【数学 III】複素数平面

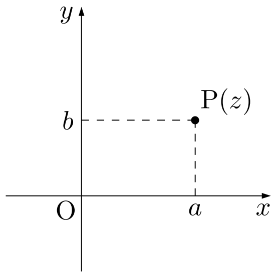
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　複素数平面

1.1　複素数平面上の点



複素数 $z = a + b\,i$（$a,\ b$ は実数、i は虚数単位）を座標平面上の点 $(a,\ b)$ に対応させることで、すべての複素数を座標平面上の点で表すことができます。このとき、この座標平面を**複素数平面（複素平面）**といい、x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**といいます。

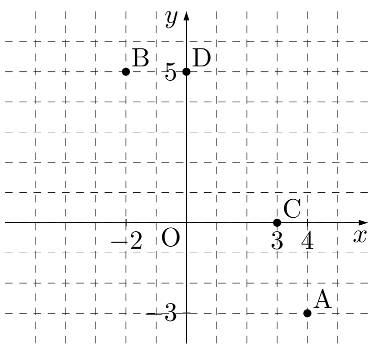
また、複素数 z に対応する複素数平面上の点 P を、P(z) や点 z と表します。

【例題 1 − 1】

次の各点を複素数平面上に図示しなさい。

(1) A$(4-3\,i)$　(2) B$(-2+5\,i)$　(3) C(3)　(4) D$(5i)$

＜解説＞



複素数を、複素数平面上では (実部, 虚部) という点で表されます。このとき、実数 a や純虚数 bi は、

$$a = a + 0\,i,\qquad bi = 0 + b\,i$$

のような複素数であると考え、それぞれ複素数平面上では、次のような点で表されます。

$$\text{実数 } a \longrightarrow (a,\ 0),\qquad \text{純虚数 } bi \longrightarrow (0,\ b)$$

このことから、実部と虚部を読み取ることで、それぞれの複素数は複素数平面上で次の点を表すので、右図のように図示することができます。

(1) $4-3\,i \longrightarrow (4,\ -3)$　(2) $-2+5\,i \longrightarrow (-2,\ 5)$　(3) $3 = 3+0\,i \longrightarrow (3,\ 0)$　(4) $5i = 0+5\,i \longrightarrow (0,\ 5)$

【演習 1 − 1】

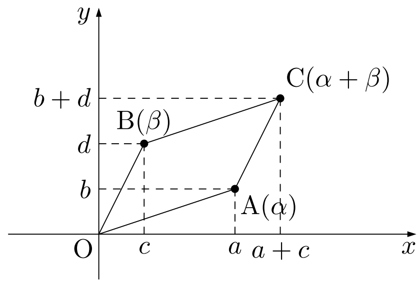
次の各点を複素数平面上に図示しなさい。

(1) A(-1)　(2) B$(-i)$　(3) C$(2-3\,i)$　(4) D$(5+i)$

1.2 複素数の和と差

$\alpha = a + b\,i,\ \beta = c + d\,i$ とすると、2 つの複素数 α と β の和 $\alpha + \beta$ は、

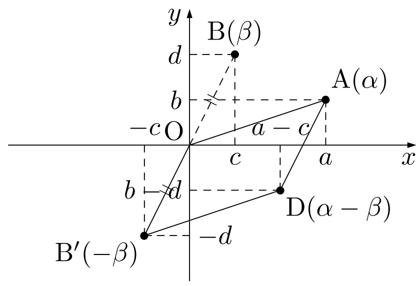
$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + b\,i) + (c + d\,i)\\ &= (a + c) + (b + d)\,i\end{aligned}$$



このとき、A(α), B(β), C($\alpha + \beta$) の表す点を複素数平面上に図示すると右図のようになり、3 点 O(0), A(α), B(β) が一直線上にないとき、点 C($\alpha + \beta$) は、線分 OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の頂点になります。

2 つの複素数 α と β の差 $\alpha - \beta$ では、

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= (a + b\,i) - (c + d\,i)\\ &= (a - c) + (b - d)\,i\end{aligned}$$



となりますが、

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

と考えることができるので、B′($-\beta$) とすると、D($\alpha - \beta$) の表す点は、3 点 O(0), A(α), B′($-\beta$) が一直線上にないとき、線分 OA, OB′ を 2 辺とする平行四辺形の頂点になります。

次のように、ベクトルの和や差を求めるときにも平行四辺形は利用されることから、複素数の和と差は、ベクトルの和と差と同様に扱うことができます。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

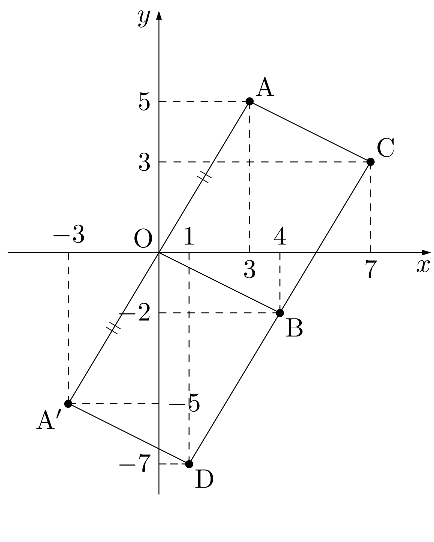
【例題 1 − 2】

$\alpha = 3 + 5\,i,\ \beta = 4 - 2\,i$ のとき、A(α), B(β), C($\alpha + \beta$), D($\beta - \alpha$) を複素数平面上に図示しなさい。

＜解説＞

複素数 α, β の和 $\alpha + \beta$ と差 $\beta - \alpha$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (3 + 5\,i) + (4 - 2\,i)\\ &= 7 + 3\,i\\ \beta - \alpha &= (4 - 2\,i) - (3 + 5\,i)\\ &= 1 - 7\,i\end{aligned}$$



となるので、複素数平面上での各点は次のように表され、右図のように図示することができます。

A $(3 + 5\,i) \longrightarrow (3,\ 5)$	B $(4 - 2\,i) \longrightarrow (4,\ -2)$
C $(7 + 3\,i) \longrightarrow (7,\ 3)$	D $(1 - 7\,i) \longrightarrow (1,\ -7)$

このとき、点 C は、線分 OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の頂点、点 D は、原点における点 A の対称な点を A′ とすると、線分 OA′, OB を 2 辺とする平行四辺形の頂点になります。

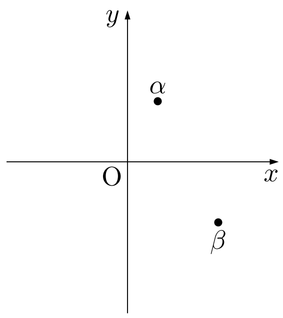
また、次のようなベクトルの演算と同じ関係になっています。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

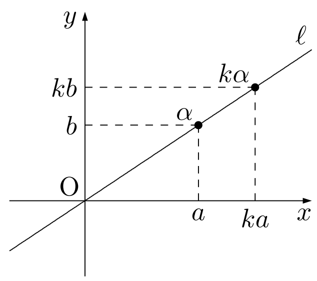
【演習 1 − 2】

右の図のような点で示される 2 つの複素数 α, β に対して、次の式の示す点を作図しなさい。

(1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha - \beta$



1.3　複素数の実数倍



複素数 $\alpha = a + b\,i$ と実数 k に対して、実数倍 $k\alpha$ は、

$$k\alpha = ka + kb\,i$$

となり、複素数平面上の $(ka,\ kb)$ という点を表します。このとき、

$$\frac{kb}{ka} = \frac{b}{a}$$

であるので、$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は 2 点 $0,\ \alpha$ を通る直線 ℓ 上にあり、逆に、直線 ℓ 上のすべての点は、α の実数倍の複素数で表すことができます。

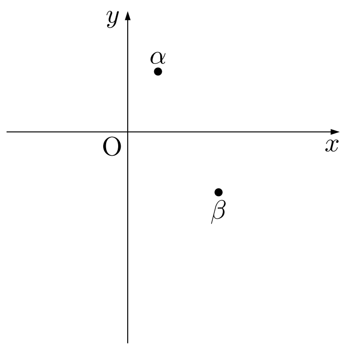
また、ベクトルの実数倍においても、次のように表される点 P は 2 点 O, A を通る直線上の点を表します。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

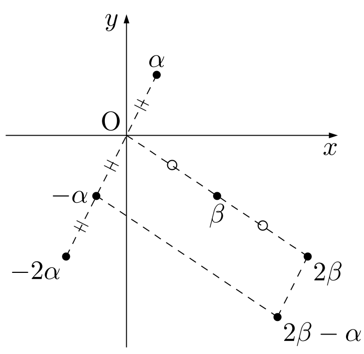
【例題 1 − 3】

右の図のような点で示される 2 つの複素数 $\alpha,\ \beta$ に対して、次の式の示す点を作図しなさい。

(1) -2α　　(2) 2β　　(3) $2\beta - \alpha$



＜解説＞



複素数の実数倍も、ベクトルの実数倍と同様に扱うことができます。

(1) α の -2 倍なので、原点 O に対し点 α と対称にある点が $-\alpha$ で、その点と原点を結ぶ線分の長さの 2 倍の距離にある点になります。

(2) β の 2 倍なので、点 0 と β を結ぶ線分の長さの 2 倍の距離にある点になります。

(3) 点 0 と 2β を結ぶ線分と、点 0 と $-\alpha$ を結ぶ線分を 2 辺とする平行四辺形の頂点になります。

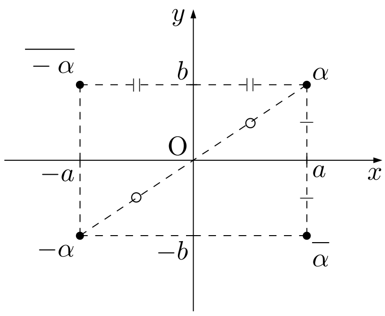
【演習 1 − 3】

点 $\mathrm{A}(1 - 2\,i)$ と原点 O、点 $\mathrm{B}(a + 3\,i)$ が同一直線上にあるとき、a の値を求めなさい。

1.4 共役複素数

複素数 $\alpha = a + b\,i$ に対し、虚部の符号を変えた複素数 $a - b\,i$ を**共役複素数**といい、$\overline{\alpha}$ で表します。また、このとき α と $\overline{\alpha}$ は**互いに共役**であるといいます。

$a > 0,\ b > 0$ であるとき、$\alpha = a + b\,i,\ \overline{\alpha},\ -\alpha,\ \overline{-\alpha}$ の表す点を複素数平面上に図示すると右図のようになり、各点は次のような関係が成り立ちます。



- 点 $\overline{\alpha}$ と点 α は実軸に関して対称
- 点 $\overline{-\alpha}$ と点 α は虚軸に関して対称
- 点 $-\alpha$ と点 α は原点に関して対称

また、2 つの複素数を $\alpha = a + b\,i,\ \beta = c + d\,i$ とするとき、共役複素数には次のような関係が成り立ちます。

(i) $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (a+b\,i)+(c+d\,i)\\ &= (a+c)+(b+d)\,i\\ \overline{\alpha+\beta} &= (a+c)-(b+d)\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}+\overline{\beta} &= (a-b\,i)+(c-d\,i)\\ &= (a+c)-(b+d)\,i\end{aligned}$$

よって、

$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

(ii) $\overline{\alpha-\beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

$$\begin{aligned}\alpha-\beta &= (a+b\,i)-(c+d\,i)\\ &= (a-c)+(b-d)\,i\\ \overline{\alpha-\beta} &= (a-c)-(b-d)\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}-\overline{\beta} &= (a-b\,i)-(c-d\,i)\\ &= (a-c)-(b-d)\,i\end{aligned}$$

よって、

$$\overline{\alpha-\beta} = \overline{\alpha}-\overline{\beta}$$

(iii) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\ \overline{\beta}$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a+b\,i)(c+d\,i)\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)\,i\\ \overline{\alpha\beta} &= (ac-bd)-(ad+bc)\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}\ \overline{\beta} &= (a-b\,i)(c-d\,i)\\ &= (ac-bd)-(ad+bc)\,i\end{aligned}$$

よって、

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\ \overline{\beta}$$

(iv) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{a+b\,i}{c+d\,i}\\ &= \frac{(a+b\,i)(c-d\,i)}{(c+d\,i)(c-d\,i)}\\ &= \frac{(ac+bd)-(ad-bc)\,i}{c^2+d^2}\\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\,i\\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} &= \frac{a-b\,i}{c-d\,i}\\ &= \frac{(a-b\,i)(c+d\,i)}{(c-d\,i)(c+d\,i)}\\ &= \frac{(ac+bd)+(ac-bd)\,i}{c^2+d^2}\\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\,i\end{aligned}$$

よって、

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

(v) $\alpha+\overline{\alpha}$ は実数

$$\alpha+\overline{\alpha} = (a+b\,i)+(a-b\,i) = 2a \quad (実数)$$

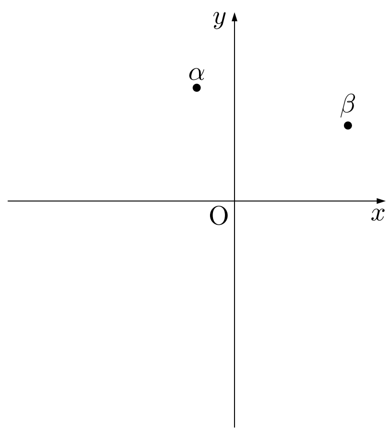
(vi) $\alpha\overline{\alpha}$ は実数

$$\alpha\overline{\alpha} = (a+b\,i)(a-b\,i) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 \quad （実数）$$

【例題 1 − 4】

右の図のような点で示される 2 つの複素数 α, β に対して、次の式の示す点を図示しなさい。

(1) $\overline{\alpha}$　　(2) $\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　(3) $\overline{\alpha-\beta}$



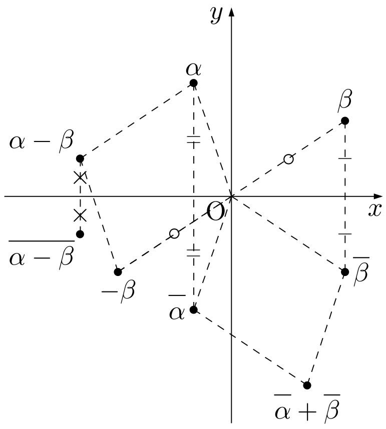
＜解説＞

互いに共役である複素数は、実軸に関して対称な点になることを利用します。

(1) 点 α と実軸に関して対称な点になります。

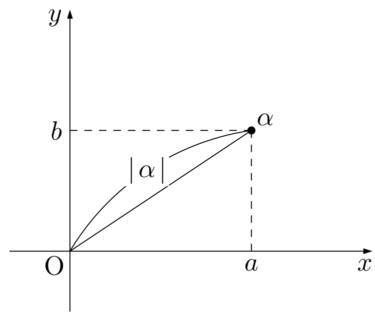
(2) 点 $\overline{\beta}$ は、実軸に関して点 β と対称な点になるので、$\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ の表す点は、原点と 2 点 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ を結ぶ線分を 2 辺とする平行四辺形の頂点になります。

(3) 点 $-\beta$ は、原点に関して点 β と対称な点になるので、点 $\alpha-\beta$ は、原点と 2 点 $\alpha, -\beta$ を結ぶ線分を 2 辺とする平行四辺形の頂点になり、点 $\overline{\alpha-\beta}$ は、その点と実軸に関して対称な点になります。



以上のことから右図のように図示することができます。

1.5　複素数の絶対値



複素数 $\alpha = a + b\,i$ に対し、点 α と原点との距離 $\sqrt{a^2+b^2}$ を、複素数 α の**絶対値**といい、複素数においても実数のときと同じように、次のように表します。

$$|\alpha| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2+b^2}$$

また、複素数の絶対値には次のような関係が成り立ちます。

(i) $|\alpha| \geqq 0$（等号成立は $\alpha = 0$）

$$|\alpha| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$$

等号成立は、

$a = b = 0$　つまり　$\alpha = 0$ のとき

(ii) $|\alpha| = |-\alpha| = |\overline{\alpha}|$

$$\begin{aligned} |-\alpha| &= |-a - b\,i| \\ &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{\alpha}| &= |a - b\,i| \\ &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} = |\alpha| \end{aligned}$$

よって、

$$|\alpha| = |-\alpha| = |\overline{\alpha}|$$

(iii) $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha} &= (a + b\,i)(a - b\,i) \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 = |\alpha|^2 \end{aligned}$$

(iv) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta|^2 &= \alpha\beta(\overline{\alpha\beta}) \\ &= \alpha\beta\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \\ &= (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta}) \\ &= |\alpha|^2|\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \end{aligned}$$

このとき、$|\alpha\beta| \geqq 0,\ |\alpha||\beta| \geqq 0$ であるので、

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$$

(v) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

(iv) の式において、α を $\dfrac{\alpha}{\beta}$ とすると、

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right||\beta|$$
$$|\alpha| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right||\beta|$$

両辺を $|\beta|$ で割れば、

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

【例題 1 − 5】

次の複素数の絶対値を求めなさい。

(1) $|-5i|$　(2) $|-1+2\,i|$　(3) $|4-2\,i|$　(4) $\left|\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\,i\right|$

＜解説＞

公式にあてはめれば求めることができますが、複素数平面上における原点からの距離を求めていることを意識することが大切です。

(1) $|-5i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$　(2) $|-1+2\,i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

(3) $|4-2\,i| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$　(4) $\left|\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\,i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = 1$

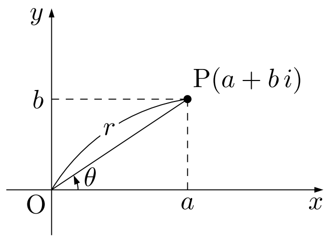
【演習 1 − 5】

(1) $|x-3\,i| = 5$ となるように正の実数 x の値を定めなさい。

(2) $|-5+y\,i| = 13$ となるように負の実数 y の値を定めなさい。

2 極形式

2.1 複素数の極形式



複素数平面上で、0 でない複素数 $z=a+b\,i$ を表す点を P とします。このとき、OP $=r$、線分 OP が実軸の正の部分となす角を θ とすると、

$$r=|\,z\,|=\sqrt{a^2+b^2},\qquad a=r\cos\theta,\qquad b=r\sin\theta$$

となることから複素数 z は、

$$\begin{aligned} z&=a+b\,i=r\cos\theta+ir\sin\theta\\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)\end{aligned}$$

と表すことができ、これを、複素数 z の**極形式**といいます。また、θ を複素数 z の**偏角**といい、偏角を表す「argument」を用いて、

複素数 z の偏角：$\arg z$

と表します。ただし、偏角 θ は、負の角（実軸の正の部分から時計回りの角の大きさ）や 2π よりも大きな角（原点の周りを何周かしたときの角の大きさ）でも表すことができるので、一般に次のようにして表されます。（ただし、このテキストでは、特に断り書きがない場合、偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えます。）

$\arg z=\theta+2n\pi$ （n は整数）

【例題 2 − 1】

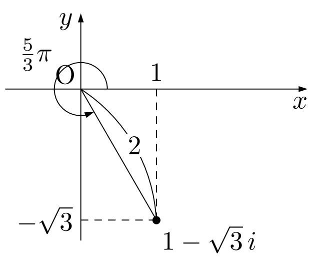
次の複素数を極形式で表しなさい。ただし、偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とします。

(1) $1-\sqrt{3}\,i$　　(2) $\sqrt{3}+i$　　(3) $2i$　　(4) 3

＜解説＞

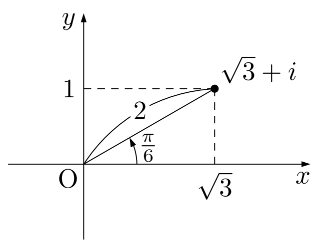
複素数平面上に、それぞれの複素数の表す点を図示すると考えやすくなります。

(1)



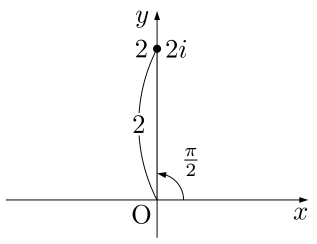
$$1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

(2)



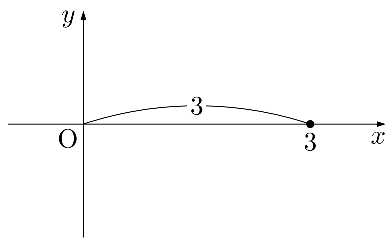
$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(3)



$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

(4)



$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$$

【演習 2 − 1】

次の複素数を極形式で表しなさい。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とします。

(1) $-1+i$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　　(3) -3　　(4) i

2.2 複素数の積

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $r_1 > 0$, $r_2 >$ とします。このとき、複素数の積 z_1z_2 は、三角関数の加法定理を利用して、次のように表すことができます。

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

このとき、

$$|\,z_1\,| = r_1, \qquad |\,z_2\,| = r_2, \qquad \arg z_1 = \theta_1, \qquad \arg z_2 = \theta_2$$

であるので、次の関係が成り立ちます。

$$|\,z_1z_2\,| = r_1r_2 = |\,z_1\,||\,z_2\,|, \qquad \arg z_1z_2 = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

- 絶対値：2 つの複素数の絶対値の積
- 偏角：2 つの複素数の偏角の和

【例題 2 − 2】

次の各複素数 α, β の積 $\alpha\beta$ を求めなさい。

(1) $\alpha = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\beta = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $\alpha = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$, $\beta = \cos\dfrac{2}{9}\pi + i\sin\dfrac{2}{9}\pi$

<解説>

(1)
$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 3\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right\} \\ &= 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 6(0+i) = 6i \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 5\left\{\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\pi\right)\right\} \\ &= 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

【演習 2 − 2】

2 つの複素数 α, β について、$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta = 2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi + i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$ とします。このとき、次の条件を満たす r, θ を求めなさい。

(1) $\alpha\beta = -2$

(2) $\alpha\beta = -1 - i$

2.3 複素数の商

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $r_1 > 0$, $r_2 >$ とします。このとき、複素数の商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は、複素数の積を利用して、次のように表すことができます。

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\{\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\}}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}\end{aligned}$$

このとき、

$$|\,z_1\,| = r_1, \qquad |\,z_2\,| = r_2, \qquad \arg z_1 = \theta_1, \qquad \arg z_2 = \theta_2$$

であるので、次の関係が成り立ちます。

$$\left|\,\frac{z_1}{z_2}\,\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

- 絶対値：2 つの複素数の絶対値の商
- 偏角：2 つの複素数の偏角の差

【例題 2 − 3】

次の各複素数 α, β の商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めなさい。

(1) $\alpha = 10\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $\beta = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\alpha = 5\left(\cos\dfrac{7}{18}\pi + i\sin\dfrac{7}{18}\pi\right)$, $\beta = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{18} + i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)$

＜解説＞

(1) $$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{10}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5(0 + i) = 5i\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5}{3}\left\{\cos\left(\frac{7}{18}\pi - \frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{7}{18}\pi - \frac{\pi}{18}\right)\right\} \\ &= \frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i\end{aligned}$$

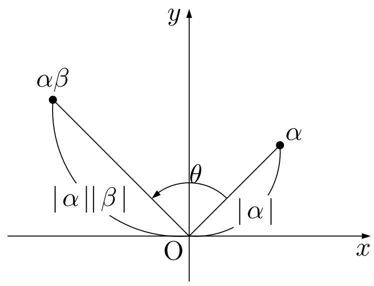
【演習 2 − 3】

2 つの複素数 α, β について、$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta = -\sqrt{3} + i$ とします。このとき、次の条件を満たす r, θ の値を求めなさい。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha} = -1 + \sqrt{3}\,i$　　(2) $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1 + \sqrt{3}\,i$

2.4　複素数の積と図形

極形式で表されている複素数の積は、次の関係が成り立ちます。



- 絶対値：2 つの複素数の絶対値の積
- 偏角：2 つの複素数の偏角の和

このことから、複素数 α に偏角が θ である複素数 β を掛けると、

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \qquad \arg\alpha\beta = \arg\alpha + \arg\beta = \arg\alpha + \theta$$

となるので、点 $\alpha\beta$ は、点 α を原点の周りに θ だけ回転し、原点からの距離を $|\beta|$ 倍に拡大（縮小）した点になります。

【例題 2 − 4】

複素数平面上で、$\alpha = -3 + i,\ \beta = 2 - 3i$ を表す点を、それぞれ A, B とするとき、次の点を表す複素数を求めなさい。

(1) 点 A を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点

(2) 点 B を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点

(3) 積 $\alpha\beta$ を表す点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点

＜解説＞

(1) 複素数 α に、絶対値が 1 で、偏角が $\dfrac{\pi}{6}$ である複素数を掛けて、

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-3+i)\\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\\ &= -\frac{3\sqrt{3}+1}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

(2) 複素数 β に、絶対値が 1 で、偏角が $-\dfrac{\pi}{2}$ である複素数を掛けて、

$$\begin{aligned}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\beta &= (-i)(2-3i)\\ &= -3 - 2i\end{aligned}$$

(3) 複素数 $\alpha\beta$ に、絶対値が 1 で、偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ である複素数を掛けて、

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha\beta &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+i)(2-3i)\\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+11i)\\ &= -\frac{3}{2} + \frac{11}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{11\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{3+11\sqrt{3}}{2} + \frac{11-3\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

【演習 2 − 4】

2 つの複素数 $\alpha = 6 - 2i,\ \beta = 1 - 3i$ について、次の問いに答えなさい。

(1) $\alpha\beta$ の極形式を求めなさい。

(2) 点 α を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させた点の示す複素数を求めなさい。

(3) 点 β を点 α のまわりに $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転させた点の示す複素数を求めなさい。

2.5 ド・モアブルの定理

極形式で表された 2 つの複素数 $\cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $\cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ の積は、

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

と表すことができ、$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とすれば、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

この両辺に $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛けると、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta\end{aligned}$$

となり、一般に、自然数 n に対し次の関係が成り立ちます。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cdots\cdots \text{①}$$

また、m が自然数であるとすると、$n = -m$ のとき、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}\\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}\\ &= \cos m\theta - i\sin m\theta\\ &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) = \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

となり、n が負の整数のときも①は成り立ち、さらに、$z^0 = 1$ と定めれば、$n = 0$ のときも①は成り立ちます。

以上のことから、すべての整数 n について①は成り立ち、これを**ド・モアブルの定理**といいます。

【例題 2 − 5】

次の計算をしなさい。

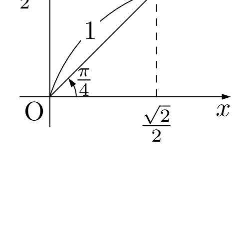
(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$　　(2) $(\sqrt{3} + i)^5$

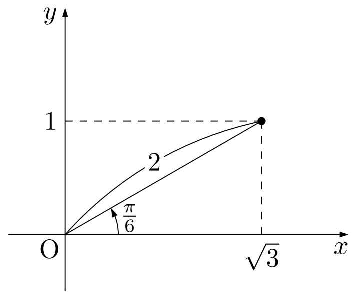
＜解説＞

複素数の累乗を計算するには、ド・モアブルの定理を利用します。ド・モアブルの定理は極形式に適用できるので、極形式で表されていない複素数は、まずは極形式で表します。

(1) 右図より、複素数を極形式で表して計算すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10} &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\times 10\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 10\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\end{aligned}$$





(2) 右図より、複素数を極形式で表して計算すると、

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^5 &= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^5 \\
&= 2^5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5 \\
&= 32\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\times 5\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 5\right)\right\} \\
&= 32\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \\
&= 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right) = -16\sqrt{3}+16\,i
\end{aligned}
$$

【演習 2 − 5】

次の計算をしなさい。

(1) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{12}$　　(2) $(1-\sqrt{3}\,i)^5$

2.6　1 の n 乗根

n を自然数とするとき、1 の n 乗根は、「n 乗すると 1 になる数」、つまり、方程式 $z^n = 1$ の解になります。このとき、$|z^n| = 1$ となるので、

$$|z|^n = 1$$

$|z| > 0$ より　$|z| = 1$

このことから、複素数 z を極形式で次のように表すことができます。

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

すると、方程式 $z^n = 1$ は、ド・モアブルの定理を利用して、次のように表すことができます。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = 1$$
$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos 0 + i\sin 0$$

よって、k を整数として、

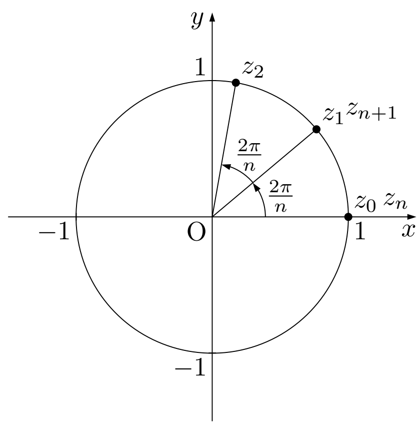
$$n\theta = 0 + 2\pi \times k$$
$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

ここで、

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

とすると、

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \times 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} \times 2\right)$$
$$\vdots$$
$$z_n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad (= z_0)$$
$$z_{n+1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \quad (= z_1)$$
$$\vdots$$



となり、それぞれの複素数の表す点は右図のように、単位円の円周を n 等分した点になります。このとき、z_{n+k} の偏角は、

$$\arg z_{n+k} = \frac{2(n+k)\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi = \arg z_k + 2\pi$$

となることから、

$$z_{n+k} = z_k$$

という関係が成り立つので、z_k のうち互いに異なるものは、$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にある次の n 個になります。

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1}$$

以上のことから、方程式 $z^n = 1$ の解（1 の n 乗根）は次のようになります。

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

【例題 2 − 6】

n を自然数とするとき、方程式 $z^4 = 1$ を解きなさい。

＜解説＞

次のようにして 1 の 4 乗根は求めることができます。

$$\begin{aligned} z^4 &= 1 \\ z^4 - 1 &= 0 \\ (z^2-1)(z^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

(i) $z^2 - 1 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} z^2 &= 1 \\ z &= \pm 1 \end{aligned}$$

(ii) $z^2 + 1 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} z^2 &= -1 \\ z &= \pm i \end{aligned}$$

よって、

$$z = \pm 1,\ \pm i$$

また、ド・モアブルの定理を利用すると、次のようにして求めることができます。

$z^4 = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} |z^4| &= 1 \\ |z|^4 &= 1 \\ |z| > 0 \text{ より} \quad |z| &= 1 \end{aligned}$$

このことから、$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = 1$$
$$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = \cos 0 + i\sin 0$$

となるので、k を整数として、

$$4\theta = 0 + 2k\pi$$
$$\theta = \frac{k\pi}{2}$$

また、$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$$0 \leqq \frac{k\pi}{2} < 2\pi$$
$$0 \leqq k < 4$$

より、$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ となるので、

(i) $k=0$ のとき：$\theta=0$

$$z=\cos 0+i\sin 0=1$$

(ii) $k=1$ のとき：$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

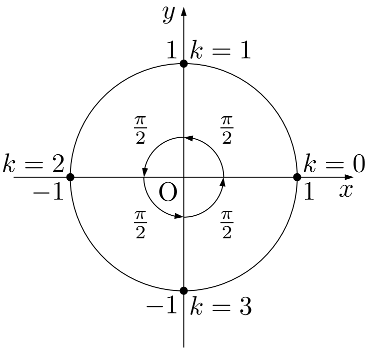
$$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

(iii) $k=2$ のとき：$\theta=\pi$

$$z=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

(iv) $k=3$ のとき：$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

$$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$



よって、

$$z=\pm1,\ \pm i$$

【演習 2 − 6】

1 の 6 乗根を求めなさい。

2.7　n 乗根

複素数 α の n 乗根、つまり、方程式 $z^n = \alpha$ の解は、複素数 z を、

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

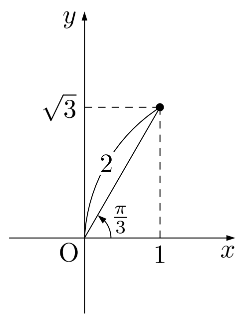
のように極形式で表し、ド・モアブルの定理を利用することで、「1 の n 乗根」と同じ手順で求めることができます。

【例題 2 − 7】

方程式 $z^2 = 2(1+\sqrt{3}\,i)$ を解きなさい。

<解説>

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると、



$$\begin{aligned} z^2 &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^2 \\ &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

また、

$$2(1+\sqrt{3}\,i) = 2\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と表せるので、$z^2 = 2(1+\sqrt{3}\,i)$ より、

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

このことから、

$$r^2 = 4, \qquad 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ より} \quad r = 2, \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では、

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) < 2\pi \\ -\frac{1}{6} &\leqq k < \frac{11}{6} \end{aligned}$$

より、$k = 0,\ 1$ であるので、

(i) $k = 0$ のとき：$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

(ii) $k = 1$ のとき：$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$

$$z = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i$$

よって、求める解は、

$$z = \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} - i$$

【演習 2 − 7】

次の方程式を解きなさい。

(1) $z^3 = i$

(2) $z^4 = -8(1 - \sqrt{3}\,i)$

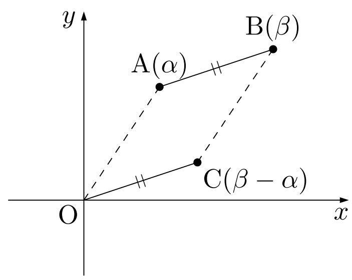
3　図形と複素数

3.1　2 点間の距離

右の図のように、複素数平面上に 2 点 A(α), B(β) があり、線分 AB の点 A を原点に平行移動させます。すると、点 B は点 C に平行移動され、点 C を表す複素数は、

$$\beta - \alpha$$

となります。このとき、AB = OC であるので、2 点 A(α), B(β) 間の距離 AB は、次のように表すことができます。



$$\mathrm{AB} = \mathrm{OC} = |\,\beta - \alpha\,|$$

【例題 3 − 1】

次の 2 点間の距離を求めなさい。

(1) $\alpha = 2 - i,\ \beta = 4$　　(2) $\alpha = 1 + 5\,i,\ \beta = -3 + 2\,i$　　(3) $\alpha = -1 + 2\,i,\ \beta = 2 - i$

<解説>

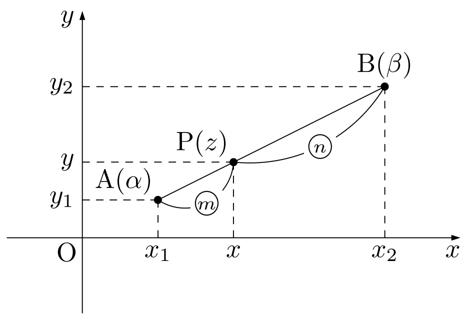
2 点間の距離を求める公式に当てはめて計算していきます。

(1) $$|\,\beta - \alpha\,| = |\,4 - (2 - i)\,| = |\,2 + i\,| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

(2) $$|\,\beta - \alpha\,| = |\,(-3 + 2\,i) - (1 + 5\,i)\,| = |\,-4 - 3\,i\,| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

(3) $$|\,\beta - \alpha\,| = |\,(2 - i) - (-1 + 2\,i)\,| = |\,3 - 3\,i\,| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

3.2 内分点・外分点



右図のように、$\alpha = x_1 + y_1\,i$, $\beta = x_2 + y_2\,i$, $z = x + y\,i$ とし、A(α), B(β) を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点を P(z) とすると、

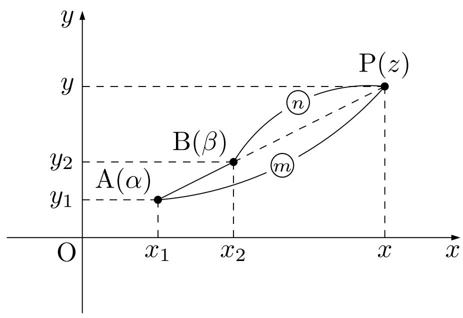
$$
\begin{aligned}
(x - x_1) : (x_2 - x) &= m : n \\
mx_2 - mx &= nx - nx_1 \\
(m+n)x &= nx_1 + mx_2 \\
x &= \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\
(y - y_1) : (y_2 - y) &= m : n \\
y &= \frac{ny_1 + my_2}{m+n}
\end{aligned}
$$

となるので、線分 AB を $m : n$ に内分する点を表す複素数は、次のように表すことができます。

$$
\begin{aligned}
z &= x + y\,i \\
&= \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} + \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\,i \\
&= \frac{n(x_1 + y_1\,i) + m(x_2 + y_2\,i)}{m+n} = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}
\end{aligned}
$$

特に、線分 AB の中点を表す複素数は、$m = n$ の場合を考えて、

$$
z = \frac{\alpha + \beta}{2}
$$



また、右図のように、A(α), B(β) を結ぶ線分 AB を $m : n$ ($m > n$) に外分する点を P(z) とすると、

$$
\begin{aligned}
(x - x_1) : (x - x_2) &= m : n \\
mx - mx_2 &= nx - nx_1 \\
(m-n)x &= -nx_1 + mx_2 \\
x &= \frac{-nx_1 + mx_2}{m-n} \\
(y - y_1) : (y - y_2) &= m : n \\
y &= \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}
\end{aligned}
$$

となり、$m < n$ となる場合も同様にして求められるので、、線分 AB を $m : n$ に外分する点を表す複素数は、次のように表すことができます。

$$
\begin{aligned}
z &= x + y\,i \\
&= \frac{-nx_1 + mx_2}{m-n} + \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\,i \\
&= \frac{-n(x_1 + y_1\,i) + m(x_2 + y_2\,i)}{m-n} = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}
\end{aligned}
$$

【例題 3 − 2】

複素数平面上で、3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC の重心を表す複素数 z は、

$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

であることを証明しなさい。

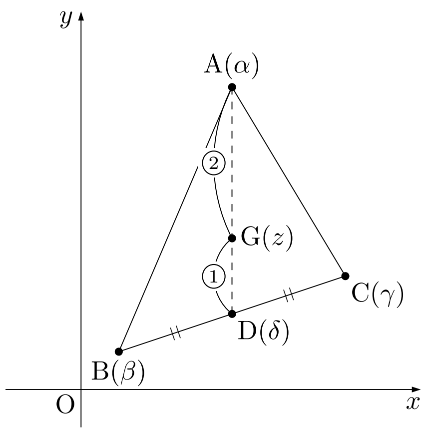
＜解説＞

右の図のように、辺 BC の中点を D(δ) とすると、

$$\delta = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

また、重心 G(z) は線分 AD を 2 : 1 に内分する点であるので、

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 \cdot \alpha + 2\delta}{2+1} \\ &= \frac{\alpha + 2 \cdot \dfrac{\beta + \gamma}{2}}{3} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \end{aligned}$$



【演習 3 − 2】

2 点 A($-2 + 5\,i$), B($4 - i$) について、次の点を表す複素数を求めなさい。

(1) 線分 AB の中点 C

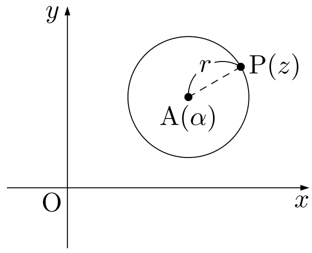
(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 D

(3) 線分 AB を 1 : 3 に外分する点 E

3.3 円の方程式

ある 1 点から等しい距離にある点の集まりが円になります。

複素数平面上で、方程式 $|z-\alpha|=r$ $(r>0)$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ は、点 $\mathrm{A}(\alpha)$ からの距離が r（一定）の点になるので、点 $\mathrm{P}(z)$ 全体は、点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とする半径 r の円を表します。



【例題 3 − 3】

複素数平面上で、次の方程式を満たす点 z 全体はどのような図形を表しますか。

(1) $|z+2|=2$　　(2) $|2z-2+i|=6$

＜解説＞

中心 α、半径 r の円である方程式は、

$$|z-\alpha|=r$$

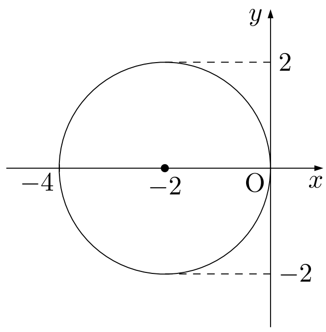
となるので、この式の形に変形します。

(1) 与えられた方程式は、

$$|z+2|=2$$
$$|z-(-2)|=2$$

となるので、点 z は定点 -2 からの距離が 2 で一定になるので、方程式を満たす点 z 全体の表す図形は、

点 -2 を中心とする半径 2 の円

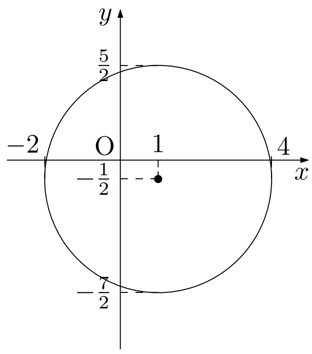


(2) 与えられた方程式は、

$$|2z-2+i|=6$$
$$\left|z-\left(1-\frac{1}{2}i\right)\right|=3$$

となるので、点 z は定点 $1-\dfrac{1}{2}i$ からの距離が 3 で一定になるので、方程式を満たす点 z 全体の表す図形は、

点 $1-\dfrac{1}{2}i$ を中心とする半径 3 の円



3.4　アポロニウスの円

$\alpha \fallingdotseq \beta$, $m>0$, $n>0$ のとき、

$$|z-\alpha|:|z-\beta|=m:n$$

つまり、

$$n|z-\alpha|=m|z-\beta|$$

という関係が成り立つと、点 P(z) 全体は 2 点 A(α), B(β) からの距離の比が $m:n$ である点の軌跡になります。このことから、線分 AB を $m:n$ に内分する点を C、外分する点を D とすると、点 P(z) 全体は、2 点 C, D を直径の両端とする円を表し、この円を**アポロニウスの円**といいます。

ただし、$m=n$ となるときは、

$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

と表され、点 P(z) は 2 点 A(α), B(β) から等距離にある点になるので、点 P(z) 全体は、線分 AB の垂直二等分線を表します。

【例題 3 − 4】

複素数平面上で、次の方程式を満たす点 z はどのような図形を表しますか。

(1) $|z+2|=2|z-1|$　　　　(2) $|z+2i|=|z-i|$

＜解説＞

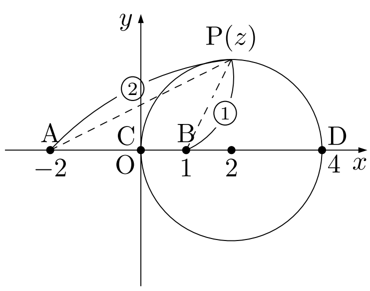
(1) $|z+2|=2|z-1|$ より、

$$|z-(-2)|:|z-1|=2:1$$

となるので、A(-2), B(1), P(z) とすると、

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

と表すことができ、点 P(z) 全体は、2 点 A, B からの距離の比が 2 : 1 である点の軌跡になります。そこで、線分 AB を 2 : 1 に内分する点を C(γ), 外分する点を D(δ) とすると、



$$\gamma=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1}{2+1}=0$$
$$\delta=\frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1}{2-1}=4$$

よって、点 P(z) 全体は、点 0 と点 4 を直径の両端とする円を表します。

また、$|z+2|=2|z-1|$ の両辺を 2 乗すると、

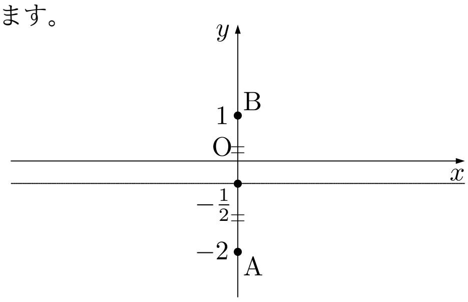
$$
\begin{aligned}
|z+2|^2 &= 4|z-1|^2 \\
(z+2)(\overline{z+2}) &= 4(z-1)(\overline{z-1}) \\
(z+2)(\overline{z}+2) &= 4(z-1)(\overline{z}-1) \\
z\overline{z}+2(z+\overline{z})+4 &= 4z\overline{z}-4(z+\overline{z})+4 \\
3z\overline{z}-6(z+\overline{z}) &= 0 \\
z\overline{z}-2(z+\overline{z}) &= 0 \\
z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4 &= 4 \\
(z-2)(\overline{z}-2) &= 4 \\
(z-2)(\overline{z-2}) &= 4 \\
|z-2|^2 &= 2^2 \\
|z-2| &= 2
\end{aligned}
$$

となるので、点 2 を中心とする半径 2 の円を表すことがわかります。

(2) $|z+2i|=|z-i|$ より、

$$|z-(-2i)|=|z-i|$$

となるので、A$(-2i)$, B(i), P(z) とすると、点 P は 2 点 A, B から等距離にある点を表すので、点 P(z) 全体は、2 点 A$(-2i)$, B(i) を結ぶ線分の垂直二等分線を表します。

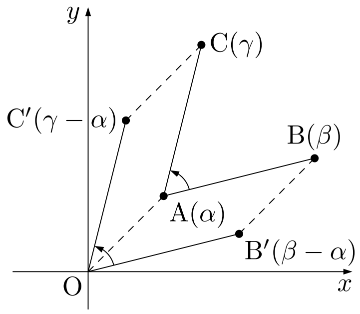


【例題 3 − 4】

複素数平面上で、次の方程式を満たす点 z はどのような図形を表しますか。

(1) $|3z+1|=|2z-1|$　　(2) $|z+1|=|z-i|$

3.5　三角形の角



複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ に対して、半直線 AB を点 A を中心として半直線 AC まで回転したときにできる角を $\angle\mathrm{BAC}$（$\angle\beta\alpha\gamma$）で表します。

このとき、右の図のように点 A が原点 O に移る平行移動によって、点 B は点 $\mathrm{B'}(\beta-\alpha)$、点 C は点 $\mathrm{C'}(\gamma-\alpha)$ に移るので、$\angle\mathrm{BAC}$（$\angle\beta\alpha\gamma$）は次のように表されます。

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B'OC'}$$

$$\angle\beta\alpha\gamma = \arg(\gamma-\alpha) - \arg(\beta-\alpha) = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

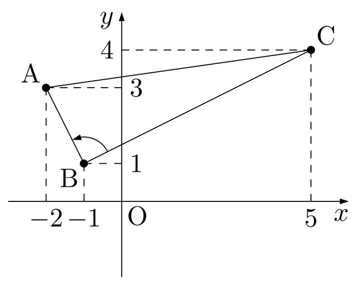
ただし、ここで表される角は、半直線の回転の向きを含めて考えているので、半直線 AB から半直線 AC へ回転する角の向きが反時計回りのときは正の角、時計回りのときは負の角になります。そのため、特に断りがないとき、$\angle\mathrm{BAC}$ は次の範囲で考えます。

$$-\pi < \angle\mathrm{BAC} \leqq \pi$$

【例題 3 − 5】

3 点 $\mathrm{A}(-2+3i)$, $\mathrm{B}(-1+i)$, $\mathrm{C}(5+4i)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について、$\angle\mathrm{CBA}$ の大きさを求めなさい。

＜解説＞



$\alpha=-2+3i$, $\beta=-1+i$, $\gamma=5+4i$ とすると、

$$\angle\mathrm{CBA} = \angle\gamma\beta\alpha = \arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} &= \frac{(-2+3i)-(-1+i)}{(5+4i)-(-1+i)}\\ &= \frac{-1+2i}{6+3i}\\ &= \frac{(-1+2i)(2-i)}{3(2+i)(2-i)}\\ &= \frac{5i}{3\cdot5} = \frac{1}{3}i\end{aligned}$$

このことから、この複素数を極形式（偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$）で表すと、

$$\frac{1}{3}i = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

となるので、$\angle\mathrm{CBA}$ の大きさは、

$$\angle\mathrm{CBA} = \arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\pi}{2}$$

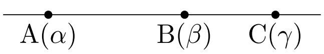
【演習 3 − 5】

3 点 $\mathrm{A}(-1+2i)$, $\mathrm{B}(1-2i)$, $\mathrm{C}(3+4i)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について、$\angle\mathrm{CBA}$ の大きさを求めなさい。

3.6 共線条件

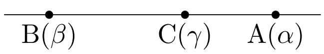
複素数平面上に異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が一直線上にあるとき、次のような場合が考えられます。

(i) 左から ABC（CBA）の順



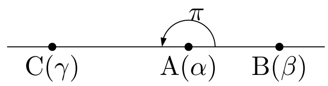
$\angle BAC = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 0$

(ii) 左から BCA（ACB）の順



$\angle BAC = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 0$

(iii) 左から CAB（BAC）の順



$\angle BAC = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \pi$

このとき、偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leqq \pi$ としたとき、それぞれの $\angle BAC$ の大きさは上のように表すことができるので、複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ をそれぞれ極形式で表すと次のようになります。

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = r_1(\cos 0 + i\sin 0)$
$= r_1$ （実数）

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = r_2(\cos 0 + i\sin 0)$
$= r_2$ （実数）

(iii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = r_3(\cos \pi + i\sin \pi)$
$= -r_3$ （実数）

このことから、3 点 A, B, C が一直線上にある条件（共線条件）は、次のようになります。

3 点 A, B, C が一直線上にある $\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数（偏角が 0, π）

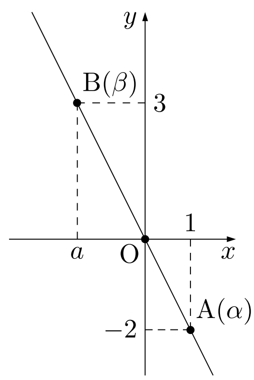
【例題 3 − 6】

原点 O、$A(1-2i)$、$B(a+3i)$ に対して、3 点 O, A, B が同一直線上にあるように、実数の定数 a の値を求めなさい。

<解説>

$\alpha = 1-2i$, $\beta = a+3i$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{a+3i}{1-2i}\\ &= \frac{(a+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\\ &= \frac{(a-6)+(2a+3)i}{5}\\ &= \frac{a-6}{5} + \frac{2a+3}{5}i \quad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$



3 点 O, A, B が同一直線上にあるとき、右図のように $\angle AOB = \arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \pi$ となるので、①の複素数 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数になります。よって、$\dfrac{2a+3}{5} = 0$ より、

$$a = -\frac{3}{2}$$

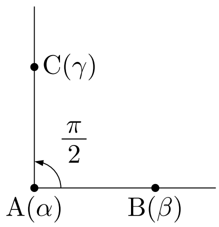
【演習 3 − 6】

$\alpha = 1-2i$, $\beta = -3+pi$, $\gamma = 3+i$ であるとき、α, β, γ の示す点が同一直線上にあるためには、p はどのような実数であればよいか求めなさい。

3.7 垂直条件

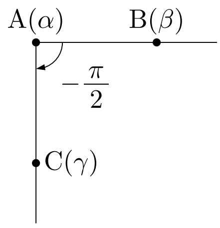
複素数平面上に異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ があり、$AB \perp AC$ であるとき、次のような場合が考えられます。

(i)



$$\angle BAC = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

(ii)



$$\angle BAC = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = -\frac{\pi}{2}$$

このとき、偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leqq \pi$ としたとき、それぞれの $\angle BAC$ の大きさは上のように表すことができるので、複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ をそれぞれ極形式で表すと次のようになります。

(i) $$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = r_1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = r_1 i \quad （純虚数）$$

(ii) $$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = r_2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -r_2 i \quad （純虚数）$$

このことから、$AB \perp AC$ となる条件（垂直条件）は、次のようになります。

$$AB \perp AC \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\text{ が純虚数}\left(\text{偏角が }\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

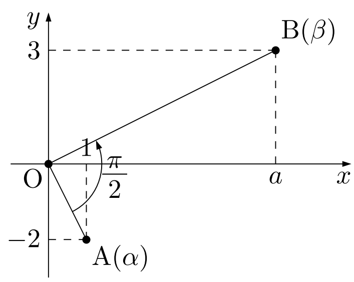
【例題 3 − 7】

原点 O、$A(1-2i)$、$B(a+3i)$ に対して、$OA \perp OB$ となるように、実数の定数 a の値を求めなさい。

＜解説＞

$\alpha = 1-2i$, $\beta = a+3i$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{a+3i}{1-2i}\\ &= \frac{(a+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\\ &= \frac{(a-6)+(2a+3)i}{5}\\ &= \frac{a-6}{5} + \frac{2a+3}{5}i \quad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$



$OA \perp OB$ であるとき、右図のように $\angle AOB = \arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\pi}{2}$ となるので、①の複素数 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数になります。よって、$\dfrac{a-6}{5} = 0$, $\dfrac{2a+3}{5} \neq 0$ より、

$$a = 6$$

【演習 3 − 7】

A$(1-2i)$, B$(-3+pi)$, C$(3+i)$ であるとき、次のことが成り立つように、実数 p の値を定めなさい。

(1) $\mathrm{AB} \perp \mathrm{AC}$　　(2) $\mathrm{AC} \perp \mathrm{BC}$