＜解説＞

(1) $f(x) = e^{-x}\sin x + e^{x}\cos x$ とすると導関数は，

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x + e^{x}\cos x + e^{x}(-\sin x) \\ &= e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{x}(-\sin x + \cos x) \\ &= (e^{x} + e^{-x})(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}(e^{x} + e^{-x})\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{3}{4}\pi \leqq x + \dfrac{3}{4}\pi \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ であるので，$f'(x) = 0$ とすると $\sin\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right) = 0$ より，

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{4}\pi &= \pi \\ x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

このことから，$f(x)$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | $\searrow$ | $e^{-\frac{\pi}{2}}$ |

ここで，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4} + e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$$

であり，また，

$$e^{-\frac{\pi}{2}} < e^0 = 1$$

となるので，

$$x = \frac{\pi}{4}\text{で最大値}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}),\ x = \frac{\pi}{2}\text{で最小値}\ e^{-\frac{\pi}{2}}$$

(2) 導関数は，

$$y' = \frac{2(x^2-2x+2) - 2(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

となるので，$y'=0$ とすると，

$$x = 0,\ 2$$

また，

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$$

となるので，$y$ の増減表は次のようになります。

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

よって，

$$x = 2\ \text{で最大値}\ 1,\ x = 0\ \text{で最小値}\ -1$$

【演習 6 − 6】

次の関数の最大値，最小値を求めなさい。

(1) $y = e^{2x} - e^x - x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$　　(2) $y = x\log x$

# 7 関数のグラフ

## 7.1 曲線の凹凸と変曲点

ある区間で曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きが，$x$ の増加にともなって大きくなるとき，曲線はその区間で**下に凸**であるといい，$x$ の増加にともなって小さくなるとき，曲線はその区間で**上に凸**であるといいます。

関数 $f(x)$ の増加・減少は，その導関数 $f'(x)$ の符号から判断することができました。同様にして，$f'(x)$ の増加・減少は，その導関数 $f''(x)$ の符号から判断することができます。接線の傾きは $f'(x)$ で表されるので，接線の傾きの増加・減少は，$f''(x)$ の符号から判断することができます。このことから，曲線 $y = f(x)$ の凹凸について，次のことが成り立ちます。

- $f''(x) > 0$ となる区間では，曲線 $y = f(x)$ は下に凸
- $f''(x) < 0$ となる区間では，曲線 $y = f(x)$ は上に凸

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ で曲線の凹凸が入れ替わるとき，この点を曲線 $y = f(x)$ の**変曲点**といいます。曲線 $y = f(x)$ の凹凸は $f''(x)$ の符号により判断することができるので，$f(x)$ が 2 回微分可能で $f''(a) = 0$ であるとき，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば，点 $(a,\ f(a))$ は変曲点になります。

【例題 7 − 1】

次の曲線の凹凸を調べなさい。また，変曲点があればその座標を求めなさい。

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 12x + 1$　　(2) $y = \log(x^2 + 1)$

＜解説＞

下に凸，上に凸をそれぞれ「∪」,「∩」という記号で表します。

(1) 第 2 次導関数を求めると，

$$y' = 3x^2 - 6x - 12$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$y'' = 0$ とすると，

$$x = 1$$

このことから，$y''$ の符号を調べ凹凸の表をつくると，次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | $-13$ | $\cup$ |

よって，

$x < 1$ で上に凸，$x > 1$ で下に凸，変曲点の座標は $(1,\ -13)$

(2) 第 2 次導関数を求めると，

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}$$
$$y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$y'' = 0$ とすると，

$$x = \pm 1$$

このことから，$y''$ の符号を調べ凹凸の表をつくると，次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\cap$ | $\log 2$ | $\cup$ | $\log 2$ | $\cap$ |

よって，

$x < -1,\ 1 < x$ で上に凸，$-1 < x < 1$ で下に凸，変曲点の座標は $(-1,\ \log 2),\ (1,\ \log 2)$

【演習 7 − 1】

次の曲線の凹凸を調べなさい。また，変曲点があればその座標を求めなさい。

(1) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$　　　(2) $y = (\log x)^2$

## 7.2 漸近線

曲線上の点が限りなく遠ざかるにつれて，曲線が直線に限りなく近づくとき，この直線を，曲線の**漸近線**といいます。

関数 $y=f(x)$ のグラフの漸近線については，次のようにして考えます。

( i ) $x$ 軸に垂直な漸近線

$\lim_{x \to d+0} f(x)$, $\lim_{x \to d-0} f(x)$ のうち，少なくとも 1 つが $\infty$ または $-\infty$ になれば，直線 $x=d$ が漸近線

(ii) $x$ 軸に垂直でない漸近線

$\lim_{x \to \infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x \to -\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ ならば，直線 $y=ax+b$ が漸近線

一般に，関数 $y=f(x)$ が，$a$, $b$, $c$, $d$ を定数として $y=ax+b+\dfrac{c}{x-d}$ という形で表されるとき，

$$\lim_{x \to d+0}\left(ax+b+\frac{c}{x-d}\right)=\infty \quad （または -\infty）, \qquad \lim_{x \to d-0}\left(ax+b+\frac{c}{x-d}\right)=-\infty \quad （または \infty）$$

となるので，$x=d$ が漸近線。また，

$$\lim_{x \to \infty}\{y-(ax+b)\}=\lim_{x \to \infty}\frac{c}{x-d}=0, \qquad \lim_{x \to -\infty}\{y-(ax+b)\}=\lim_{x \to -\infty}\frac{c}{x-d}=0$$

となるので，$y=ax+b$ が漸近線となります。このことから，関数 $y=ax+b+\dfrac{c}{x-d}$ の漸近線は次のようになります。

( i ) $x$ 軸に垂直な漸近線 : (分母) $\longrightarrow 0$ とする $x$ の式（$x=d$）

(ii) $x$ 軸に垂直でない漸近線 : $x \to \pm\infty$ としたときに 0 に収束しない部分（$y=ax+b$）

【例題 7 − 2】

次の関数のグラフの漸近線の方程式を求めなさい。

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

＜解説＞

(1) (分母) $\longrightarrow 0$ となる極限を考えると，

$$\lim_{x \to +0} y=\infty, \qquad \lim_{x \to -0} y=-\infty$$

であるので，直線 $x=0$（$y$ 軸）が漸近線となり，この関数は $x \fallingdotseq 0$ で連続であるので，これ以外に $x$ 軸に垂直な漸近線はありません。また，

$$\lim_{x \to \infty}(y-x)=\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x \to -\infty}(y-x)=\lim_{x \to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

となるので，直線 $y=x$ が漸近線。以上のことから，求める漸近線の方程式は，

$$x=0, \quad y=x$$

(2) (分母) $\longrightarrow 0$ となる極限を考えると，

$$\lim_{x \to 2+0} y=\infty, \qquad \lim_{x \to 2-0} y=-\infty$$

であるので，直線 $x=2$ が漸近線となり，この関数は $x \fallingdotseq 2$ で連続であるので，これ以外に $x$ 軸に垂直な漸近線はありません。また，$y=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ から，

$$y=\frac{(x-2)(x+2)+3}{x-2}=x+2+\frac{3}{x-2}$$

と変形できるので，

$$\lim_{x\to\infty}\{y-(x+2)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-2}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\{y-(x+2)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-2}=0$$

となるので，直線 $y=x+2$ が漸近線。以上のことから，求める漸近線の方程式は，

$$x=2, \quad y=x+2$$

【演習 7 − 2】

次の関数のグラフの漸近線の方程式を求めなさい。

(1) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$　　(2) $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2}$

## 7.3 関数のグラフの概形

関数 $y=f(x)$ のグラフをかくときには，次のようなことに注意します。

(i) $f(x)$ の定義域　　(ii) 座標軸に関する対称性や周期性
(iii) 座標軸との共有点など簡単に求められる点　　(iv) 関数の増減，極値
(v) 曲線の凹凸，変曲点　　(vi) 漸近線

【例題 7 − 3】

次の関数の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形をかきなさい。

(1) $y=x-2\sqrt{x}$　　(2) $y=\sin^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

＜解説＞

関数のグラフをかくときには増減表を利用します。このとき，関数の増減を表す「↗」や「↘」と，曲線の凹凸を表す「∩」や「∪」を組み合わせ，次のようにして記号で表します。

(i) 下に凸で増加：↗　(ii) 下に凸で減少：↘　(iii) 上に凸で増加：↗　(iv) 上に凸で減少：↘

(1) 根号の中は 0 以上なので，関数の定義域は $x \geqq 0$

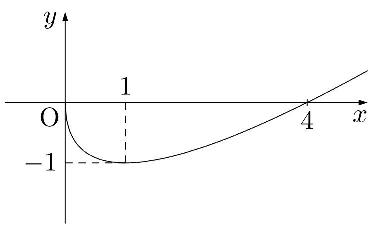
$$y' = 1 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$y'=0$ とすると，

$$x=1$$

また，$x>0$ において $y''>0$ となるので，$y$ の増減とグラフの凹凸は次の表のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ |




このことから，グラフは右図のようになり，

$x=1$ のとき極小値 $-1$，変曲点はない

(2) 関数の定義域は $0 \leqq x \leqq \pi$

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$
$$y'' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$0<x<\pi$ のとき $0<2x<2\pi$ であるので，$y'=0$ とすると，

$$2x = \pi$$
$$x = \frac{\pi}{2}$$

また，$y'' = 0$ とすると，

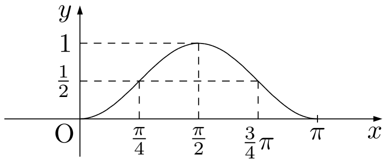
$$
\begin{aligned}
2x &= \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \\
x &= \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

よって，$y$ の増減とグラフの凹凸は次の表のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $y''$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

このことから，グラフは右図のようになり，

- $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき極大値 $1$
- 変曲点は $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{1}{2}\right)$




【演習 7 − 3】

次の関数の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点，漸近線を調べ，そのグラフの概形をかきなさい。

(1) $y = xe^{-x}$　(2) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$　(3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

## 7.4 第 2 次導関数による極値の判定

関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，次の関係が成り立ちます。

(i) $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ のとき

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(a)$ | $\nearrow$ |

$f''(x)$ が連続なので，$x=a$ の十分近くで $f''(x)>0$ となると考えることができます。$f''(x)$ は $f'(x)$ の増減を表すので，$f''(x)>0$ であれば，その区間において $f'(x)$ は常に増加することになります。そのため，$x<a$ では $f'(x)<0$ となり，$x$ が増加するにつれ $f'(x)$ の値も増加し $f'(a)=0$，さらに $x$ が増加すれば $f'(x)$ の値も増加していき，$x>a$ で $f'(x)>0$ となります。よって，$f(x)$ の増減表は右のようになるので，$f(a)$ は極小値になります。

(ii) $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ のとき

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(a)$ | $\searrow$ |

$f''(x)$ が連続なので，$x=a$ の十分近くで $f''(x)<0$ となると考えることができます。$f''(x)$ は $f'(x)$ の増減を表すので，$f''(x)<0$ であれば，その区間において $f'(x)$ は常に減少することになります。そのため，$x<a$ では $f'(x)>0$ となり，$x$ が増加するにつれ $f'(x)$ の値は減少し $f'(a)=0$，さらに $x$ が増加すれば $f'(x)$ の値は減少していき，$x>a$ で $f'(x)<0$ となります。よって，$f(x)$ の増減表は右のようになるので，$f(a)$ は極大値になります。

【例題 7 − 4】

次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めなさい。

(1) $f(x)=x^3+3x^2-9x$　　(2) $f(x)=e^{-x}\cos x \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$

<解説>

(1) 第 2 次導関数を求めると，

$$f'(x)=3x^2+6x-9, \qquad f''(x)=6x+6$$

$f'(x)=0$ となる $x$ の値は，

$$\begin{aligned} 3x^2+6x-9&=0 \\ (x+3)(x-1)&=0 \\ x&=-3,\ 1 \end{aligned}$$

このとき，

$$f''(-3)=6\cdot(-3)+6=-12<0, \qquad f''(1)=6\cdot 1+6=12>0$$

であるので，

$x=-3$ のとき極大値 $f(-3)=27$，$x=1$ のとき極小値 $f(1)=-5$

(2) 第 2 次導関数を求めると，

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}(-\sin x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$f''(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x)=2e^{-x}\sin x$$

$-\pi < x < \pi$ において $f'(x) = 0$ となる $x$ の値は，$-\dfrac{3}{4}\pi < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5}{4}\pi$ で $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ より，

$$x + \frac{\pi}{4} = 0,\ \pi$$
$$x = -\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

このとき，

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0, \qquad f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2e^{-\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

であるので，

$$x = -\frac{\pi}{4}\text{のとき極大値 } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}},\ x = \frac{3}{4}\pi\text{のとき極小値 } f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

【演習 7 − 4】

次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めなさい。

(1) $f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2) $f(x) = (\log x)^2$

(3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$　　(4) $f(x) = x - 2 + \sqrt{4 - x^2}$

# 8　方程式・不等式への応用

## 8.1　方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解は，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の $x$ 座標に等しくなります。そのため，方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解の個数と，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の個数は一致するので，方程式の実数解の個数をグラフを利用して考えることができます。このとき，方程式 $f(x)=g(x)$ を $h(x)=k$（$k$ は定数）のように定数を分離した形に変形できれば，方程式の実数解の個数を $y=h(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数として考えることができます。$y=k$ のグラフは $x$ 軸に平行な直線になるので，このグラフを上下に平行移動させることで，$y=h(x)$ のグラフとの共有点の個数を調べます。

【例題 8 − 1】

$a$ を定数とするとき，$x$ についての方程式 $e^x=ax$ の異なる実数解の個数は，定数 $a$ の値によってどのように変化するかを調べなさい。（ただし，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=\infty$）

＜解説＞

$x=0$ はこの方程式の解ではないので，方程式 $e^x=ax$ と，この方程式の両辺を $x$ で割った方程式 $\dfrac{e^x}{x}=a$ は同値になります。そこで，

$$f(x)=\frac{e^x}{x}$$

とおくと，

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とおくと，

$$x=1$$

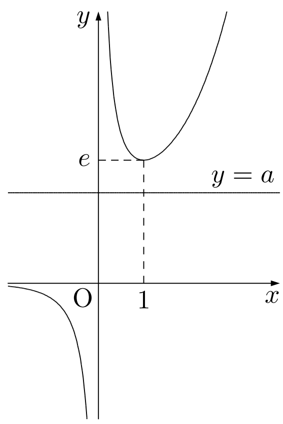
となるので，$f(x)$ の増減表は上のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | ／ | ↘ | $e$ | ↗ |

また，

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになります。




求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数と一致するので，

$$\begin{cases} 0<a<e \text{ のとき} & 0\text{ 個} \\ a<0,\ a=e \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ a>e \text{ のとき} & 2\text{ 個} \end{cases}$$

【演習8－1】

方程式 $\log x = -x^2 + 3x + a$ の異なる実数解の個数は，定数 $a$ の値によってどのように変化するかを調べなさい。

## 8.2 不等式の証明

不等式 $f(x) > g(x)$ を証明するには，

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

のようにして差を作り，$F(x) > 0$ となることを示します。このとき，

( i ) $F(x)$ が最小値をもつとき：最小値 $m$ を求めて，$m > 0$ を示す。

$$F(x) \geqq m > 0$$

(ii) $F(x)$ が単調増加 $(F'(x) > 0)$ であるとき：$x > a$ のとき $F(a) \geqq 0$ となることを示す。

$$F(x) > F(a) \geqq 0$$

【例題 8 − 2】

$x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $e^x > 1 + x$　　(2) $2\sqrt{x} > \log x$

＜解説＞

(1) $f(x) = e^x - (1 + x)$ とおくと，

| $x$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ |

$$f'(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ のとき $e^x > 1$ であるので，

$$f'(x) > 0$$

また，

$$f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$$

となるので，$f(x)$ の増減表は上のようになります。よって，$x > 0$ のとき，

$$f(x) > f(0) = 0$$

であるので，

$$e^x > 1 + x$$

(2) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおくと，

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$$

$f'(x) = 0$ とすると，

$$x = 1$$

となるので，$f(x)$ の増減表は上のようになります。このことから，$f(x)$ は $x=1$ のとき最小値 2 をとるので，

$$f(x) \geqq 2 > 0$$

よって，

$$2\sqrt{x} > \log x$$

【演習 8 − 2】

$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $x\log x \geqq x-1$

(2) $x-\dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

## 8.3 不等式の証明と極限

不等式 $f(x) > g(x)$ を証明するには，

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

のようにして差を作り，$F(x) > 0$ となることを示します。このとき，

(ｉ) $F(x)$ が最小値をもつとき：最小値 $m$ を求めて，$m > 0$ を示す。

$$F(x) \geqq m > 0$$

(ii) $F(x)$ が単調増加 $(F'(x) > 0)$ であるとき：$x > a$ のとき $F(a) \geqq 0$ となることを示す。

$$F(x) > F(a) \geqq 0$$

【例題 8 − 3】

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$ を求めなさい。

<解説>

(1) $f(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，

| $x$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ |

$$f'(x) = e^x - (1 + x), \qquad f''(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ のとき $e^x > 1$ であるので，

$$f''(x) > 0$$

となり，$f'(x)$ は単調に増加します。また，

$$f'(0) = e^0 - (1 + 0) = 0, \qquad f(0) = e^0 - (1 + 0 + 0) = 0$$

となるので，$x > 0$ のとき，

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

となり，$f(x)$ の増減表は上のようになります。よって，$x > 0$ のとき，

$$f(x) > f(0) = 0$$

となるので，

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(2) (1) より，

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{2}$$

となるので，$x > 0$ のとき，

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

$x \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{x}{2} \longrightarrow \infty$ となるので，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

一般に，任意の自然数 $n$ に対して，次のことが成り立ちます。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

# 9　速度と加速度

## 9.1　直線上の運動

数直線上を運動する点 P の $x$ 座標は，時刻 $t$ の関数として，


$$x = f(t)$$

と表されるとき，$t$ の増分 $\varDelta t$ に対する平均変化率

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \frac{f(t+\varDelta t) - f(t)}{\varDelta t}$$

は，時刻 $t$ から $t + \varDelta t$ までの点 P の**平均速度**を表します。この平均速度の $\varDelta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 $t$ における点 P の**速度**といいます。点 P の速度を $v$ とすると次のように表され，速度 $v$ の絶対値 $|v|$ を**速さ（速度の大きさ）**といいます。

$$v = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{f(t+\varDelta t) - f(t)}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$v > 0$ のとき，$f'(t) > 0$ より $f(t)$ は増加するので，点 P は正の向きに進み，$v < 0$ のとき，$f'(t) < 0$ より $f(t)$ は減少するので，点 P は負の向きに進みます。このように，速度 $v$ の符号が点 P の運動の向きを表します。

さらに，速度 $v$ の時刻 $t$ に対する変化率を点 P の**加速度**といい，加速度を $\alpha$ とすると，

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

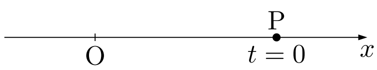
と表され，加速度 $\alpha$ の絶対値 $|\alpha|$ を**加速度の大きさ**といいます。

【例題 9 − 1】

数直線上を運動する点 P の時刻 $t$ における座標 $x$ が $x = 2t^3 - 6t + 4$ $(t \geqq 0)$ と表されるとき，$t = 0, 1, 2$ における点 P の速度，速さ，加速度，加速度の大きさを求めなさい。

＜解説＞

時刻 $t$ における点 P の速度を $v$，加速度を $\alpha$ とすると，

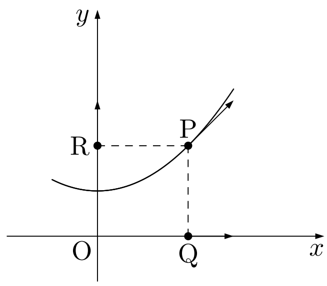



$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6, \qquad \alpha = \frac{dv}{dt} = 12t$$

よって，

| | 速度 $v$ | 速さ$\|v\|$ | 加速度$\alpha$ | 加速度の大きさ$\|\alpha\|$ |
|---|---|---|---|---|
| $t=0$ | $-6$ | 6 | 0 | 0 |
| $t=1$ | 0 | 0 | 12 | 12 |
| $t=2$ | 18 | 18 | 24 | 24 |

## 9.2 平面上の運動




座標平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の座標が，時刻 $t$ の関数として，

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

で与えられているとします。このとき，点 P から $x$ 軸，$y$ 軸に下した垂線をそれぞれ PQ，PR とすると，点 P が動くにつれ，点 Q，R はそれぞれ $x$ 軸，$y$ 軸上で直線運動をします。そのため，時刻 $t$ における点 Q，R の速度は，

$$\text{点 Q の速度}:\frac{dx}{dt} = f'(t), \qquad \text{点 R の速度}:\frac{dy}{dt} = g'(t)$$

また，点 Q，R の加速度は，

$$\text{点 Q の加速度}:\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), \qquad \text{点 R の加速度}:\frac{d^2y}{dt^2} = g''(t)$$

となります。点 P の**速度**と**加速度**は，$x$ 軸方向（点 Q）の速度と加速度を $x$ 成分に，$y$ 軸方向（点 R）の速度と加速度を $y$ 成分にし，速度をベクトル $\vec{v}$，加速度をベクトル $\vec{\alpha}$ を用いて，次のように定義されます。

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t),\ g'(t)), \qquad \vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (f''(t),\ g''(t))$$

また，点 P の**速さ**と**加速度の大きさ**はそれぞれ，速度 $\vec{v}$ の大きさ $\left|\vec{v}\right|$，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right|$ になり，

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \qquad \left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

【例題 9 − 2】

座標平面上を運動する点 P の，時刻 $t$ における座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられています。

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 4t, \qquad y = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 16t$$

このとき，$t = 2$ における P の速度，加速度とそれらの大きさを求めなさい。また，加速度の大きさが最小となる時刻 $t$ を求めなさい。

＜解説＞

$x$, $y$ をそれぞれ $t$ で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = t - 4 \qquad \frac{dy}{dt} = -t^2 + 8t - 16$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2t + 8$$

となるので，時刻 $t$ における点 P の速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{\alpha}$ は，

$$\vec{v} = (t - 4,\ -t^2 + 8t - 16), \qquad \vec{\alpha} = (1,\ -2t + 8)$$

$t = 2$ のとき，

- 速度：$\vec{v} = (2-4,\ -2^2+8\cdot 2-16) = (-2,\ -4)$
- 加速度：$\vec{\alpha} = (1,\ -2\cdot 2+8) = (1,\ 4)$
- 速度の大きさ（速さ）：$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$
- 加速度の大きさ：$\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$

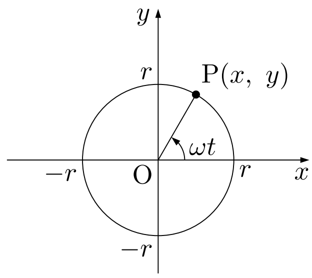
また，時刻 $t$ における加速度の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right|$ は，

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{1^2+(-2t+8)^2} = \sqrt{4(t-4)^2+1}$$

となるので，$\left|\vec{\alpha}\right|$ が最小となる時刻 $t$ は，

$$t = 4$$

## 9.3 等速円運動




右の図のように，点 P が原点を中心とする半径 $r$ の円周上を運動していて，点 P が点 $(r,\ 0)$ を出発し $t$ 秒後の位置の座標を $(x,\ y)$，動径 OP と $x$ 軸のなす角を $\omega t$ $(\omega > 0)$ であるとします。このとき，$t$ 秒後の点 P の座標は，

$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t$$

と表され，

$$\frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t, \qquad \frac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t$$

となることから，点 P の速度 $\vec{v}$ は，

$$\vec{v} = (-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t) \ \cdots\cdots\ ①$$

となり，また，速さ $\left|\vec{v}\right|$ は，

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2} = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\omega$$

となり，速さが一定となることがわかります。このように，円周上を運動する速さが一定となる円運動を**等速円運動**といいます。

点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ は，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2\cos\omega t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2\sin\omega t$$

となることから，

$$\vec{\alpha} = (-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t) \ \cdots\cdots\ ②$$

となり，加速度の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right|$ は，

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2 + (-r\omega^2\sin\omega t)^2} = \sqrt{r^2\omega^4(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\omega^2$$

ここで①より，

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)\cdot(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)\\ &= -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0\end{aligned}$$

となることから，$\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり，点 P の速度と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は垂直になっていることがわかります。また②より，

$$\alpha = -\omega^2(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t) = -\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

となり，点 P の加速度は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と平行（点 P から中心に向かう方向）になっていることがわかります。

【例題 9 − 3】

座標平面上を運動する点 P の，時刻 $t$ における座標 $(x,\ y)$ が，

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4}t, \qquad y = 2\sin\frac{\pi}{4}t$$

で表されるとき，点 P の速度 $\vec{v}$，加速度 $\vec{\alpha}$ とそれらの大きさを求めなさい。

＜解説＞

$x$, $y$ をそれぞれ $t$ で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{\pi}{4}\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t = -\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\left(-\sin\frac{\pi}{4}t\right) = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}t$$

よって，

$$\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t,\ \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t\right), \qquad \vec{\alpha} = \left(-\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t,\ -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}t\right)$$

また，速度の大きさ $\left|\vec{v}\right|$ と加速度の大きさ $\left|\vec{\alpha}\right|$ は，

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}\left(\sin^2\frac{\pi}{4}t + \cos^2\frac{\pi}{4}t\right)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(-\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^4}{64}\left(\sin^2\frac{\pi}{4}t + \cos^2\frac{\pi}{4}t\right)} = \frac{\pi^2}{8}$$

【演習 9 − 3】

座標平面上を運動する点 P の，時刻 $t$ における座標 $(x,\ y)$ が，

$$x = \pi t - \sin\pi t, \qquad y = 1 - \cos\pi t$$

で表されるとき，点 P の速さを求めなさい。また，点 P が最も速く動くときの速さを求めなさい。

## 9.4 一般の量の時間的変化率

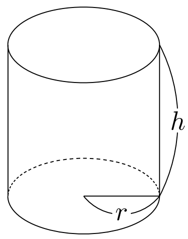
一般の量の時間的変化率を求めるとき，一般の量を時刻 $t$ の関数 $f(t)$ で表し，それを $t$ で微分することで，その量の時間的変化率 $f'(t)$ を求めることができます。

【例題 9 − 4】

直円柱形のゴム風船があります。これに空気を入れると，底面の半径は毎秒 1 cm の割合で増え，高さは毎秒 5 cm の割合で増えます。底面の半径が 1 m，高さが 2 m になった瞬間における体積の変化率を求めなさい。

＜解説＞

ゴム風船の $t$ 秒後の底面の半径を $r$ cm，高さを $h$ cm，体積を $V$ cm$^3$ とすると，




$$V = \pi r^2 h \ \cdots\cdots \ ①$$

このとき，$r$，$h$，$V$ は時間 $t$ により変化し，$t$ の関数になります。底面の半径は毎秒 1 cm の割合で増えるので，

$$\frac{dr}{dt} = 1 \ \cdots\cdots \ ②$$

また，高さは毎秒 5 cm の割合で増えるので，

$$\frac{dh}{dt} = 5 \ \cdots\cdots \ ③$$

①の両辺を $t$ で微分すると，

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot \frac{d}{dt}r^2 \cdot h + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot h + \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

となり，この式に②，③，$r = 100$，$h = 200$ を代入して，底面の半径が 1 m，高さが 2 m になった瞬間における体積の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は，

$$\frac{dV}{dt} = \pi(2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 200 + 100^2 \cdot 5) = 90000\pi \ (\mathrm{cm}^3/\text{秒})$$

【演習 9 − 4】

半径 5 cm，高さ 20 cm の直円錐状の容器を頂点を下にし，軸を垂直にして，これに毎秒 2 cm$^3$ の割合で静かに水を注ぐとき，18 秒後の水面の上昇速度と，水面の面積の増加する速度を求めなさい。

# 10　近似式

## 10.1　近似式

微分係数の定義より，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数は，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

となり，$h$ が 0 に十分近い値であれば，$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と $f'(a)$ の値がほとんど等しいことを表しています。そのため，左辺と右辺の値がほとんど等しいことを表す記号「≒」を用いて，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

のように表すことができ，この式を**近似式**といいます。また，この式は次のように変形して利用されます。

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h \ \cdots\cdots \ ①$$

さらに，$a=0,\ h=x$ とすれば，$x$ が 0 に十分近いとき次の関係が成り立ち，①, ②の近似式を**1 次の近似式**といいます。

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x \ \cdots\cdots \ ②$$

【例題 10 − 1】

$x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作りなさい。

(1) $\dfrac{1}{1+x}$　　(2) $\sin x$　　(3) $\log(1+x)$

＜解説＞

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと，

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

このとき，

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=-1$$

であるので，

$$\frac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x$$

(2) $f(x)=\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=\cos x$$

このとき，

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=1$$

であるので，

$$\sin x\fallingdotseq x$$

(3) $f(x)=\log(1+x)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

このとき，

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1$$

であるので，

$$\log(1+x)\fallingdotseq x$$

【演習 10 − 1】

$x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作りなさい。

(1) $\sqrt{1-x}$　　(2) $e^{-x}$　　(3) $\cos(\theta+x)$

## 10.2　近似値

ある数に 1 次の近似式

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h \qquad (h \fallingdotseq 0)$$

を用いることで，その数の近似値を求めることができます。ただし，三角関数の値を計算するときには，角に弧度法を用います。

【例題 10 − 2】

次の数の近似値を求めなさい。

(1) $\sqrt[3]{997}$　　(2) $\log 1.01$

<解説>

(1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

となるので，$h \fallingdotseq 0$ のとき，

$$(a+h)^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}h$$

このことから，

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{997} &= \sqrt[3]{1000-3} = \sqrt[3]{1000(1-0.003)} = 10\{1+(-0.003)\}^{\frac{1}{3}} \\ &\fallingdotseq 10\left\{1^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\cdot 1^{-\frac{2}{3}}\cdot(-0.003)\right\} = 10 \times 0.999 = 9.99\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \log x$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

となるので，$h \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\log(a+h) \fallingdotseq \log a + \frac{1}{a}\cdot h$$

このことから，

$$\log(1.01) = \log(1+0.01) \fallingdotseq \log 1 + \frac{1}{1}\cdot 0.01 = 0.01$$

【演習 10 − 2】

次の数の近似値を，小数第 3 位まで求めなさい。

(1) $\sqrt{50}$　　(2) $\sin 31^\circ$　　(3) $\tan 29^\circ$

## 10.3 微小変化に対応する変化

微分係数の定義より，関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数は，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

となり，$h$ が 0 に十分近い値であれば，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

のように表すことができます。このとき，$x=a$ における $x$ の増分 $\varDelta x$ に対する $y$ の増分 $\varDelta y$ は，

$$\varDelta x=(a+h)-a=h,\qquad \varDelta y=f(a+h)-f(a)$$

と表されるので，$\varDelta x\fallingdotseq 0$ のとき，

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\fallingdotseq f'(a)$$

つまり，

$$\varDelta y\fallingdotseq f'(a)\varDelta x$$

という関係が成り立ちます。

【例題 10 − 3】

1 辺が 5 cm の立方体の各辺の長さを，すべて 0.02 cm ずつ小さくすると，立方体の体積は約何 $\mathrm{cm}^3$ 減少しますか。

＜解説＞

1 辺の長さが $x$ cm の立方体の体積を $V$ $\mathrm{cm}^3$ とすると，

$$V=x^3,\qquad V'=3x^2$$

このことから，$\varDelta x$ が十分に小さいとき，

$$\varDelta V\fallingdotseq V'\varDelta x=3x^2\cdot\varDelta x$$

となるので，$x=5$，$\varDelta x=-0.02$ とすると，体積の増加 $\varDelta V$ は，

$$\varDelta V\fallingdotseq 3\cdot 5^2\cdot(-0.02)=-1.5$$

となり，体積は約 1.5 $\mathrm{cm}^3$ 減少します。

【演習 10 − 3】

半径 10 cm の球の半径が 0.03 cm 増加したとき，この球の表面積および体積はそれぞれ，どれだけ増加しますか。ただし，$\pi=3.14$ とし，答えは小数第 2 位まで求めなさい。