【数学 III】式と曲線

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

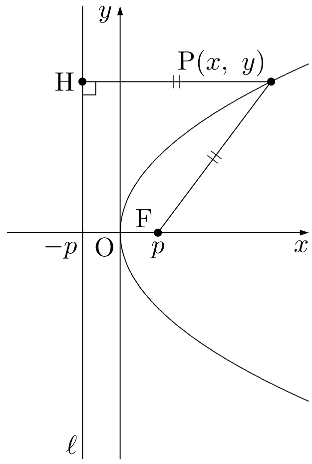
1　2次曲線

円 $x^2+y^2=r^2$ や放物線 $y=ax^2$ などのように、$x,\ y$ の 2 次方程式で表される曲線を、**2 次曲線**といいます。

1.1　放物線

平面上で、定点 F と、この点を通らない定直線 ℓ からの距離の等しい点の軌跡を**放物線**といい、点 F を放物線の**焦点**、直線 ℓ を放物線の**準線**といいます。

ここで、右の図のような定点 F（焦点）を $(p,\ 0)$、定直線 ℓ（準線）を $x=-p$ とする放物線の方程式を求めてみます。



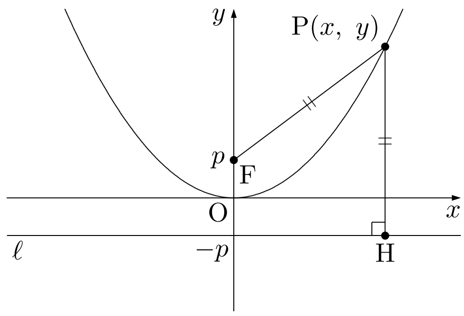
放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし、P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると、放物線上の点は、定点 F と定直線 ℓ からの距離が等しいので、PF = PH より、

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}^2&=\mathrm{PH}^2\\(x-p)^2+y^2&=\{x-(-p)\}^2\\x^2-2px+p^2+y^2&=x^2+2px+p^2\\y^2&=4px\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

この①の方程式を放物線の**標準形**といいます。ただし、直線 ℓ は点 F を通らないので、$p \fallingdotseq 0$ となります。

また、放物線の焦点（F）を通り、準線（ℓ）に垂直な直線を**軸（対称軸）**といい、放物線と軸との交点を**頂点**といいます。図の放物線では、軸は x 軸で、頂点は原点 O になります。

右の図のように、軸が y 軸で、頂点が原点 O になるような放物線では、定点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ が焦点、定直線 $\ell : y=-p$ が準線となり、その方程式は PF = PH より、



$$\begin{aligned}\mathrm{PF}^2&=\mathrm{PH}^2\\x^2+(y-p)^2&=\{y-(-p)\}^2\\x^2+y^2-2py+p^2&=y^2+2py+p^2\\x^2&=4py\end{aligned}$$

と表されます。このことから、放物線 $y=ax^2$ の焦点と準線は、

$$x^2=4\cdot\frac{1}{4}a\cdot y$$

と変形することにより、

$$\text{焦点}:\left(0,\ \frac{1}{4}a\right),\qquad \text{準線}:y=-\frac{1}{4}a$$

【例題 1 − 1】

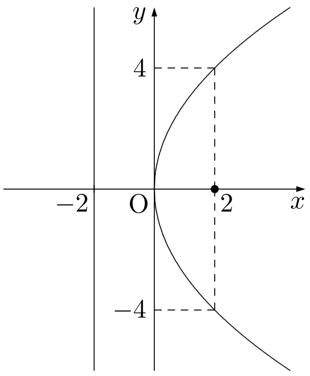
次の放物線の焦点と準線を求め、また、その概形をかきなさい。

(1) $y^2=8x$　　(2) $y^2=-4x$　　(3) $x^2=2y$

＜解説＞

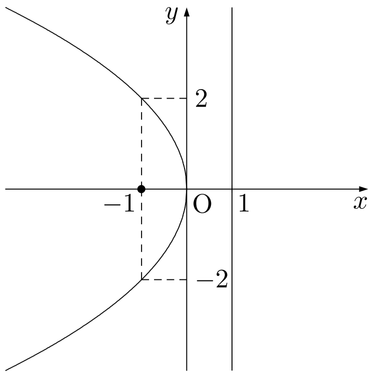
(1) $y^2 = 4 \cdot 2x$ より、

焦点 $(2,\ 0)$, 準線 $x = -2$



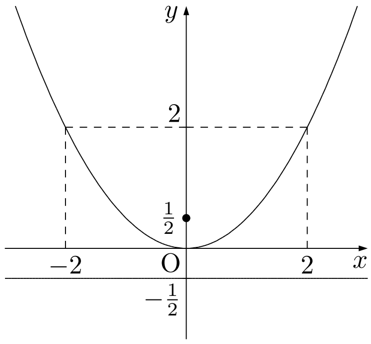
(2) $y^2 = 4 \cdot (-1)x$ より、

焦点 $(-1,\ 0)$, 準線 $x = 1$



(3) $x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{2} y$ より、

焦点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, 準線 $y = -\dfrac{1}{2}$



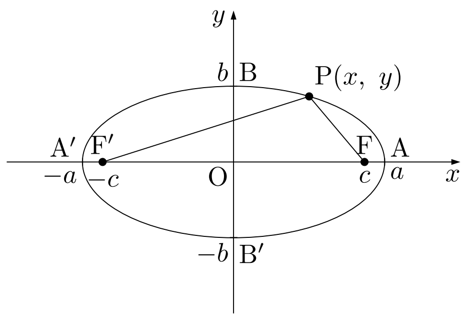
【演習１－１】

次の焦点と準線をもつ放物線の方程式を求め、その概形をかきなさい。

(1) 点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$、直線 $y = -\dfrac{1}{4}$

(2) 点 $(2,\ 0)$、直線 $x = -2$

1.2　楕円



平面上で、2 定点 F, F$'$ からの距離の和が一定である点の軌跡を**楕円**といいます。右図のような楕円では、定点 F, F$'$ を楕円の**焦点**、FF$'$ の中点（点 O）を楕円の**中心**、直線 FF$'$ と FF$'$ の垂直二等分線が楕円によって切り取られる線分 AA$'$, BB$'$ のうち、長い方（AA$'$）を**長軸**、短い方（BB$'$）を**短軸**、4 点 A, A$'$, B, B$'$ を楕円の**頂点**といいます。

ここで、図のように $c > 0$ として、2 定点 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$、2 定点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求めてみます。

楕円上の点を P$(x,\ y)$ とすると、PF + PF$'$ $= 2a$ であるので、

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$
$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると、

$$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

そして、両辺を $a^2(a^2-c^2)$ で割ると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

ここで、

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'>\mathrm{FF}'$$
$$2a>2c$$
$$a>c\quad(>0)$$

であるので、$a^2-c^2=b^2$ $(a>b>0)$ とおくと、

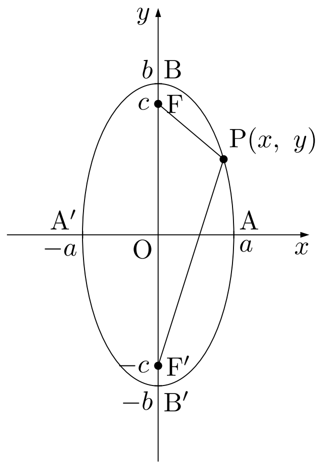
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

となり、この方程式を楕円の**標準形**といいます。このとき、$a^2-c^2=b^2$ より、$c=\sqrt{a^2-b^2}$ となるので、焦点の座標は、

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\qquad \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

また、長軸の長さは $2a$、短軸の長さは $2b$ となり、さらに、長軸（x 軸)、短軸（y 軸)、中心（原点）に関して対称な曲線になります。

$b > a > 0$ で、2 定点 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$、2 定点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は、楕円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2b$ より、



$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$x^2+(y-c)^2=4b^2-4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2=4b^2-4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$
$$4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4b^2+4cy$$
$$b\sqrt{x^2+(y+c)^2}=b^2+cy$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると、

$$b^2\{x^2+(y+c)^2\}=b^4+2b^2cy+c^2y^2$$
$$b^2(x^2+y^2+2cy+c^2)=b^4+2b^2cy+c^2y^2$$
$$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)$$

そして、両辺を $b^2(b^2-c^2)$ で割ると、

$$\frac{x^2}{b^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ここで、$b^2-c^2=a^2\ (b>a>0)$ とおくと、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表され、焦点の座標は、

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\qquad \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

となり、長軸（y 軸上）の長さは $2b$、短軸（x 軸上）の長さは $2a$ になります。

【例題 1 − 2】

次の楕円の長軸・短軸の長さ、焦点の座標を求め、その概形をかきなさい。

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

＜解説＞

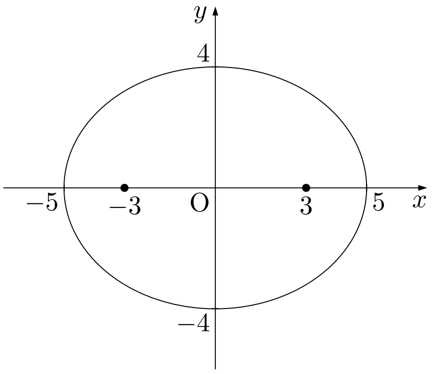
(1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ より、

長軸の長さ：$2\cdot 5=10$

短軸の長さ：$2\cdot 4=8$

また、$\sqrt{25-16}=3$ より、

焦点：$(3,\ 0),\quad (-3,\ 0)$



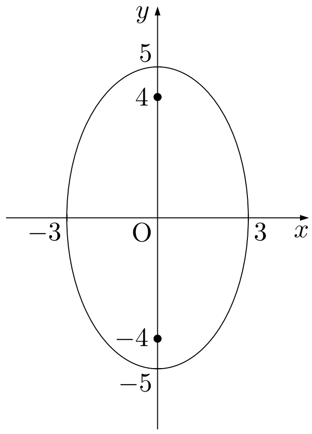
(2) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ より、

長軸の長さ：$2\cdot 5=10$

短軸の長さ：$2\cdot 3=6$

また、$\sqrt{25-9}=4$ より、

焦点：$(0,\ 4),\quad (0,\ -4)$



【演習 1 − 2】

次の楕円の長軸・短軸の長さ、焦点の座標を求め、その概形をかきなさい。

(1) $4x^2+9y^2=36$ (2) $16x^2+9y^2=144$

1.3 円と楕円

円 $x^2+y^2=a^2$ を、x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$倍 に縮小または拡大してみます。

円上の点を Q$(s,\ t)$、移る点を P$(x,\ y)$ とすると、点 Q は円上の点であるので、

$$s^2+t^2=a^2 \ \cdots\cdots \ ①$$

また、x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$倍 するので、

$$x=s, \qquad y=\frac{b}{a}t$$

つまり、

$$s=x, \qquad t=\frac{a}{b}y \ \cdots\cdots \ ②$$

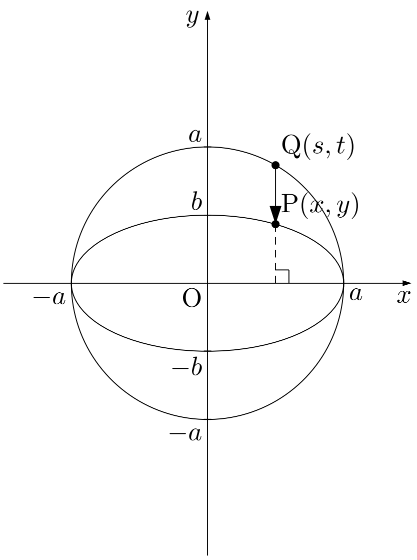
②を①に代入すると、

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2$$

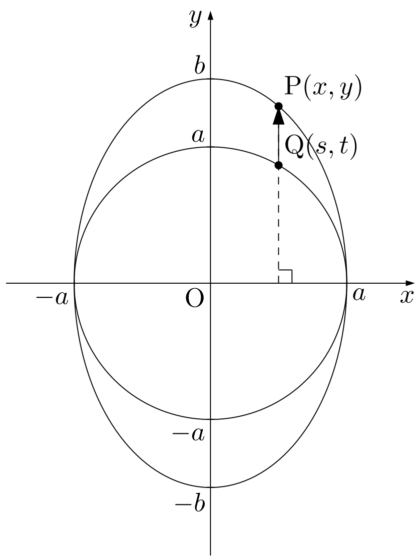
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{（楕円の方程式の標準形）}$$

となり、楕円になることがわかります。

(i) $a>b>0$ のとき（縮小）



(ii) $b>a>0$ のとき（拡大）



同じようにして、円 $x^2+y^2=b^2$ を、y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小または拡大することでも、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が得られます。

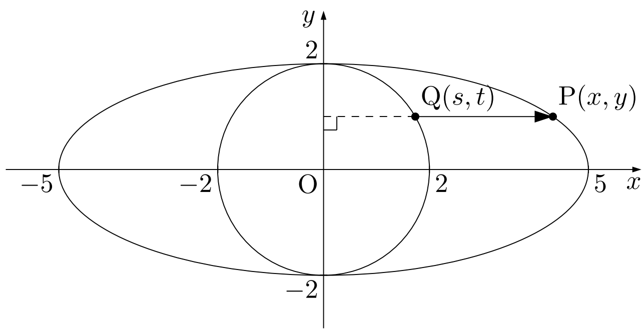
【例題 1 − 3】

円 $x^2+y^2=4$ を、y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{5}{2}$ 倍すると、どのような曲線になりますか。

＜解説＞

円上の点を Q$(s,\ t)$、移る点を P$(x,\ y)$ とすると、点 Q は円上の点であるので、

$$s^2+t^2=4 \ \cdots\cdots \text{①}$$



また、y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{5}{2}$倍 するので、

$$x=\frac{5}{2}s, \qquad y=t$$

つまり、

$$s=\frac{2}{5}x, \qquad t=y \ \cdots\cdots \text{②}$$

②を①に代入すると、

$$\left(\frac{2}{5}x\right)^2+y^2=4$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

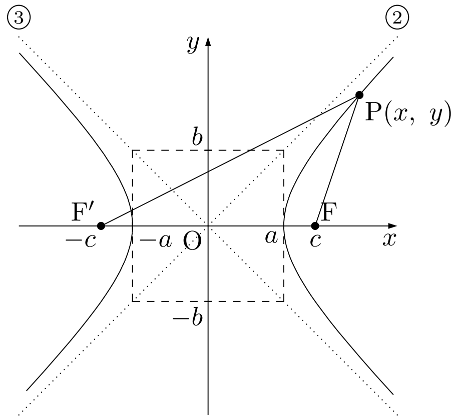
よって、楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【演習 1 − 3】

(1) 円 $x^2+y^2=16$ を、x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍すると、どのような曲線になりますか。

(2) 円 $x^2+y^2=9$ を、y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{5}{3}$ 倍すると、どのような曲線になりますか。

1.4 双曲線



平面上で、2 定点 F, F′ からの距離の差が一定（0 でない）である点の軌跡を**双曲線**といいます。右の図のような双曲線では、定点 F, F′ を双曲線の**焦点**、FF′ の中点を双曲線の**中心**、双曲線と直線 FF′ の交点を**頂点**といいます。

ここで、図のように $c > 0$ として、2 定点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$、2 定点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求めてみます。

双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'| = 2a$ であるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a\\ \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a\end{aligned}$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned}(x-c)^2+y^2 &= (x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2\\ x^2-2cx+c^2+y^2 &= x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2\\ 4a^2+4cx &= \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\ a^2+cx &= \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\end{aligned}$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned}a^4+2a^2cx+c^2x^2 &= a^2\{(x+c)^2+y^2\}\\ a^4+2a^2cx+c^2x^2 &= a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)\\ (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2)\end{aligned}$$

そして、両辺を $a^2(c^2-a^2)$ で割ると、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

ここで、

$$\begin{aligned}|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'| &< \mathrm{FF}'\\ 2a &< 2c\\ a &< c\end{aligned}$$

であるので、$c^2-a^2=b^2$ とおくと、

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \cdots\cdots \ ①$$

となり、この方程式を双曲線の**標準形**といいます。このとき、$c^2-a^2=b^2$ より、$c=\sqrt{a^2+b^2}$ となるので、焦点の座標は、

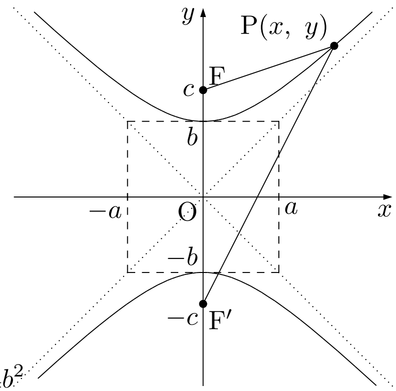
$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0), \qquad \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

①の双曲線は、頂点 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$ で、x 軸、y 軸、原点に関して対称な曲線になります。また、原点から遠ざかると曲線は 2 直線

$$y = \frac{b}{a}x \ \cdots\cdots\ ②, \qquad y = -\frac{b}{a}x \ \cdots\cdots\ ③$$

にだんだん近づいていき（ただし、決して交わらない）、この直線を双曲線の**漸近線**いいます。

図のように $c > 0$ として、2 定点 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$、2 定点からの距離の差が $2b$ である双曲線の方程式は、双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、$|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'| = 2b$ であるので、



$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} - \sqrt{x^2+(y+c)^2} = \pm 2b$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = \sqrt{x^2+(y+c)^2} \pm 2b$$

両辺を 2 乗して整理すると、

$$x^2+(y-c)^2 = x^2+(y+c)^2 \pm 4b\sqrt{x^2+(y+c)^2} + 4b^2$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2 = x^2+y^2+2cy+c^2 \pm 4b\sqrt{x^2+(y+c)^2} + 4b^2$$
$$4b^2+4cy = \pm 4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$
$$b^2+cy = \pm b\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると、

$$b^4+2b^2cy+c^2y^2 = b^2\{x^2+(y+c)^2\}$$
$$b^4+2b^2cy+c^2y^2 = b^2(x^2+y^2+2cy+c^2)$$
$$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2 = b^2(c^2-b^2)$$

そして、両辺を $b^2(c^2-b^2)$ で割ると、

$$-\frac{x^2}{c^2-b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{c^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ここで、

$$|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'| < \mathrm{FF}'$$
$$2b < 2c$$
$$b < c$$

であるので、$c^2 - b^2 = a^2$ とおくと、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

このとき、$c^2 - b^2 = a^2$ より、$c = \sqrt{a^2+b^2}$ となるので、焦点の座標は、

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2}), \qquad \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

となり、頂点 $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$ で、漸近線は 2 直線 $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = \dfrac{b}{a}x$、x 軸、y 軸、原点に関して対称な曲線になります。

【例題 1 − 4】

次の双曲線の漸近線の方程式と焦点の座標を求め、その概形をかきなさい。

(1) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ (2) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = -1$

＜解説＞

双曲線のグラフ（概形）は次の手順でかくことができます。

(i) 式の形から、双曲線の頂点（焦点）が x 軸と y 軸のどちらにあるのかを判断します。

$$x \text{ 軸}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y \text{ 軸}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(ii) 双曲線の頂点の座標を求めます。

$$x \text{ 軸}: (a,\ 0),\quad (-a,\ 0) \qquad \text{y 軸}: (0,\ b),\quad (0,\ -b)$$

(iii) 双曲線の漸近線の方程式を求めます。

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

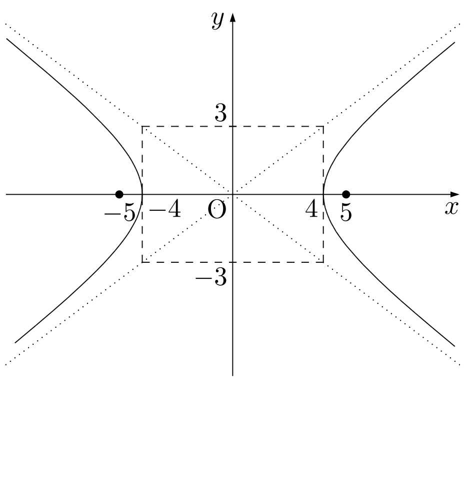
(iv) 原点から遠ざかるにつれ漸近線に近づくように、また、x 軸、y 軸、原点に関して対称になるようにグラフをかきます。

(1) $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ より、漸近線は、

$$y = \frac{3}{4}x, \quad y = -\frac{3}{4}x$$

また、$\sqrt{4^2+3^2} = 5$ より、焦点の座標は、

$$(5,\ 0), \qquad (-5,\ 0)$$

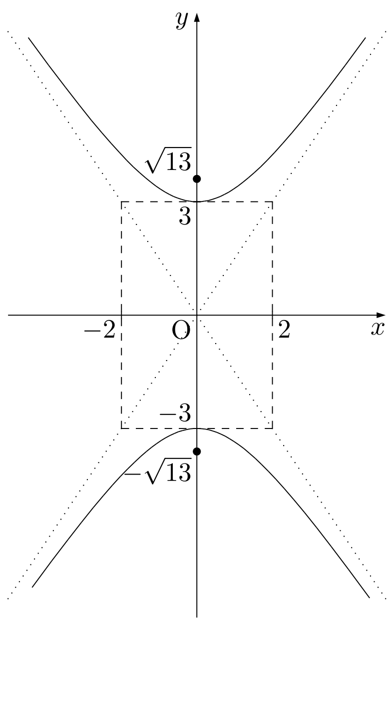


(2) $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = -1$ より、漸近線は、

$$y = \frac{3}{2}x, \quad y = -\frac{3}{2}x$$

また、$\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ より、焦点の座標は、

$$(0,\ \sqrt{13}), \qquad (0,\ -\sqrt{13})$$



【演習 1 − 4】

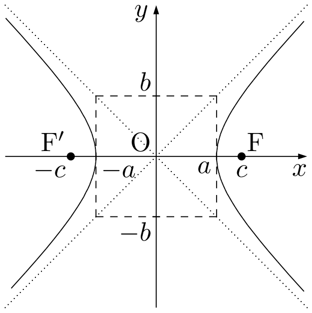
次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求め、その概形をかきなさい。

(1) $x^2 - 4y^2 = 16$　　(2) $5x^2 - y^2 = -5$

1.5 双曲線の方程式の決定

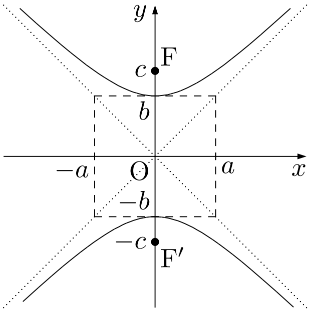
双曲線の方程式は、焦点・頂点が x 軸上にあるか、y 軸上にあるかで異なります。

(ⅰ) 焦点・頂点が x 軸上



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(ⅱ) 焦点・頂点が y 軸上



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

そのため、問題文の条件からどちらの方程式を利用するのかを正しく判断する必要があります。

【例題 1 − 5】

点 $(0,\ -2)$ を通り、2 直線 $y=x,\ y=-x$ を漸近線とする双曲線の方程式と焦点の座標を求めなさい。

＜解説＞

通る点の条件が与えられていると、次のようにして双曲線の方程式を判断することができます。

① 点 $(p,\ 0)$ を通る。

(ⅰ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$(\text{左辺})=\frac{p^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=\frac{p^2}{a^2}>0$$
$$(\text{右辺})=1>0$$

成り立つ

(ⅱ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

$$(\text{左辺})=\frac{p^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=\frac{p^2}{a^2}>0$$
$$(\text{右辺})=-1<0$$

成り立たない

② 点 $(0,\ q)$ を通る。

(ⅰ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

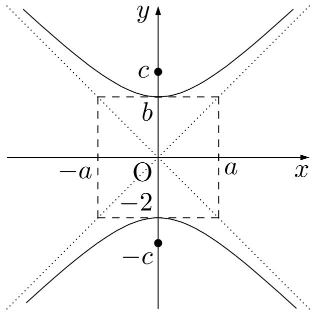
$$(\text{左辺})=\frac{0^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=-\frac{q^2}{b^2}<0$$
$$(\text{右辺})=1>0$$

成り立たない

(ⅱ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

$$(\text{左辺})=\frac{0^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=-\frac{q^2}{b^2}<0$$
$$(\text{右辺})=-1<0$$

成り立つ



この例題では、y 軸上の点を通ることから、$a > 0,\ b > 0$ として、双曲線の方程式を次のように表すことができます。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

点 $(0,\ -2)$ を通るので、

$$\frac{0^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = -1$$
$$b^2 = 4$$
$$b > 0 \text{ より}\quad b = 2$$

また、漸近線の傾きが ±1 であることから、

$$\frac{b}{a} = 1$$
$$a = b = 2$$

となるので、求める双曲線の方程式は、

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1 \qquad \text{つまり} \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1$$

また、焦点の座標は、$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ より、

$$(0,\ 2\sqrt{2}),\quad (0,\ -2\sqrt{2})$$

【演習 1 − 5】

次の条件を満たす双曲線の方程式と焦点の座標を求めなさい。

(1) 点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通り、2 直線 $y = 2x,\ y = -2x$ が漸近線

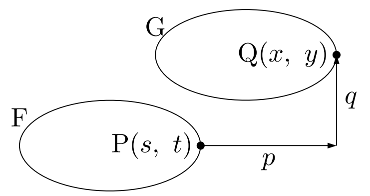
(2) 点 $(0,\ 3\sqrt{2})$ を通り、2 直線 $y = \frac{3}{2}x,\ y = -\frac{3}{2}x$ が漸近線

2　2次曲線の平行移動

$x,\ y$ の方程式 $f(x,\ y) = 0$ が与えられたとき、この方程式が曲線を表すならば、この曲線を**方程式 $f(x,\ y) = 0$ の表す曲線**であったり、**曲線** $f(x,\ y) = 0$ といいます。また、方程式 $f(x,\ y) = 0$ を、この**曲線の方程式**といいます。放物線、楕円、双曲線などは、いずれも x, y についての方程式 $f(x,\ y) = 0$ の形で表されます。

2.1　2次曲線の平行移動

右の図のように、方程式 $f(x,\ y) = 0$ の表す曲線を F とし、この曲線を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した曲線を G とします。このとき、曲線 F 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移されたとすると、



$$s + p = x, \qquad t + q = y$$

より、

$$s = x - p, \qquad t = y - q \ \cdots\cdots \ ①$$

また、点 P は曲線 $f(x,\ y) = 0$ 上の点なので、

$$f(s,\ t) = 0 \ \cdots\cdots \ ②$$

①, ②より、

$$f(x - p, y - q) = 0$$

となり、この方程式は点 Q の満たす方程式、つまり、平行移動後の曲線 G の方程式になります。

このように、x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は、元の曲線の方程式の x と y を、

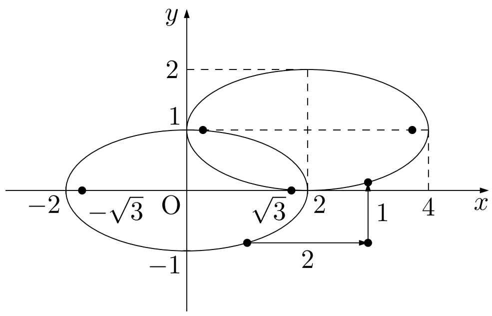
$$x \longrightarrow x - p, \qquad y \longrightarrow y - q$$

のように置き換えることにより得ることができます。また、このとき、曲線の頂点、焦点、漸近線なども、もとの曲線の頂点、焦点、漸近線を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したものになります。

【例題 2 − 1】

楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を x 軸方向に 2、y 軸方向に 1 だけ平行移動するとき、移動後の曲線の方程式と焦点の座標をそれぞれ求めなさい。

＜解説＞



移動後の曲線（楕円）の方程式は、x, y をそれぞれ、

$$x \longrightarrow x-2, \qquad y \longrightarrow y-1$$

と置き換えることにより、

$$\frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

また、楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点の座標は、$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より、

$$(\sqrt{3},\ 0), \qquad (-\sqrt{3},\ 0)$$

となりますが、この点も x 軸方向に 2、y 軸方向に 1 だけ平行移動されるので、移動後の焦点の座標は、

$$(2+\sqrt{3},\ 1), \qquad (2-\sqrt{3},\ 1)$$

【演習 2 − 1】

(1) 楕円 $4x^2+9y^2=36$ を x 軸方向に -3、y 軸方向に -1 だけ平行移動するとき、移動後の曲線の方程式と焦点の座標をそれぞれ求めなさい。

(2) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 1、y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき、移動後の曲線の方程式、焦点の座標、漸近線の方程式をそれぞれ求めなさい。

2.2　2 次曲線の分類

x, y の方程式 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ の表す図形について考えるとき、まず、次のようにして x, y について平方完成します。

$$\begin{aligned} ax^2+by^2+cx+dy+e&=0\\ (ax^2+cx)+(by^2+dy)&=-e\\ a\left(x^2+\frac{c}{a}x\right)+b\left(y^2+\frac{d}{b}y\right)&=-e\\ a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2+b\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2&=-e+\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b} \end{aligned}$$

そして、この式をさらに変形した式が、次のどの形になるかによって、どの 2 次曲線になるのかを分類することができます。

(i) $(y-q)^2=4P(x-p)$: 放物線 $y^2=4Px$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動
(ii) $\dfrac{(x-p)^2}{A^2}+\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$: 楕円 $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動
(iii) $\dfrac{(x-p)^2}{A^2}-\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$: 双曲線 $\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動

【例題 2 − 2】

次の方程式はどのような図形を表しますか。
(1) $9(x+1)^2-16(y-2)^2=144$　　(2) $4x^2+9y^2+24x+18y+9=0$

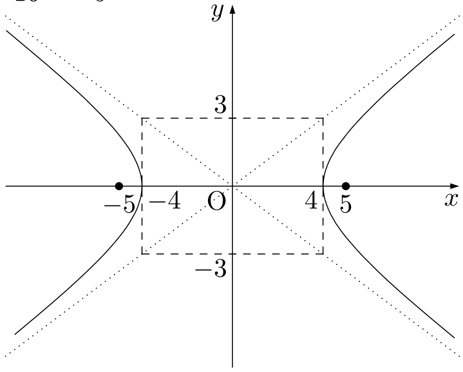
<解説>

(1) 方程式の両辺を 144 で割ると、

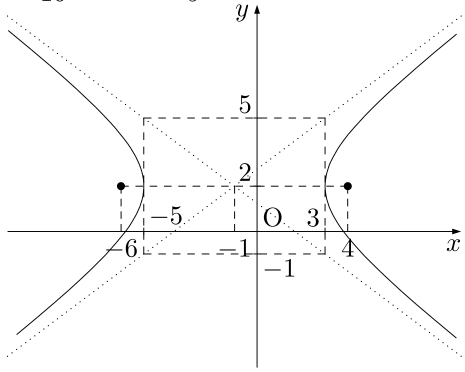
$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

となるので、双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に -1、y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表します。

(i) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ のグラフ



(ii) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ のグラフ

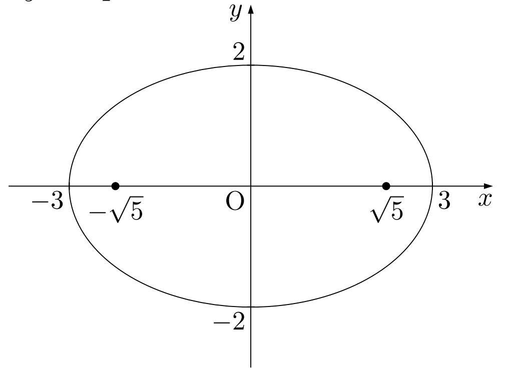


(2) x, y について平方完成すると、

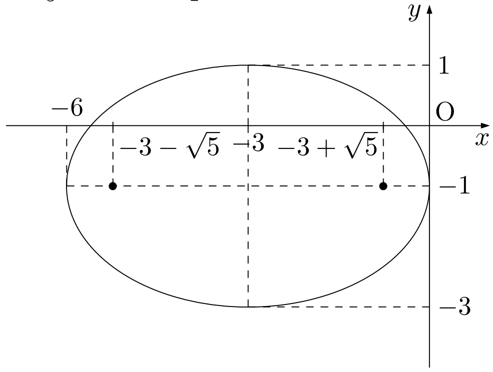
$$\begin{aligned}
4x^2+9y^2+24x+18y+9&=0\\
4(x^2+6x)+9(y^2+2y)&=-9\\
4(x^2+6x+3^2)+9(y^2+2y+1^2)&=-9+4\cdot 3^2+9\cdot 1^2\\
4(x+3)^2+9(y+1)^2&=36\\
\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}&=1
\end{aligned}$$

となるので、楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に -3、y 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円を表します。

(i) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ のグラフ



(ii) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$ のグラフ



【演習 2 − 2】

次の方程式はどのような図形を表しますか。

(1) $x^2-2y^2-4y=10$　　(2) $y^2-4x-4y=0$

3　2次曲線と直線

3.1　2次曲線と直線の共有点の座標

2次曲線 $f(x,\ y)=0$ と直線 $ax+by+c=0$ の共有点の座標は、2つの方程式に共通な x と y の値を求めればよいので、2つの方程式を連立して解くことにより得られます。つまり、2次曲線と直線の共有点の座標は、次の手順により求めることができます。

(i) 直線の式を x または y について解き、2次曲線の式に代入して1文字消去する。
(ii) (i) で得られた方程式を解き、いずれかの文字 (x もしくは y) の値を求める。
(iii) (ii) で得られた文字の値を直線の式に代入し、残りの文字の値を求める。

【例題3 − 1】

次の2次曲線と直線は共有点をもちますか。共有点をもつ場合は、その点の座標を求めなさい。

(1) $x^2+2y^2=1,\ x+y=1$　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ 2x+y=6$
(3) $y^2=4x,\ y=x+1$　(4) $x^2-4y^2=1,\ x+2y=1$

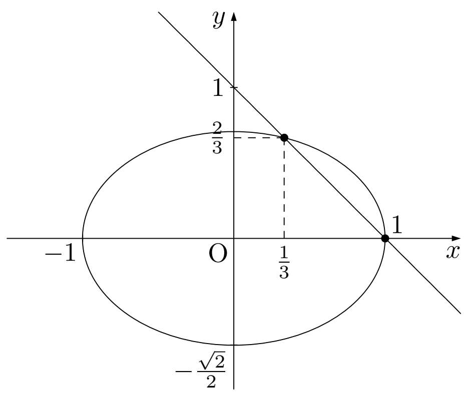
＜解説＞

(1) $x^2+2y^2=1$ …… ①, $x+y=1$ …… ② とすると、
②より、

$$y=-x+1 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

これを①に代入して、

$$\begin{aligned} x^2+2(-x+1)^2&=1 \\ x^2+2x^2-4x+2&=1 \\ 3x^2-4x+1&=0 \\ (3x-1)(x-1)&=0 \\ x&=\frac{1}{3},\ 1 \end{aligned}$$



これらを③に代入すると、
(i) $x=\dfrac{1}{3}$ のとき：$y=\dfrac{2}{3}$　(ii) $x=1$ のとき：$y=0$
となるので、2つの共有点（交点）をもち、その座標は、

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\quad (1,\ 0)$$

(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ……… ①, $2x+y=6$ ……… ② とすると、②より、

$$y=-2x+6$$

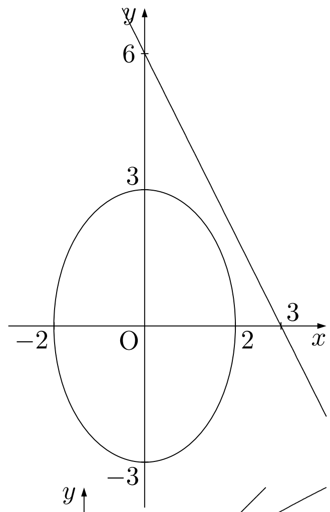
これを①に代入して、

$$\begin{aligned} 9x^2+4(-2x+6)^2&=36 \\ 9x^2+16x^2-96x+144&=36 \\ 25x^2-96x+108&=0 \end{aligned}$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4}=(-48)^2-25\cdot108=-396<0$$

となり 2 次方程式は実数解をもたないので、共有点をもたない。



(3) $y^2=4x$ ……… ①, $y=x+1$ ……… ② とすると、②を①に代入して、

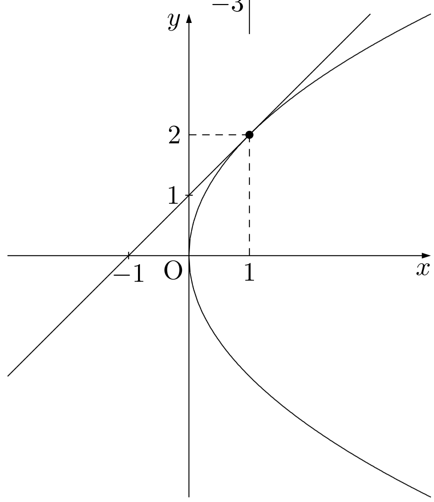
$$\begin{aligned} (x+1)^2&=4x \\ x^2+2x+1&=4x \\ x^2-2x+1&=0 \\ (x-1)^2&=0 \\ x&=1 \end{aligned}$$

これを②に代入して、

$$y=2$$

よって、1 つの共有点（接点）をもち、その座標は、

$$(1,\ 2)$$



(4) $x^2-4y^2=1$ ……… ①, $x+2y=1$ ……… ② とすると、②より、

$$x=-2y+1 \quad \cdots\cdots ③$$

これを①に代入して、

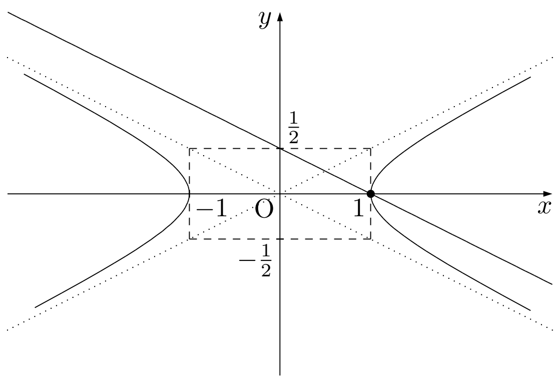
$$\begin{aligned} (-2y+1)^2-4y^2&=1 \\ 4y^2-4y+1-4y^2&=1 \\ -4y&=0 \\ y&=0 \end{aligned}$$

これを②に代入して、

$$x=1$$

よって、1 つの共有点をもち、その座標は、

$$(1,\ 0)$$



3.2　2 次曲線と直線の共有点の個数

2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ $\cdots\cdots$ ① と直線 $ax+by+c=0$ $\cdots\cdots$ ② の共有点の座標は、①, ②の方程式を連立させることにより求めることができます。そのため、2 次曲線と直線の共有点の個数は、連立方程式によって得られる解の個数と一致することになります。そのことから、①, ②の方程式から 1 文字消去して得られる方程式が 2 次方程式（判別式を D）になるとき、その解の個数から、2 次曲線と直線の位置関係を次のように判断することができます。

(i) 異なる 2 つの実数解をもつ（$D>0$）: 異なる 2 点で交わる
(ii) 1 つの実数解をもつ（$D=0$）: 1 点を共有する（1 点で接する）
　　このとき、2 次曲線と直線は**接する**といい、その直線を**接線**、共有点を**接点**といいます。
(iii) 実数解をもたない（$D<0$）: 共有点をもたない

また、①, ②の方程式から 1 文字消去して得られる方程式が 1 次方程式になるとき、得られる解は 1 つになるので、2 次曲線と直線は 1 点で交わります。ただし、このとき 2 次曲線と直線は接しません。

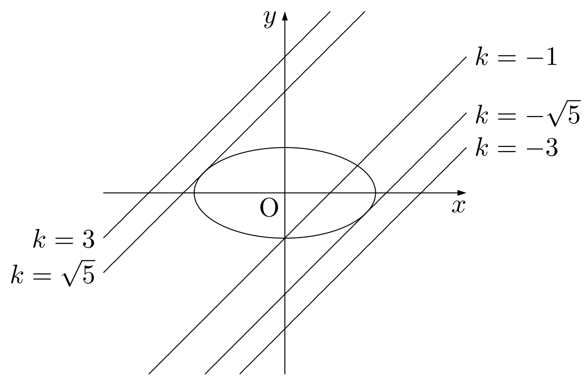
【例題 3 − 2】

k を定数とするとき、楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $\cdots\cdots$ ① と直線 $y=x+k$ $\cdots\cdots$ ② の共有点の個数を求めなさい。

＜解説＞

②を①に代入して整理すると、

$$\frac{x^2}{4}+(x+k)^2=1$$
$$\frac{x^2}{4}+x^2+2kx+k^2-1=0$$
$$5x^2+8kx+4k^2-4=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$



③の x の 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(4k)^2-5(4k^2-4)\\&=16k^2-20k^2+20\\&=-4k^2+20\\&=-4(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})\end{aligned}$$

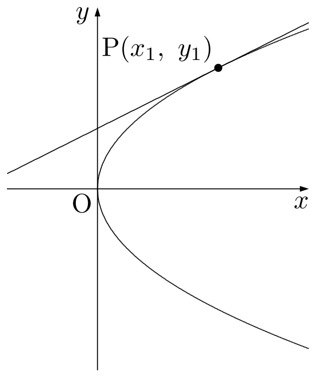
楕円①と直線②の共有点の個数は、③の方程式の実数解の個数と一致するので、

(i) $D>0$ のとき：$-4(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})>0$ より $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ のとき　共有点は 2 個
(ii) $D=0$ のとき：$-4(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$ より $k=\pm\sqrt{5}$ のとき　共有点は 1 個
(iii) $D<0$ のとき：$-4(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$ より $k<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<k$ のとき　共有点は 0 個

【演習 3 − 2】

k を定数とするとき、双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ ······· ① と直線 $y = x + k$ ······· ② の共有点の個数を求めなさい。

3.3　放物線上の点における接線



右の図のような放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみます。

点 P は放物線 $y^2 = 4px$ 上の点であるので、

$$ {y_1}^2 = 4px_1 \ \cdots\cdots \ ① $$

点 P が原点以外の点 $(y_1 \fallingdotseq 0)$ であるとき、接線の方程式を $y - y_1 = m(x - x_1)$ とすると、

$$ \begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \ \cdots\cdots \ ② \\ &= mx - mx_1 \\ mx &= y - y_1 + mx_1 \ \cdots\cdots \ ③ \end{aligned} $$

また、放物線の方程式の両辺を m 倍すると、

$$ my^2 = 4pmx $$

となるので、この式と③を用いて x を消去すると、

$$ \begin{aligned} my^2 &= 4p(y - y_1 + mx_1) \\ &= 4py - 4py_1 + 4pmx_1 \\ my^2 - 4py + 4p(y_1 - mx_1) &= 0 \ \cdots\cdots \ ④ \end{aligned} $$

放物線と直線②が接するとき、$m \fallingdotseq 0$ で、方程式④が $y = y_1$ を重解にもつ必要があります。このことから、

$$ \begin{aligned} y_1 &= -\frac{-4p}{2m} = \frac{2p}{m} \\ m &= \frac{2p}{y_1} \ \cdots\cdots \ ⑤ \end{aligned} $$

このとき、④の方程式は、

$$ \begin{aligned} \frac{2p}{y_1}y^2 - 4py + 4p\left(y_1 - \frac{2p}{y_1}x_1\right) &= 0 \\ y^2 - 2y_1y + (2{y_1}^2 - 4px_1) &= 0 \\ \text{①より} \qquad y^2 - 2y_1y + (2{y_1}^2 - {y_1}^2) &= 0 \\ (y - y_1)^2 &= 0 \end{aligned} $$

となり、確かに $y = y_1$ を重解にもちます。よって、⑤を②に代入して接線の方程式を求めると、

$$ \begin{aligned} y - y_1 &= \frac{2p}{y_1}(x - x_1) \\ y_1y - {y_1}^2 &= 2p(x - x_1) \\ \text{①より} \quad y_1y &= 2p(x - x_1) + 4px_1 \\ &= 2px - 2px_1 + 4px_1 \\ &= 2p(x + x_1) \ \cdots\cdots \ ⑥ \end{aligned} $$

また、$y_1 = 0$ のとき、①より $x_1 = 0$ となり、放物線の接線の方程式は、

$$x = 0$$

これは、⑥の方程式に、$x_1 = y_1 = 0$ を代入して得られる式になっています。

以上のことから、放物線の方程式において、$x,\ y$ 同士の和や積のうち、2 つある文字の一方を接点の座標に置き換えることで接線の方程式になります。

$$y^2 \longrightarrow yy \longrightarrow y_1 y, \qquad 2x \longrightarrow x + x \longrightarrow x + x_1$$

$$y^2 = 4px \longrightarrow y^2 = 2p \cdot 2x \longrightarrow y_1 y = 2p(x + x_1)$$

【例題 3 − 3】

放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 $(4,\ 4)$ における接線の方程式を求めなさい。

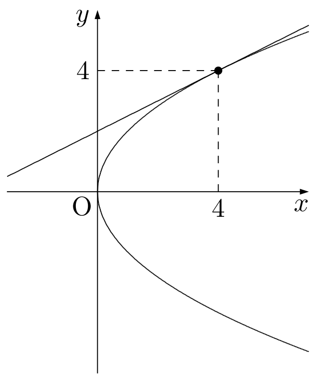
＜解説＞

放物線の接線の公式から、

$$4y = 2(x + 4)$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 4)$$

$$= \frac{1}{2}x + 2$$

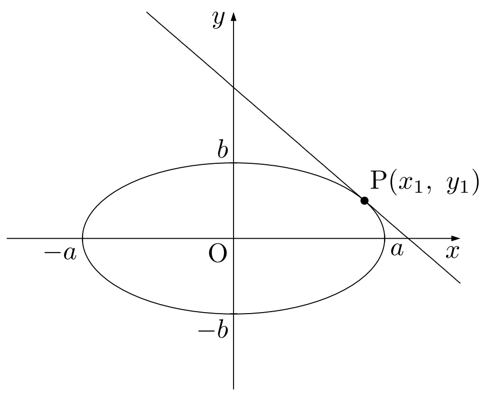


【演習 3 − 3】

放物線 $y^2 = 8x$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式を求めなさい。

3.4 楕円上の点における接線

右の図のような楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみます。



点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるので、

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1 \ \cdots\cdots\ ①$$

点 P が x 軸上にない点（$y_1 \fallingdotseq 0$）であるとき、接線の方程式を $y-y_1=m(x-x_1)$ とすると、

$$\begin{aligned} y-y_1&=m(x-x_1)\\ y&=mx+(y_1-mx_1)\ \cdots\cdots\ ② \end{aligned}$$

楕円の式と②を用いて y を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{\{mx+(y_1-mx_1)\}^2}{b^2}&=1\\ b^2x^2+a^2\{m^2x^2+2m(y_1-mx_1)x+(y_1-mx_1)^2&=a^2b^2\\ (a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(y_1-mx_1)x+a^2(y_1-mx_1)^2-a^2b^2&=0\ \cdots\cdots\ ③ \end{aligned}$$

楕円と直線②が接するとき、方程式③が $x=x_1$ を重解にもつ必要があります。このことから、

$$\begin{aligned} x_1&=-\frac{2a^2m(y_1-mx_1)}{2(a^2m^2+b^2)}\\ a^2m^2x_1+b^2x_1&=-a^2my_1+a^2m^2x_1\\ m&=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\ \cdots\cdots\ ④ \end{aligned}$$

このとき、③の方程式は、

$$\begin{aligned} a^2m^2+b^2&=a^2\cdot\frac{b^4{x_1}^2}{a^4{y_1}^2}+b^2\\ &=\frac{b^4}{{y_1}^2}\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)\\ ①\text{より}\quad &=\frac{b^4}{{y_1}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1-mx_1&=y_1+\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x_1\\ &=\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)\\ &=\frac{b^2}{y_1} \end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned} \frac{b^4}{{y_1}^2}x^2-2a^2\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot\frac{b^2}{y_1}x+a^2\frac{b^4}{{y_1}^2}-a^2b^2&=0\\ x^2-2x_1x+a^2-\frac{a^2{y_1}^2}{b^2}&=0\\ x^2-2x_1x+a^2\left(1-\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)&=0\\ ①\text{より}\quad x^2-2x_1x+a^2\cdot\frac{{x_1}^2}{a^2}&=0\\ (x-x_1)^2&=0 \end{aligned}$$

となり、確かに $x = x_1$ を重解にもちます。よって、④を②に代入して接線の方程式を求めると、

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

$$\frac{b^2 x_1 x}{a^2 y_1} + y = \frac{b^2}{y_1}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

また、$y_1 = 0$ のとき、①より $x_1 = \pm a$ となり、楕円の接線の方程式は、

$$x = a, \qquad x = -a$$

これは、⑤の方程式に、$(x_1,\ y_1) = (a,\ 0)$, $(x_1,\ y_1) = (-a,\ 0)$ をそれぞれ代入して得られる式になっています。

以上のことから、楕円の方程式において、x, y 同士の積のうち、2 つある文字の一方を接点の座標に置き換えることで接線の方程式になります。

$$x^2 \longrightarrow xx \longrightarrow x_1 x, \qquad y^2 \longrightarrow yy \longrightarrow y_1 y$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

【例題 3 − 4】

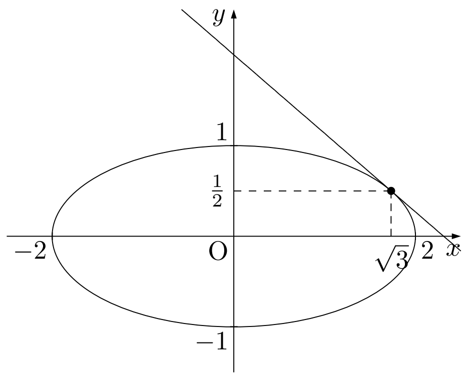
楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞

楕円の接線の公式から、

$$\frac{\sqrt{3}x}{4} + \frac{1}{2}y = 1$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$$

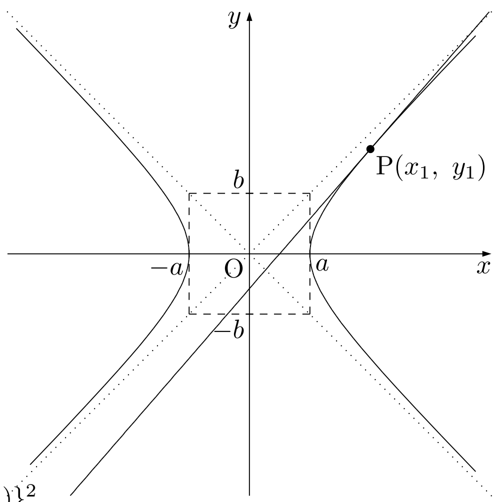


【演習 3 − 4】

楕円 $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ 上の点 $(\sqrt{5},\ 2)$ における接線の方程式を求めなさい。

3.5 双曲線上の点における接線

右の図のような双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみます。



点 P は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるので、

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1 \ \cdots\cdots \ ①$$

点 P が x 軸上にない点（$y_1 \fallingdotseq 0$）であるとき、接線の方程式を $y-y_1=m(x-x_1)$ とすると、

$$\begin{aligned} y-y_1&=m(x-x_1)\\ y&=mx+(y_1-mx_1) \ \cdots\cdots \ ② \end{aligned}$$

双曲線の式と②を用いて y を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{\{mx+(y_1-mx_1)\}^2}{b^2}&=1\\ b^2x^2-a^2\{m^2x^2+2m(y_1-mx_1)x+(y_1-mx_1)^2&=a^2b^2\\ (b^2-a^2m^2)x^2-2a^2m(y_1-mx_1)x-a^2(y_1-mx_1)^2-a^2b^2&=0 \ \cdots\cdots \ ③ \end{aligned}$$

双曲線と直線②が接するとき、方程式③が $x=x_1$ を重解にもつ必要があります。このことから、

$$\begin{aligned} x_1&=-\frac{-2a^2m(y_1-mx_1)}{2(b^2-a^2m^2)}\\ b^2x_1-a^2m^2x_1&=a^2my_1-a^2m^2x_1\\ m&=\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \ \cdots\cdots \ ④ \end{aligned}$$

このとき、③の方程式は、

$$\begin{aligned} b^2-a^2m^2&=b^2-a^2\cdot\frac{b^4{x_1}^2}{a^4{y_1}^2}\\ &=-\frac{b^4}{{y_1}^2}\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)\\ \text{①より}\quad &=-\frac{b^4}{{y_1}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1-mx_1&=y_1-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x_1\\ &=-\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)\\ &=-\frac{b^2}{y_1} \end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned} -\frac{b^4}{{y_1}^2}x^2-2a^2\cdot\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(-\frac{b^2}{y_1}\right)x-a^2\frac{b^4}{{y_1}^2}-a^2b^2&=0\\ x^2-2x_1x+a^2+\frac{a^2{y_1}^2}{b^2}&=0\\ x^2-2x_1x+a^2\left(1+\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)&=0\\ \text{①より}\quad x^2-2x_1x+a^2\cdot\frac{{x_1}^2}{a^2}&=0\\ (x-x_1)^2&=0 \end{aligned}$$

となり、確かに $x = x_1$ を重解にもちます。よって、④を②に代入して接線の方程式を求めると、

$$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}x - \frac{b^2}{y_1}$$
$$\frac{b^2 x_1 x}{a^2 y_1} - y = \frac{b^2}{y_1}$$
$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

また、$y_1 = 0$ のとき、①より $x_1 = \pm a$ となり、双曲線の接線の方程式は、

$$x = a, \qquad x = -a$$

これは、⑤の方程式に、$(x_1,\ y_1) = (a,\ 0)$, $(x_1,\ y_1) = (-a,\ 0)$ をそれぞれ代入して得られる式になっています。

以上のことから、双曲線の方程式において、x, y 同士の積のうち、2 つある文字の一方を接点の座標に置き換えることで接線の方程式になります。

$$x^2 \longrightarrow xx \longrightarrow x_1 x, \qquad y^2 \longrightarrow yy \longrightarrow y_1 y$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

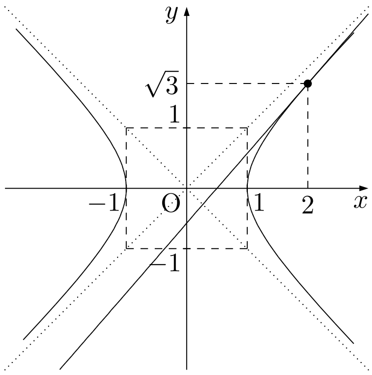
【例題 3 − 5】

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点 $(2,\ \sqrt{3})$ における接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞

双曲線の接線の公式から、

$$2x - \sqrt{3}y = 1$$
$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

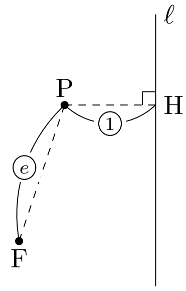


【演習 3 − 5】

双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上の点 $\left(5,\ -\dfrac{8}{3}\right)$ における接線の方程式を求めなさい。

3.6　2 次曲線と離心率

平面上で、定点 F とこの点を通らない定直線 ℓ からの距離の等しい点の軌跡が放物線になりますが、楕円や双曲線も、定点 F と定直線 ℓ からの距離の比が一定である点の軌跡として定義することができます。

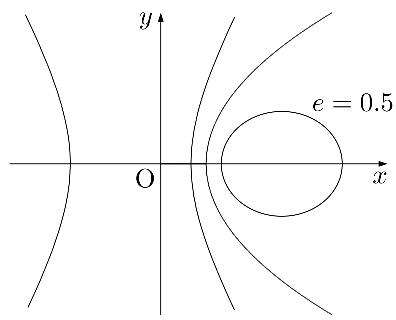


右の図のように、点 P から直線 ℓ に引いた垂線を PH とするとき、

$$\mathrm{PF} : \mathrm{PH} = e : 1 \quad (e \text{ は正の定数})$$

を満たす点 P の軌跡は、点 F を 1 つの焦点とする 2 次曲線になり、直線 ℓ を**準線**、e を 2 次曲線の**離心率**といいます。

このとき、e の値によって、2 次曲線は次のように分類されます。



(i) $0 < e < 1$ のとき：楕円
(ii) $e = 1$ のとき：放物線
(iii) $e > 1$ のとき：双曲線

【例題 3 − 6】

点 F(6, 0) からの距離と y 軸からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めなさい。

(1) 2 : 1　　(2) 1 : 1　　(3) 1 : 2

＜解説＞

点 P を P$(x,\ y)$ とし、点 P から y 軸に引いた垂線を PH とすると、

$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}, \qquad \mathrm{PH} = |x|$$

(1) PF : PH = 2 : 1 より、

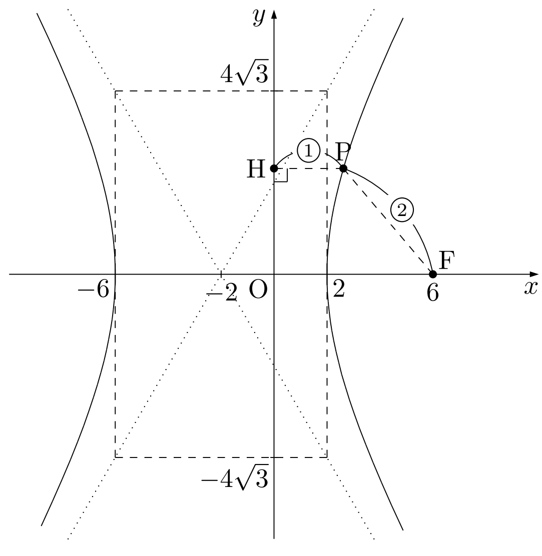
$$\mathrm{PF} = 2\mathrm{PH}$$

両辺を 2 乗して、

$$\mathrm{PF}^2 = 4\mathrm{PH}^2$$

よって、

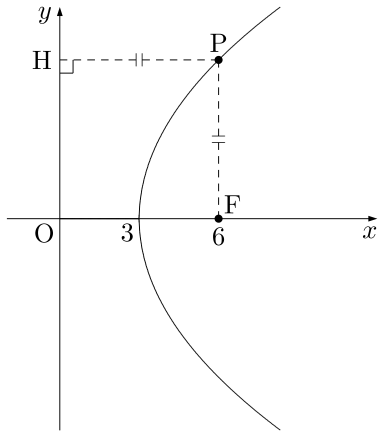
$$\begin{aligned}
(x-6)^2 + y^2 &= 4x^2 \\
x^2 - 12x + 36 + y^2 &= 4x^2 \\
3x^2 + 12x - y^2 &= 36 \\
3(x^2 + 4x + 4) - y^2 &= 36 + 3 \cdot 4 \\
\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{y^2}{48} &= 1 \ \cdots\cdots \ ①
\end{aligned}$$



となり、点 P は双曲線①上にある。逆に、双曲線①上のすべての点は条件を満たすので、求める点 P の軌跡は、

$$\text{双曲線} \quad \frac{(x+2)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

(2) $\mathrm{PF} : \mathrm{PH} = 1 : 1$ より、



$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$$

両辺を 2 乗して、

$$\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$$

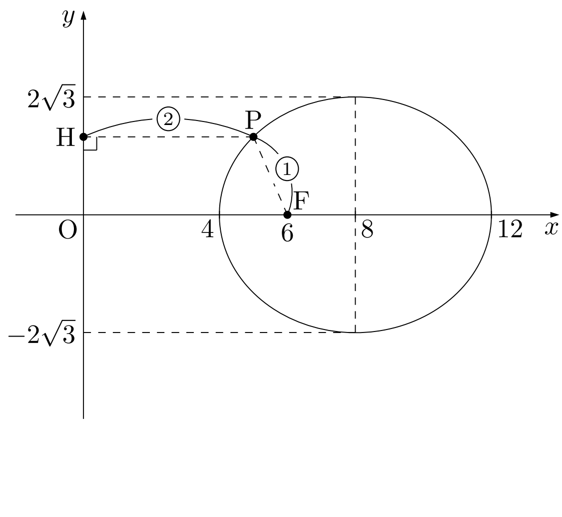
よって、

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + y^2 &= x^2 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 &= x^2 \\ y^2 &= 12x - 36 \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

となり、点 P は放物線①上にある。逆に、放物線①上のすべての点は条件を満たすので、求める点 P の軌跡は、

$$\text{放物線} \quad y^2 = 12x - 36$$

(3) $\mathrm{PF} : \mathrm{PH} = 1 : 2$ より、



$$2\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$$

両辺を 2 乗して、

$$4\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$$

よって、

$$\begin{aligned} 4\{(x-6)^2 + y^2\} &= x^2 \\ 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 &= x^2 \\ 3x^2 - 48x + 4y^2 &= -144 \\ 3(x^2 - 16x + 64) + 4y^2 &= -144 + 192 \\ \frac{(x-8)^2}{16} + \frac{y^2}{12} &= 1 \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

となり、点 P は楕円①上にある。逆に、楕円①上のすべての点は条件を満たすので、求める点 P の軌跡は、

$$\text{楕円} \quad \frac{(x-8)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

【演習 3 − 6】

点 F(0, 1) からの距離と直線 $\ell : y = 4$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めなさい。

(1) 2 : 1　　(2) 1 : 1　　(3) 1 : 2

4　曲線の媒介変数表示

4.1　媒介変数表示

y が x の関数であるとき、x の値を決めると y の値がただ 1 つに決まり、そのようにして得られる点 $(x,\ y)$ の全体は曲線を描きます。

平面上の曲線が、t などのようなある 1 つの変数によって、

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、これをその曲線の**媒介変数表示**、t を**媒介変数（パラメータ）**といいます。このとき、

x の値を決める $\longrightarrow$ t の値が決まる $\longrightarrow$ y の値が決まる

というように、x の値を決めると、t を仲立ち（媒介）として y の値が決まることになります。

【例題 4 − 1】

次の媒介変数表示された曲線は、どのような図形を描きますか。

(1) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

<解説>

媒介変数表示された曲線がどのような図形になるかを判断するとき、媒介変数を消去し、x, y の関係式を作ります。

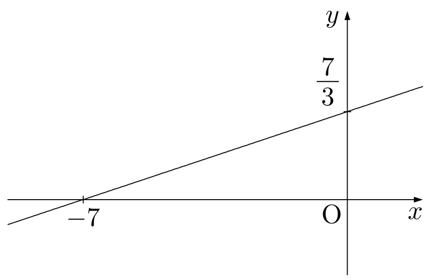
(1) $\begin{cases} x = -1 + 3t & \cdots\cdots ① \\ y = 2 + t & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると、②より、

$$t = y - 2$$

これを①に代入して、

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3(y - 2) \\ &= 3y - 7 \end{aligned}$$

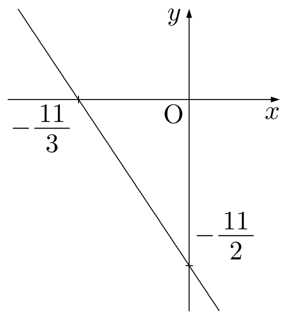
$$x - 3y + 7 = 0$$



よって、

直線　$x - 3y + 7 = 0$

(2) $\begin{cases} x = 2t - 5 & \cdots\cdots ③ \\ y = 2 - 3t & \cdots\cdots ④ \end{cases}$ とすると、③ $\times 3 +$ ④ $\times 2$ を計算して t を消去。

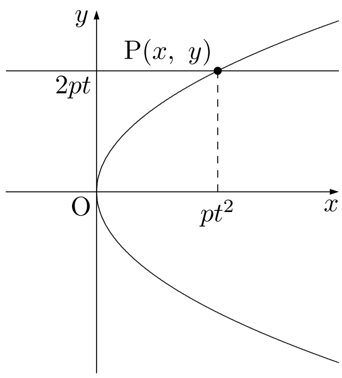


$$3x + 2y = -15 + 4$$
$$3x + 2y + 11 = 0$$

よって、

直線　$3x + 2y + 11 = 0$

4.2 放物線の媒介変数表示



右の図のように、放物線 $y^2 = 4px$ と y 軸に垂直な直線 $y = 2pt$ との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、

$$\begin{aligned}(2pt)^2 &= 4px \\ 4px &= 4p^2t^2 \\ x &= pt^2\end{aligned}$$

となるので、放物線 $y^2 = 4px$ は、次のようにして媒介変数表示できることになります。

$$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

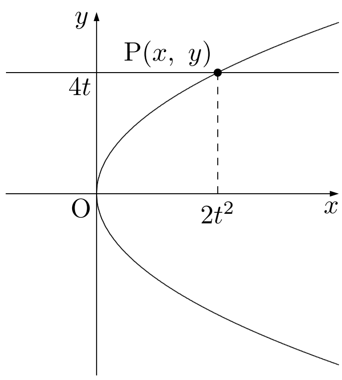
【例題 4 − 2】

次の媒介変数表示された曲線は、どのような図形を描きますか。

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 4t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t^2 \\ y = 3t \end{cases}$

＜解説＞

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 & \cdots\cdots ① \\ y = 4t & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とすると、②より、



$$t = \frac{y}{4}$$

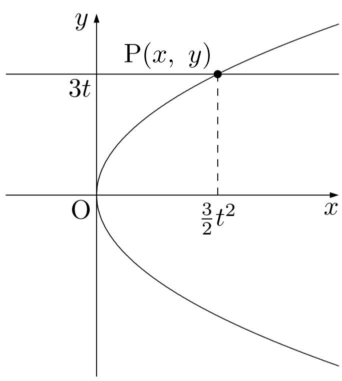
これを①に代入して、

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^2 \\ y^2 &= 8x \end{aligned}$$

よって、

放物線　$y^2 = 8x$

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t^2 & \cdots\cdots ③ \\ y = 3t & \cdots\cdots ④ \end{cases}$ とすると、④より、



$$t = \frac{y}{3}$$

これを③に代入して、

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{y}{3}\right)^2 \\ y^2 &= 6x \end{aligned}$$

よって、

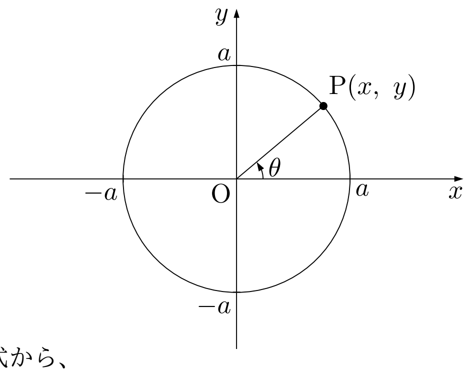
放物線　$y^2 = 6x$

4.3 円の媒介変数表示

右の図のように、原点を中心とする半径 a の円周上に点 P$(x,\ y)$ があり、x 軸の正の向きと OP のなす角を θ とすると、

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta$$

と表すことができるので、円 $x^2 + y^2 = a^2$ は、次のようにして媒介変数表示できることになります。



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$$

ここで、$\tan\dfrac{\theta}{2} = t\ (t \fallingdotseq \pm 1)$ とすると、三角関数の 2 倍角の公式から、

$$\begin{aligned} \tan\theta = \tan 2\cdot\frac{\theta}{2} &= \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}$$

また、三角関数の半角の公式から、

$$\begin{aligned} \tan^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ t^2 &= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ t^2 + t^2\cos\theta &= 1-\cos\theta \\ (1+t^2)\cos\theta &= 1-t^2 \\ \cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \tan\theta\cos\theta \\ &= \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

と表すことができるので、このことから、円 $x^2 + y^2 = a^2$ は、t を用いて次のようにして媒介変数表示することもできます。

$$\begin{cases} x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2at}{1+t^2} \end{cases}$$

【例題 4 − 3】

次の媒介変数表示された曲線は、どのような図形を描きますか。

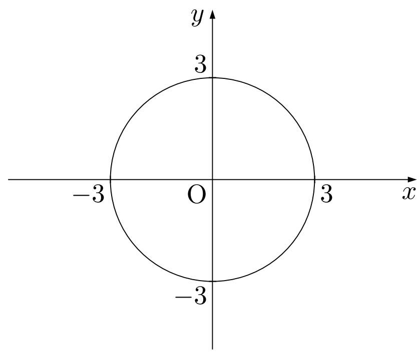
(1) $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 3 \end{cases}$

<解説>

(1) $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ より、$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{3} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ となるので、これを

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して、

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 9$$



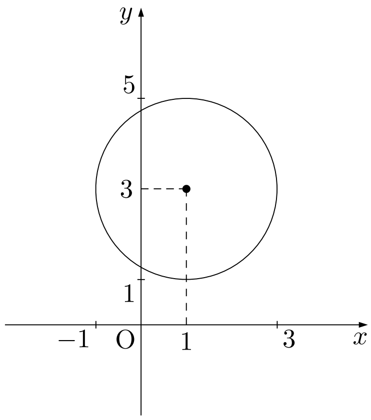
よって、

円　$x^2 + y^2 = 9$

(2) $\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 3 \end{cases}$ より、$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y-3}{2} \end{cases}$ となるので、これを

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して、

$$\left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$



よって、

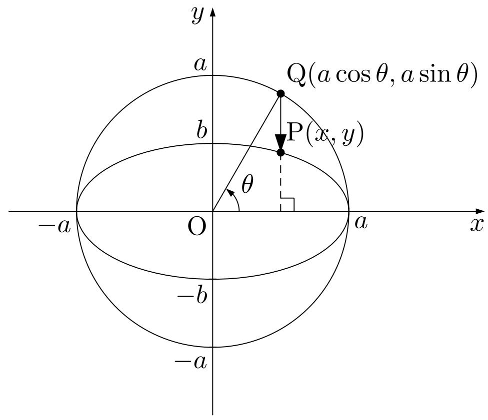
円　$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

【演習 4 − 3】

円 $x^2 + y^2 = a^2$ と直線 $y = t(x+a)$ との交点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考えることにより、$(-a,\ 0)$ を除くこの円を、t を媒介変数として表しなさい。

4.4 楕円の媒介変数表示

右の図のように、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に拡大・縮小した曲線であるので、円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると、



$$x=a\cos\theta,\qquad y=a\sin\theta\times\frac{b}{a}=b\sin\theta$$

と表すことができるので、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、次のようにして媒介変数表示できることになります。

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

ここで、$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (t\fallingdotseq\pm1)$ とすると、三角関数の公式から、

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

と表すことができるので、このことから、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、t を用いて次のようにして媒介変数表示することもできます。

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$$

【例題 4 − 4】

次の媒介変数表示は、どのような図形を表しますか。

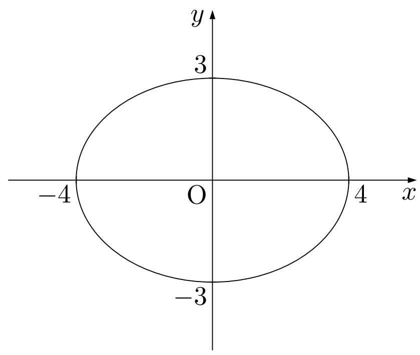
(1) $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=3\sin\theta-2 \end{cases}$

＜解説＞

(1) $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ より、$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{4} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{3} \end{cases}$ となるので、これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して、

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$



よって、

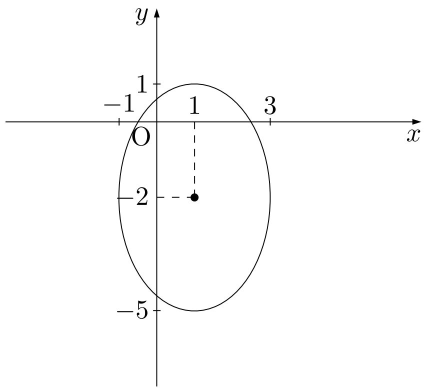
楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

(2) $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 3\sin\theta - 2 \end{cases}$ より、$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y+2}{3} \end{cases}$ となるので、これを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して、

$$\left(\frac{y+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 1$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

よって、

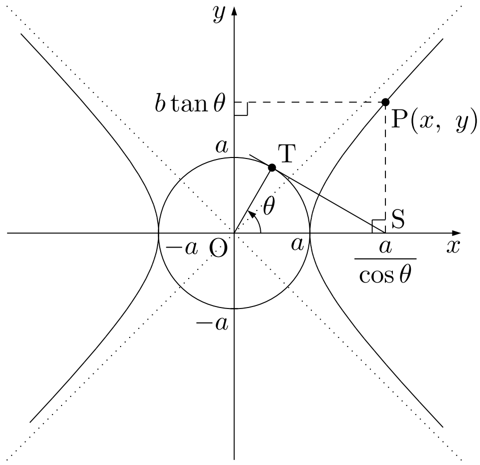
楕円 $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$



【演習 4 − 4】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と直線 $y = \dfrac{b}{a}t(x+a)$ との交点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考えることにより、$(-a,\ 0)$ を除くこの楕円を、t を媒介変数として表しなさい。

4.5 双曲線の媒介変数表示



三角関数の公式から、

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$$

ここで、

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\qquad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とすると、

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

となり、点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right)$ は、双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上を動くことがわかります。このとき、点 P から x 軸に引いた垂線を PS、S から中心が O、半径 a である円に接線を引き、その接点を T とすると、θ は x 軸の正の向きと OT とのなす角になります。

このことから、双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、次のようにして媒介変数表示できることになります。

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

ここで、$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (t\fallingdotseq\pm1)$ とすると、三角関数の公式から、

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

と表すことができるので、このことから、双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、t を用いて次のようにして媒介変数表示することもできます。

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(1+t^2)}{1-t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1-t^2} \end{cases}$$

【例題 4 − 5】

次の媒介変数表示は、どのような図形を表しますか。

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{2}{\cos\theta} \\ y=3\tan\theta \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\theta}+1 \\ y=\tan\theta-3 \end{cases}$

<解説>

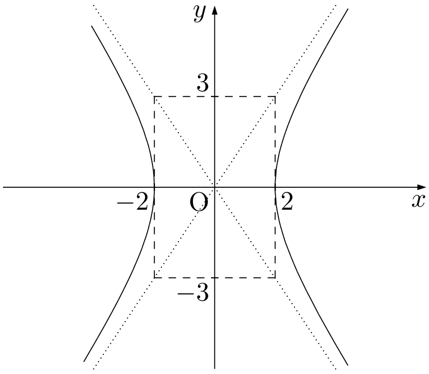
(1) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\cos\theta} \\ y = 3\tan\theta \end{cases}$ より、$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{x}{2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ となるので、これを

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して、

$$1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

よって、

双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



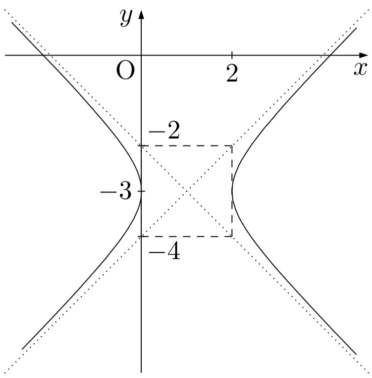
(2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 1 \\ y = \tan\theta - 3 \end{cases}$ より、$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta} = x - 1 \\ \tan\theta = y + 3 \end{cases}$ となるので、これを

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して、

$$1 + (y+3)^2 = (x-1)^2$$
$$(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$$

よって、

双曲線 $(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$

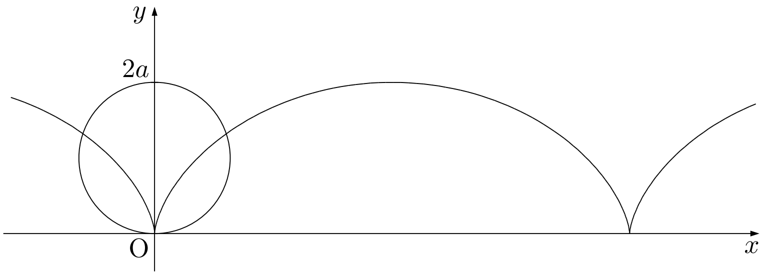


【演習 4 − 5】

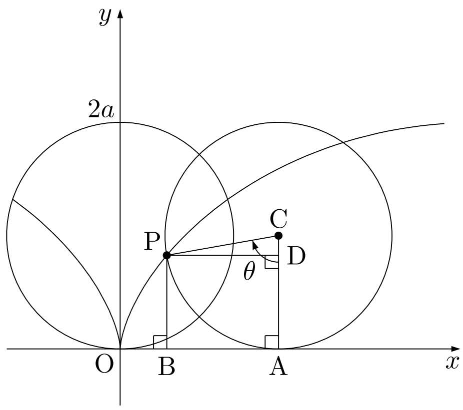
双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と直線 $y = \dfrac{b}{a}t(x+a)$ との交点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考えることにより、$(-a,\ 0)$ を除くこの双曲線を、t を媒介変数として表しなさい。

4.6 サイクロイド

1 つの円が定直線上をすべることなく回転していくとき、円上の定点が描く曲線を**サイクロイド**といいます。



右の図のように、半径が a である円 C が x 軸上をすべることなく回転するとき、円上の定点 P の描く曲線はサイクロイドになります。このとき、P の最初の位置を原点 O とし、その位置から円が角 θ だけ回転したときの P の座標を $(x,\ y)$ とすると、



$$\mathrm{PD} = a\sin\theta, \qquad \mathrm{CD} = a\cos\theta, \qquad \mathrm{OA} = \overset{\frown}{\mathrm{AP}} = a\theta$$

であることから、

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{OB} = \mathrm{OA} - \mathrm{BA} \\ &= \mathrm{OA} - \mathrm{PD} \\ &= a\theta - a\sin\theta = a(\theta - \sin\theta) \\ y &= \mathrm{PB} = \mathrm{CA} - \mathrm{CD} \\ &= a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

このことから、サイクロイドは次のようにして媒介変数表示できることになります。

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

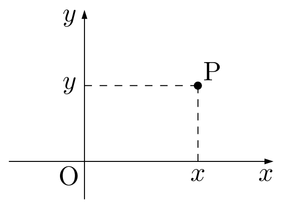
5 極座標

5.1 極座標

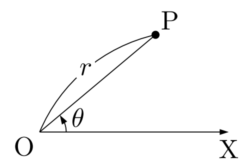
平面上の点は、原点で直交する 2 つの直線（x 軸と y 軸）を定め、x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ により表すことができ、このような座標を**直交座標**といいますが、平面上の点の表し方には他の方法もあります。

平面上に定点 O と半直線 OX をとると、点 O と異なる平面上の任意の点 P の位置は、線分 OP の長さ r と、OX から OP までまわる角 θ によって決めることができ、この実数の組 $(r,\ \theta)$ を**極座標**、点 O を**極**、半直線 OX を**始線**、θ を**偏角**といいます。偏角が一般角であるとき、点 $(r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta+2n\pi)$（n は整数）は同じ点を表します。

(i) 直交座標



(ii) 極座標



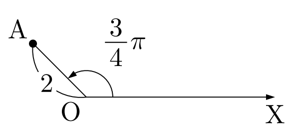
【例題 5 − 1】

次の極座標をもつ点の位置を図示しなさい。

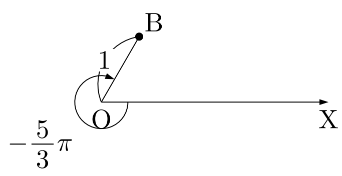
(1) A $\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$　　(2) B $\left(1,\ -\dfrac{5}{3}\pi\right)$

＜解説＞

(1) 線分 OA の長さが 2、偏角が $\dfrac{3}{4}\pi$ である点は、



(2) 線分 OB の長さが 1、偏角が $-\dfrac{5}{3}\pi$ である点は、



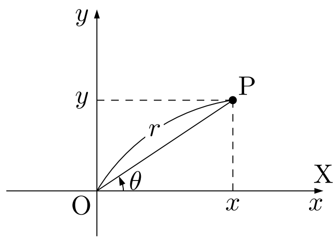
【演習 5 − 1】

次の極座標をもつ点の位置を図示しなさい。

(1) A $\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(2) B $\left(1,\ -\dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(3) C $(1,\ \pi)$　　(4) D $(3,\ 0)$

5.2 極座標と直交座標

点 P の直交座標を $(x,\ y)$、極座標を $(r,\ \theta)$ とします。そして、直交座標の原点 O と極座標の極 O、x 軸の正の部分と始線 OX を一致させると右図のように表され、次の関係が成り立ちます。



(i) $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

(ii) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$ （ただし、$r \fallingdotseq 0$）

(i) の関係を用いることで極座標を直交座標に、また、(ii) の関係を用いることで直交座標を極座標に変換することができます。

【例題 5 − 2】

極座標が次のような点の直交座標を求めなさい。

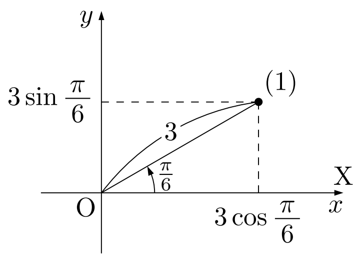
(1) $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$　(3) $(1,\ \pi)$　(4) $\left(2,\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$

＜解説＞

直交座標の原点 O と極座標の極 O、x 軸の正の部分と始線 OX を一致させてそれぞれの点を図に表すと考えやすくなります。また、直交座標を極座標に変換するので、次の関係を用いて考えます。

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

(1) 極座標で表された点を図示すると右図のようになります。

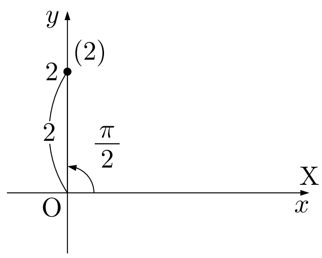


$$x = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$y = 3\sin\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

よって、求める座標は、

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

(2) 極座標で表された点を図示すると右図のようになります。

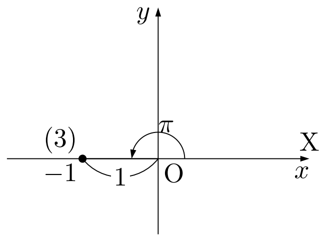


$$x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot 0 = 0$$
$$y = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1 = 2$$

よって、求める座標は、

$$(0,\ 2)$$

(3) 極座標で表された点を図示すると右図のようになります。

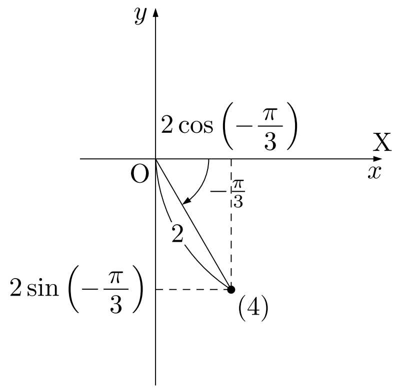


$$x = 1 \cdot \cos\pi = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$y = 1 \cdot \sin\pi = 1 \cdot 0 = 0$$

よって、求める座標は、

$(-1,\ 0)$

(4) 極座標で表された点を図示すると右図のようになります。



$$x = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

よって、求める座標は、

$(1,\ -\sqrt{3})$

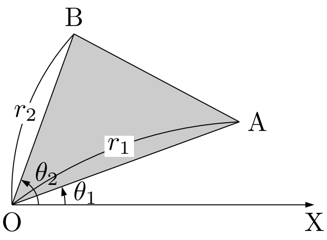
【演習 5 − 2】

直交座標が次のような点の極座標を求めなさい。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とします。

(1) $(2,\ 2)$　(2) $(\sqrt{3},\ -1)$　(3) $(-2,\ -2\sqrt{3})$　(4) $(0,\ -2)$

5.3　2 点間の距離

右の図のように、極を O とし 2 点 A, B の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$ とします。このとき、2 点 A, B 間の距離（辺 AB の長さ）は、△OAB に余弦定理を用いて、



$$\mathrm{OA} = r_1, \qquad \mathrm{OB} = r_2, \qquad \angle\mathrm{AOB} = \theta_2 - \theta_1$$

より、次のようにして求めることができます。

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ より　$\mathrm{AB} = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$

【例題 5 − 3】

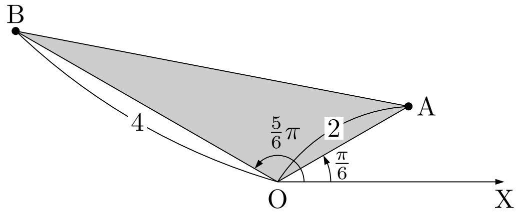
極を O とし、2 点 A, B の極座標が次のように与えられるとき、2 点 A, B 間の距離をそれぞれ求めなさい。

(1) $\mathrm{A}\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{B}\left(4,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(2) $\mathrm{A}\left(4,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$

＜解説＞

(1) △OAB において、

$$\mathrm{OA} = 2, \quad \mathrm{OB} = 4, \quad \angle\mathrm{AOB} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

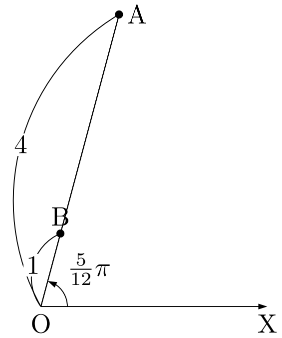


となるので、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}}\\ &= \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\frac{2}{3}\pi}\\ &= \sqrt{4 + 16 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\\ &= \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

(2) 右の図のように、3 点 O, A, B は一直線上に並ぶので、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{OA} - \mathrm{OB}\\ &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$



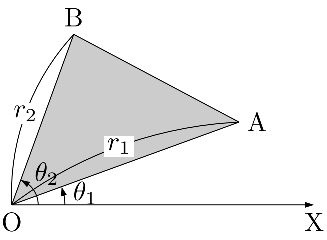
【演習 5 − 3】

極を O とし、2 点 A, B の極座標が次のように与えられるとき、2 点 A, B 間の距離をそれぞれ求めなさい。

(1) $\mathrm{A}\left(2,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{B}\left(4,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(2) $\mathrm{A}\left(4,\ \dfrac{7}{12}\pi\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

5.4 三角形の面積

右の図のように、極を O とし 2 点 A, B の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$ とします。このとき、△OAB の面積 S は、



$$\mathrm{OA} = r_1, \qquad \mathrm{OB} = r_2, \qquad \angle\mathrm{AOB} = \theta_2 - \theta_1$$

より、次のようにして求めることができます。

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

【例題 5 − 4】

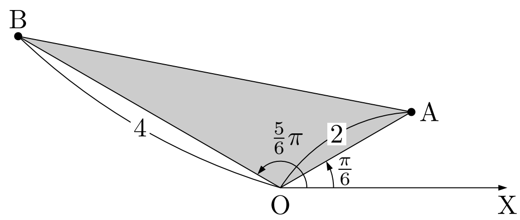
極を O とし、2 点 A, B の極座標が次のように与えられるとき、△OAB の面積をそれぞれ求めなさい。

(1) $\mathrm{A}\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{B}\left(4,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ (2) $\mathrm{A}\left(4,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

＜解説＞

(1) △OAB において、

$$\mathrm{OA} = 2, \quad \mathrm{OB} = 4, \quad \angle\mathrm{AOB} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$



となるので、△OAB の面積 S は、

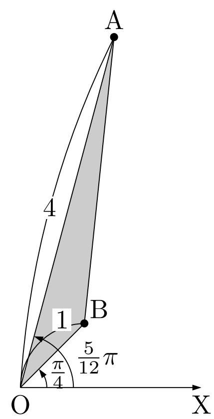
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) △OAB において、

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \mathrm{OB} = 1, \quad \angle\mathrm{AOB} = \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$$

となるので、△OAB の面積 S は、

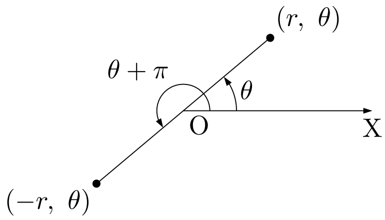
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$



6 極方程式

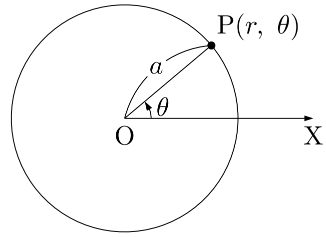
平面上のある曲線が、極座標 $(r,\ \theta)$ に関する方程式 $r = f(\theta)$ や $f(r,\ \theta) = 0$ で表されるとき、その方程式をこの曲線の**極方程式**といいます。極方程式は、曲線上（図形上）にある任意の点 P を極座標 $(r,\ \theta)$ で表し、点 P が満たす図形に関する条件式を作ることで求めることができます。

また、極方程式では、右図のように、点 $(r,\ \theta)$ と極 O に関して対称な点を $(-r,\ \theta)$ とする、つまり、$(-r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta+\pi)$ を同じ点であるとすることにより、$r < 0$ の場合についても考えます。



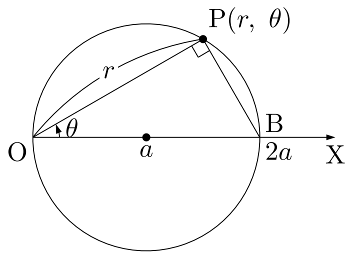
6.1 円の極方程式

右の図のように、極を O とし、極 O を中心とする半径 a の円があります。このとき、円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、θ の値にかかわらず、点 P と極 O の距離は a で一定になるので、この円の極方程式は次のように表すことができます。



$$r = a$$

また、右の図のような中心が $(a,\ 0)$、半径が a の円においても、極を O とし、円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とします。点 B が $(2a,\ 0)$ であるとき OB は直径になるので、

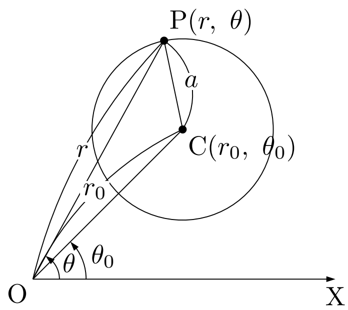


$$\angle\mathrm{OPB} = \frac{\pi}{2}$$

また、$\angle\mathrm{BOP} = \theta$, $\mathrm{OP} = \mathrm{OB}\cos\theta$ となるので、この円の極方程式を次のように表すことができます。

$$r = 2a\cos\theta$$

次に、右の図のような中心が $\mathrm{C}(r_0,\ \theta_0)$、半径が a の円においても、極を O とし、円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とします。このとき、



$$\mathrm{OC} = r_0, \quad \mathrm{CP} = a, \quad \mathrm{OP} = r, \quad \angle\mathrm{COP} = \theta - \theta_0$$

となるので、△OCP に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OP}^2 - 2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OP}\cos(\theta-\theta_0)\\ a^2 &= {r_0}^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta-\theta_0)\end{aligned}$$

よって、この円の極方程式は次のように表すことができます。

$$r^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0) + {r_0}^2 = a^2$$

【例題 6 − 1】

次の図形の極方程式を求めなさい。

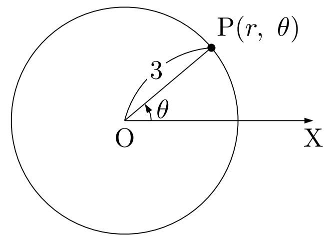
(1) 極 O を中心とする半径 3 の円

(2) 中心 C の極座標が (2, 0) で、半径が 2 である円

(3) 中心 C の極座標が $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ で、半径が 2 である円

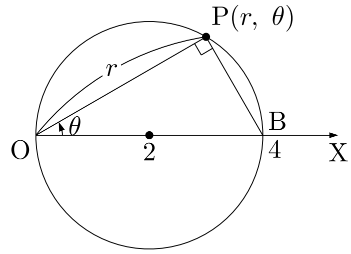
<解説>

(1) 円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、θ の値にかかわらず、点 P と極 O の距離は 3 で一定になるので、この円の極方程式は次のように表すことができます。



$$r = 3$$

(2) 極を O とし、円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とします。点 B を (4, 0) とすると OB は直径になるので、



$$\angle\mathrm{OPB} = \frac{\pi}{2}$$

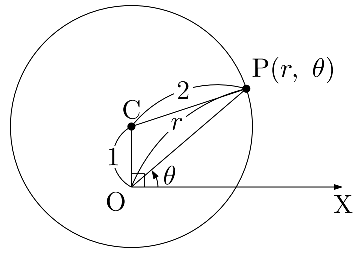
また、$\angle\mathrm{BOP} = \theta$, $\mathrm{OP} = \mathrm{OB}\cos\theta$ となるので、この円の極方程式を次のように表すことができます。

$$r = 4\cos\theta$$

(3) 極を O とし、円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とします。このとき、

$$\mathrm{OC} = 1, \quad \mathrm{CP} = 2, \quad \mathrm{OP} = r, \quad \angle\mathrm{COP} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

となるので、△OPC に余弦定理を用いると、



$$\mathrm{CP}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OP}^2 - 2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OP}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$2^2 = 1^2 + r^2 - 2\cdot 1\cdot r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

よって、この円の極方程式は次のように表すことができます。

$$r^2 - 2r\sin\theta - 3 = 0$$

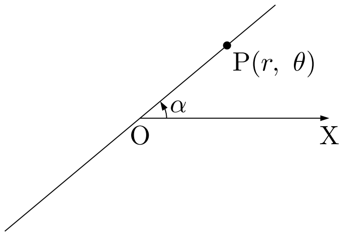
【演習 6 − 1】

次の図形の極方程式を求めなさい。

(1) 中心 C の極座標が $\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ で、半径が 2 である円

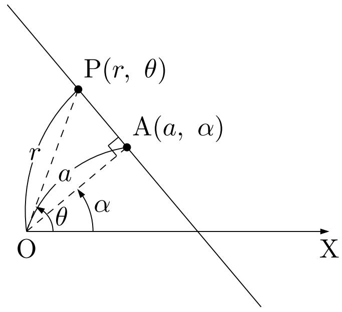
(2) 中心 C の極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ で、極 O を通る円

6.2 直線の極方程式



右の図のように、極 O を通り、始線と α の角をなす直線があります。このとき、直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、r の値にかかわらず、$\angle$POX は α で一定になるので、この直線の極方程式は次のように表すことができます。

$$\theta = \alpha$$



また、右の図のように極を O とし、点 A$(a,\ \alpha)$ を通り、OA に垂直な直線があります。直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、$\triangle$OAP において、$\angle \mathrm{PAO} = \dfrac{\pi}{2}$ となることから、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}$$

このとき、

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OP} = r, \quad \angle\mathrm{AOP} = \theta - \alpha$$

となるので、この直線の極方程式は次のように表すことができます。

$$r\cos(\theta - \alpha) = a \quad (a > 0)$$

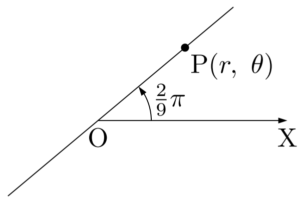
【例題 6 − 2】

極を O とするとき、次の直線の極方程式を求めなさい。

(1) 極 O を通り、始線とのなす角が $\dfrac{2}{9}\pi$ の直線

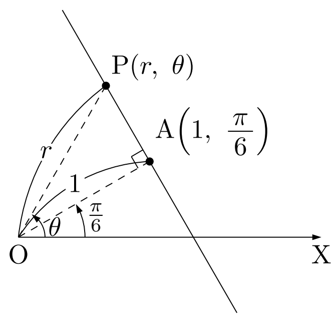
(2) 極座標が $\left(1,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ である点 A を通り、直線 OA に垂直な直線

＜解説＞



(1) 直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、r の値にかかわらず、$\angle$POX は $\dfrac{2}{9}\pi$ で一定になるので、求める直線の極方程式は次のように表すことができます。

$$\theta = \frac{2}{9}\pi$$



(2) 直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると、$\triangle$OAP において、$\angle\mathrm{PAO} = \dfrac{\pi}{2}$ となることから、

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}$$

このとき、

$$\mathrm{OA} = 1, \quad \mathrm{OP} = r, \quad \angle\mathrm{AOP} = \theta - \frac{\pi}{6}$$

となるので、求める直線の極方程式は次のように表すことができます。

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

【演習 6 − 2】

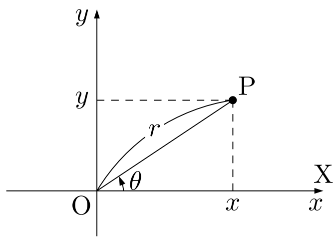
極を O とするとき、次の直線の極方程式を求めなさい。

(1) 極 O を通り、始線とのなす角が $-\dfrac{\pi}{3}$ の直線

(2) 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ である点 A を通り、始線に平行な直線

6.3 直交座標と極方程式

点 P の直交座標を $(x,\ y)$、極座標を $(r,\ \theta)$ とし、直交座標の原点 O と極座標の極 O、x 軸の正の部分と始線 OX を一致させると右図のように表され、次の関係が成り立ちます。



(i) $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$
(ii) $r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r},\quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$　（ただし、$r \neq 0$）

そのことから、(i) の関係を用いることで x, y で表された方程式を極方程式に、また、(ii) の関係を用いることで極方程式を x, y で表された方程式に変換することができます。

【例題 6 − 3】

(1) 次の方程式の表す曲線を、極方程式で表しなさい。
（ア） $2x - 3y = 5$　　（イ） $y = 2x^2$

(2) 次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表しなさい。
（ア） $r = -\dfrac{2}{\sin\theta}$　　（イ） $r = 2\sin\theta$

＜解説＞

(1) 曲線上の点 $P(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とします。

（ア） $2x - 3y = 5$ に $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入して、

$$2r\cos\theta - 3r\sin\theta = 5$$
$$r(2\cos\theta - 3\sin\theta) = 5$$

（イ） $y = 2x^2$ に $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入して、

$$r\sin\theta = 2(r\cos\theta)^2$$
$$2r^2\cos^2\theta - r\sin\theta = 0$$
$$r(2r\cos^2\theta - \sin\theta) = 0$$

よって、

$$r = 0 \quad \text{または} \quad 2r\cos^2\theta = \sin\theta$$

$2r\cos^2\theta = \sin\theta$ は、$\sin\theta = 0$ のとき $r = 0$ となるので、$r = 0$ は $2r\cos^2\theta = \sin\theta$ に含まれます。
このことから、求める極方程式は、

$$2r\cos^2\theta = \sin\theta$$

(2) 曲線上の点 $P(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とします。

（ア） $r = -\dfrac{2}{\sin\theta}$ より、

$$r\sin\theta = -2$$

この式に $r\sin\theta = y$ を代入して、

$$y = -2$$

（イ）r は $r^2 = x^2 + y^2$、$\sin\theta$, $\cos\theta$ は $r\sin\theta = y$, $r\cos\theta = x$ により、それぞれ x, y で表すことができるので、まず、$r = 2\sin\theta$ の両辺に r を掛けて、

$$r^2 = 2r\sin\theta$$

この式に $r^2 = x^2 + y^2$, $r\sin\theta = y$ を代入して、

$$x^2 + y^2 = 2y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

【演習 6 − 3】

(1) 次の方程式の表す曲線を、極方程式で表しなさい。

（ア）$5x^2 + y^2 = 1$　　（イ）$(x-3)^2 + y^2 = 9$

(2) 次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表しなさい。

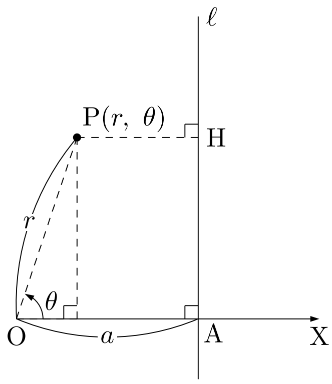
（ア）$r\cos^2\theta = \sin\theta$　　（イ）$r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$

6.4 2 次曲線の極方程式

右の図のように、極を O とし、点 A と点 P の極座標をそれぞれ $(a,\ 0)$, $(r,\ \theta)$、A を通り始線 OX に垂直な直線を ℓ、点 P から直線 ℓ に引いた垂線を PH とします。このとき、

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = e : 1 \quad (e \text{ は正の定数}) \cdots\cdots ①$$

を満たす点 P の軌跡は、点 O を 1 つの焦点とする 2 次曲線になり、直線 ℓ が準線、e は 2 次曲線の離心率になります。



ここで、この 2 次曲線の極方程式を考えてみると、

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{PH} = a - r\cos\theta$$

となるので、①より次のように表すことができます。

$$\begin{aligned} \mathrm{OP} &= e\mathrm{PH} \\ r &= e(a - r\cos\theta) \\ r(1 + e\cos\theta) &= ea \\ r &= \frac{ea}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

【例題 6 − 4】

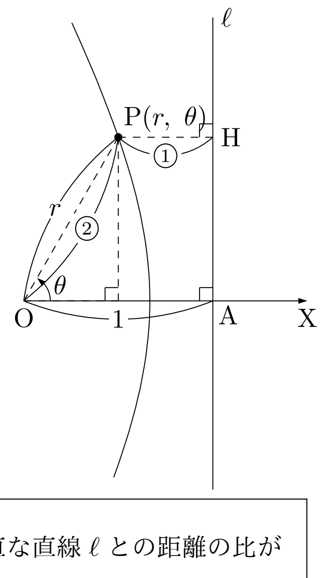
点 A の極座標を $(1,\ 0)$ とします。極 O との距離と、A を通り始線に垂直な直線 ℓ との距離の比が $2 : 1$ であるような点 P が描く曲線の極方程式を求めなさい。

<解説>

右の図のように、点 P の極座標を $(r,\ \theta)$、点 P から直線 ℓ に引いた垂線を PH とします。このとき、

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{PH} = 1 - r\cos\theta$$

で、$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = 2 : 1$ となるので、求める極方程式は次のようになります。



$$\begin{aligned} \mathrm{OP} &= 2\mathrm{PH} \\ r &= 2(1 - r\cos\theta) \\ r(1 + 2\cos\theta) &= 2 \\ r &= \frac{2}{1 + 2\cos\theta} \end{aligned}$$

【例題 6 − 4】

(1) 点 A の極座標を $(1,\ 0)$ とします。極 O との距離と、A を通り始線に垂直な直線 ℓ との距離の比が $1 : 2$ であるような点 P が描く曲線の極方程式を求めなさい。

(2) 点 A の極座標を $(4,\ 0)$ とします。極 O との距離と、A を通り始線に垂直な直線 ℓ との距離が等しい点 P が描く曲線の極方程式を求めなさい。