【数学 II】式と証明

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　3 次式の展開と因数分解

1.1　3 次式の展開

数学 I で 2 次式についての展開公式を学習しましたが、この単元では、3 次式の展開公式について学習します。

3 次式の展開公式も、2 次式の展開公式と同様にして、分配法則を利用して展開することで、公式を導出することができます。また、公式も文字式の形で覚えるのではなく、文章にして覚えておけば応用範囲が広がります。

(ｉ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,　　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \{a+(-b)\}^3 \\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

「(前、後ろ)^3 = 前 3 乗、3 倍の前 2 乗後ろ、3 倍の前後ろ 2 乗、後ろ 3 乗」

(ii) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$,　　$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) &= \{a+(-b)\}\{a^2 - a(-b) + (-b)^2\} \\ &= a^3 + (-b)^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

（前、後ろ）（前 2 乗、異符号の 2 数の積、後ろ 2 乗）= 前 3 乗、後ろ 3 乗

【例題 1 − 1】

次の式を展開しなさい。

(1) $(3x+2)^3$　　(2) $(4x-1)^3$

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$　　(4) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

＜解説＞

(1) 展開公式「$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$」に、

$$a = 3x, \qquad b = 2$$

としてあてはめれば（または、文章で覚えた公式にあてはめて）、

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2 + 3\cdot 3x\cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8\end{aligned}$$

(2) 展開公式「$a^3+3ab^2+3ab^2+b^3$」に、

$$a=4x, \qquad b=-1$$

としてあてはめれば（または、文章で覚えた公式にあてはめて）、

$$\begin{aligned}(4x-1)^3 &= (4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot(-1)+3\cdot 4x\cdot(-1)^2+(-1)^3\\ &= 64x^3-48x^2+12x-1\end{aligned}$$

(3) 展開公式「$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$」に、

$$a=x, \qquad b=1$$

としてあてはめれば（または、文章で覚えた公式にあてはめて）、

$$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$$

(4) 展開公式「$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$」に、

$$a=2x, \qquad b=-1$$

としてあてはめれば（または、文章で覚えた公式にあてはめて）、

$$\begin{aligned}(2x-1)(4x^2+2x+1) &= (2x-1)\{(2x)^2-2x\cdot(-1)+(-1)^2\}\\ &= (2x)^3+(-1)^3=8x^3-1\end{aligned}$$

展開公式を利用しなくても、分配法則を利用して地道に展開すれば、答えを求めることができますが、計算が面倒になってしまうので、公式を利用しながら覚えて使えるようにしてください。

1.2　3次式の因数分解

「因数分解」は、「式の展開」の逆の操作を行うことなので、3次式においても、因数分解の公式（右辺から左辺への変形）は展開の公式（左辺から右辺への変形）と同じものになります。

(ｉ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,　　　$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
(ii) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$,　　　$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

【例題1－2】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $8x^3 + 1$　　　　(2) $108a^3 - 4b^3$

＜解説＞

立方の和や差の形の式を因数分解するので、次の公式を利用して因数分解します。

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

また、因数分解を行う手順は、3次式においても、

① 共通因数があれば、共通因数でくくる。
② 公式を利用して因数分解する。

という手順になります。

(1) 共通因数があるかどうかチェックしてから公式を利用して因数分解を行います。

$$\begin{aligned} 8x^3 + 1 &= (2x)^3 + 1^3 \\ &= (2x+1)\{(2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2\} \\ &= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

(2) 共通因数があるので、まずは、共通因数でくくり出し、その後で公式を利用して因数分解を行います。

$$\begin{aligned} 108a^3 - 4b^3 &= 4(27a^3 - b^3) \\ &= 4\{(3a)^3 - b^3\} \\ &= 4(3a-b)\{(3a)^2 - 3a \cdot (-b) + (-b)^2\} \\ &= 4(3a-b)(9a^2 + 3ab + b^2) \end{aligned}$$

1.3　因数分解の工夫

次の 3 次式の因数分解の公式（展開公式）は、左辺が複雑な形になっているため、公式が利用できることに気付きにくいと思います。

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3, \qquad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

しかし、この式は項の組み合わせを工夫することで、因数分解の公式を利用しなくても、次のようにして因数分解することができます。

$$\begin{aligned}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &= (a^3+b^3)+(3a^2b+3ab^2)\\
&= (a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)\\
&= (a+b)(a^2-ab+b^2+3ab)\\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\
&= (a+b)(a+b)^2\\
&= (a+b)^3\\
a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 &= (a^3-b^3)+(-3a^2b+3ab^2)\\
&= (a-b)(a^2+ab+b^2)-3ab(a-b)\\
&= (a-b)(a^2+ab+b^2-3ab)\\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\
&= (a-b)(a-b)^2\\
&= (a-b)^3
\end{aligned}$$

【例題 1 − 3】

次の式を因数分解しなさい。

(1) a^6-6a^3-16　　(2) $x^3+6x^2+12x+8$　　(3) $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$

＜解説＞

(1) 2 次式の因数分解でもすでに学習しているように、$a^3=A$ と置き換えてあげれば、

$$\begin{aligned}
a^6-6a^3-16 &= A^2-6A-16\\
&= (A+2)(A-8)\\
&= (a^3+2)(a^3-8)\\
&= (a^3+2)(a-2)(a^2+2a+4)
\end{aligned}$$

慣れている人は、文字を置き換えることなく、かたまりをイメージして次のように因数分解してください。

$$\begin{aligned}
a^6-6a^3-16 &= (a^3)^2-6\cdot a^3-16\\
&= (a^3+2)(a^3-8)\\
&= (a^3+2)(a-2)(a^2+2a+4)
\end{aligned}$$

(2) 気づくことができる人は、公式にあてはめて因数分解してください。また、気づくことができなくても、項の組み合わせを工夫することで、次のように因数分解できます。

$$\begin{aligned}
x^3+6x^2+12x+8 &= (x^3+8)+(6x^2+12x)\\
&= (x+2)(x^2-2x+4)+6x(x+2)\\
&= (x+2)(x^2-2x+4+6x)\\
&= (x+2)(x^2+4x+4)\\
&= (x+2)(x+2)^2\\
&= (x+2)^3
\end{aligned}$$

(3) 気づくことができる人は、公式にあてはめて因数分解してください。また、気づくことができなくても、項の組み合わせを工夫することで、次のように因数分解できます。

$$\begin{aligned}
27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3 &= (27a^3-b^3)+(-27a^2b+9ab^2)\\
&= (3a-b)(9a^2+3ab+b^2)-9ab(3a-b)\\
&= (3a-b)(9a^2+3ab+b^2-9ab)\\
&= (3a-b)(9a^2-6ab+b^2)\\
&= (3a-b)(3a-b)^2\\
&= (3a-b)^3
\end{aligned}$$

2　二項定理

2.1　二項定理

乗法公式から、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

となりました。このようになることをもう少し詳しく考えてみたいと思います。

$(a+b)^2$ は項が 2 つの多項式どうしの積になるので、

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

のように、分配法則を利用して展開すると 4 つの項ができます。(「a^2」や「b^2」をあえて「aa」や「bb」と表しています。)

$$ab \text{ と } ba$$

は同類項であるのでまとめることができ、公式のように表すことができます。

同様に、$(a+b)^3$ は、

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb$$

のように、分配法則を利用して展開すると 8 つの項ができます。このとき、

$$aab \text{ と } aba \text{ と } baa, \quad abb \text{ と } bab \text{ と } bba$$

はそれぞれ同類項なのでまとめることができるのですが、この同類項の数というのは、

$a,\ a,\ b$ の 3 つの文字の並べ方：$aab,\quad aba,\quad baa$ の 3 通り

$a,\ b,\ b$ の 3 つの文字の並べ方：$abb,\quad bab,\quad bba$ の 3 通り

というように、項を構成している文字の並べ方の総数と同じだけあることに気づきます。

このことから一般に、$(a+b)^n$ を展開したとき、$a^{n-r}b^r$ の同類項は、「a」を $n-r$ 個、「b」を r 個並べたときの順列の総数と同じだけあるので、同じものを含む順列の公式より、

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} \text{（通り）}$$

だけあることになり、これが係数になるわけです。また、

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

より、$a^{n-r}b^r$ の係数は、

$${}_n\mathrm{C}_r$$

とも表すことができます。つまり、

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

のように表すことができ、これを**二項定理**といい、

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$

を、$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**、係数

$${}_n\mathrm{C}_0,\quad {}_n\mathrm{C}_1,\quad {}_n\mathrm{C}_2,\quad \cdots,\quad {}_n\mathrm{C}_r,\quad \cdots,\quad {}_n\mathrm{C}_n$$

を**二項係数**といいます。

【例題 2 − 1】

二項定理を使って、次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y)^4$　　(2) $(2x-y)^5$

＜解説＞

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

に、数や文字をあてはめて展開します。

(1) $a=x,\ b=2y,\ n=4$ とすると

$$\begin{aligned}(x+2y)^4 &= {}_4\mathrm{C}_0 x^4 + {}_4\mathrm{C}_1 x^3(2y) + {}_4\mathrm{C}_2 x^2(2y)^2 + {}_4\mathrm{C}_3 x(2y)^3 + {}_4\mathrm{C}_4(2y)^4 \\ &= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

(2) $a=2x,\ b=-y,\ n=5$ とすると

$$\begin{aligned}(2x-y)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0(2x)^5 + {}_5\mathrm{C}_1(2x)^4(-y) + {}_5\mathrm{C}_2(2x)^3(-y)^2 \\ &\qquad + {}_5\mathrm{C}_3(2x)^2(-y)^3 + {}_5\mathrm{C}_4(2x)(-y)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-y)^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5\end{aligned}$$

2.2 展開式の係数

【例題 2 − 2】

次の式の展開式における [　　] 内の項の係数を求めなさい。

(1) $(x-2y)^7$ 　$[x^4y^3]$ 　　　(2) $(x-2y)^5$ 　$[x^3y^2]$

＜解説＞

二項定理を利用して展開してもいいのですが、$(a+b)^n$ の展開式の一般項が

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

となることを利用します。

(1) $a=x,\ b=-2y,\ n=7$ とすると、$(x-2y)^7$ の展開式の一般項は、

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}(-2y)^r &= {}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}(-2)^r y^r \\ &= {}_7\mathrm{C}_r (-2)^r x^{7-r} y^r\end{aligned}$$

となります。よって、x^4y^3 の係数は、$r=3$ のときを考えて、

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_3(-2)^3 &= \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\times(-8) \\ &= -280\end{aligned}$$

(2) $a=x,\ b=-2y,\ n=5$ とすると、$(x-2y)^5$ の展開式の一般項は、

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2y)^r &= {}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2)^r y^r \\ &= {}_5\mathrm{C}_r (-2)^r x^{5-r} y^r\end{aligned}$$

となります。よって、x^3y^2 の係数は、$r=2$ のときを考えて、

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_2(-2)^2 &= \frac{5\cdot\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}\cdot 1}\times 4 \\ &= 40\end{aligned}$$

2.3 $(a+b+c)^n$ の展開式の係数

二項定理で学習したように、$(a+b)^n$ を展開したとき、$a^{n-r}b^r$ の同類項は、「a」を $n-r$ 個、「b」を r 個並べたときの順列の総数と同じだけありました。

$$\overbrace{\underbrace{aaa\cdots\cdots a}_{n-r\text{ 個}}\underbrace{bbb\cdots\cdots b}_{n\text{ 個}}}^{n\text{ 個}} \qquad \text{並べ方の総数：}\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}={}_n\mathrm{C}_r$$

$(a+b+c)^n$ と項の数が増えても同じように、この式を展開したとき、$a^pb^qc^r$ の同類項は、「a」を p 個、「b」を q 個、「c」を r 個並べたときの順列の総数と同じだけあることになり、その数は同じものを含む順列の公式から、 $p,\ q,\ r$ は 0 以上の整数で $p+q+r=n$ としたとき、次のように表されます。

$$\overbrace{\underbrace{aaa\cdots\cdots a}_{p\text{ 個}}\underbrace{bbb\cdots\cdots b}_{q\text{ 個}}\underbrace{ccc\cdots\cdots c}_{r\text{ 個}}}^{n\text{ 個}} \qquad \text{並べ方の総数：}\frac{n!}{p!q!r!}$$

つまり、$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ を含む項（一般項）は、

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \qquad \text{（ただし、}p,\ q,\ r\text{ は 0 以上の整数で }p+q+r=n\text{）}$$

と表されます。

【例題 2 − 3】

次の式の展開式における [　　] 内の項の係数を求めなさい。

(1) $(a+b+c)^4$ 　$[a^2bc]$ 　　(2) $(2x-y+3z)^6$ 　$[x^3y^2z]$

＜解説＞

(1) $(a+b+c)^4$ の展開式における a^2bc を含む項は、「$a,\ a,\ b,\ c$」という 4 つの文字を並べたときの順列の総数に等しいだけの同類項が存在するので、同じものを含む順列の公式から、

$$\begin{aligned}\frac{4!}{2!1!1!}a^2bc &= \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1}a^2bc\\ &= 12a^2bc\end{aligned}$$

よって、a^2bc の係数は 12 と求められます。

(2) $(2x-y+3z)^6$ の展開式における x^3y^2z を含む項は、「$2x,\ 2x,\ 2x,\ -y,\ -y,\ 3z$」という 6 つの文字を並べたときの順列の総数に等しいだけの同類項が存在するので、同じものを含む順列の公式から、

$$\begin{aligned}\frac{6!}{3!2!1!}(2x)^3(-y)^2(3z) &= \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot 1}\cdot 2^3\cdot(-1)^2\cdot 3x^3y^2z\\ &= 1440x^3y^2z\end{aligned}$$

よって、x^3y^2z の係数は 1440 と求められます。

3 整式の割り算

3.1 整式の割り算

整式は整数と似たような性質をもつ式なので、整数と同じように割り算を行うことができます。そこで、整数の割り算と比較しながら、整式の割り算について考えていきます。

例として、「$113 \div 9$」のような計算は、

$$
\begin{array}{r|r}
 & 12 \\ \cline{2-2}
9\,\big) & 113 \\
 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 23 \\
 & 18 \\ \cline{2-2}
 & 5
\end{array}
$$

のようにして、商を 12、余りが 5 と計算することができました。

「$(3x^2+4x-2)\div(x+5)$」という整式の割り算を行う場合、まずは、割られる式「$3x^2+4x-2$」と割る式「$x+5$」をそれぞれ降べきの順に整理し、整数の割り算と同じようにして縦書きの筆算で表します。このとき、もし欠けている次数の項があればその部分はスペースをあけておきます。

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3x & -11 & \\ \cline{2-4}
x+5\,\big) & 3x^2 & +4x & -2 \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -11x & -2 \\
 & & -11x & -55 \\ \cline{3-4}
 & & & 53
\end{array}
$$

次に割る式「$x+5$」の最大次数の項「x」に何を掛ければ割られる式「$3x^2+4x-2$」の最大次数の項「$3x^2$」になるのかを考え、「$3x$」を見つけます。そして、この「$3x$」を割られる式の上の部分に書き、「$(x+5)\times 3x$」を計算した結果を、割られる式の下側に書きます。このとき、割られる式と「$(x+5)\times 3x$」の計算結果の次数の項が揃うように縦に並べます。

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3x & -11 & \\ \cline{2-4}
x+5\,\big) & 3x^2 & +4x & -2 \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -11x & -2 \\
 & & -11x & -55 \\ \cline{3-4}
 & & & 53
\end{array}
$$

そうしたら、通常の割り算と同じように上下の式を引き算し、その結果を下に記します。こうすることで、

割られる式の最大次数の項「$3x^2$」を消すことができます。

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & & \\ \cline{2-4}
x+5 & 3x^2 & +4x & -2 \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -11x & -2
\end{array}
$$

また今度も同じように、割る式「$x+5$」の最大次数の項「x」に何を掛ければ引き算した結果の式「$-11x-2$」の最大次数の項「$-11x$」になるのかを考え、「-11」を見つけます。そして、この「-11」を一番上に書いた「$3x$」の隣に並べて書き、「$(x+5)\times(-11)$」を計算した結果を引き算した結果の式「$-11x-2$」の下側に、同じ次数の項が揃うように書きます。

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & -11 & \\ \cline{2-4}
x+5 & 3x^2 & +4x & -2 \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -11x & -2 \\
 & & -11x & -55 \\ \cline{3-4}
\end{array}
$$

そうしたら、上下の式を引き算しその結果をその下に記します

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & -11 & \\ \cline{2-4}
x+5 & 3x^2 & +4x & -2 \\
 & 3x^2 & +15x & \\ \cline{2-4}
 & & -11x & -2 \\
 & & -11x & -55 \\ \cline{3-4}
 & & & 53
\end{array}
$$

最後の行に現れた「53」は、割る式「$x+5$」よりも次数が低いので、これ以上計算を続けることができません。つまり、これで多項式の割り算が完了したことになります。そして、このとき、

商 : $3x-11$,　　**余り** : 53

となります。

このように、整式は整数のときと同様にして割り算を行うことができます。

【例題 3 − 1】

次の計算をし、商と余りを求めなさい。

(1) $(x^3-3x+2)\div(x+1)$　　(2) $(x^3+2x^2-x+1)\div(x-1)$

＜解説＞

(1) 割られる式「x^3-3x+2」には 2 次の項がないので、その部分にスペースをあけておくことを忘れないようにしてください。

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -x & -2 & \\ \hline
x+1 & x^3 & & -3x & +2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -3x & \\
 & & -x^2 & -x & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +2 \\
 & & & -2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 4
\end{array}
$$

商 : x^2-x-2,　　余り : 4

(2)

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +3x & +2 & \\ \hline
x-1 & x^3 & +2x^2 & -x & +1 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & -x & \\
 & & 3x^2 & -3x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +1 \\
 & & & 2x & -2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 3
\end{array}
$$

商 : x^2+3x+2,　　余り : 3

3.2 整式の除法と商・余り

小学校で学習したように、「$7 \div 2$」を計算すると、

$$7 \div 2 = 3 \cdots 1$$

となります。この割り算の答えの確認として、

$$2 \times 3 + 1$$

のような計算をし、答えの確かめを行うことができました。これは、

$$\text{割られる数} = \text{割る数} \times \text{商} + \text{余り}$$

という関係が成り立っています。

整式も整数と同じ様に考えることができ、多項式 A を多項式 B で割ったときに、商が Q、余りが R であったとすると、

$$A = BQ + R$$

のように、

$$\text{割られる式} = \text{割る式} \times \text{商} + \text{余り}$$

という関係が成り立ちます。ここで重要なのは、整数では余りが割る数よりも必ず小さくなったのと同様に、整式では余り R は割る式 B よりも低い次数になります。

また、$R = 0$、つまり、

$$A = BQ$$

となるとき、A は B で**割り切れる**といい、B は A の**因数**であるといいます。

【例題 3 − 2】

次の条件を満たす整式 A、B を求めなさい。

(1) A を $x - 2$ で割ると、商が $2x^2 + x + 2$ となり割り切れた。

(2) B を $x^2 + x - 1$ で割ると、商が $x^2 - 3x + 4$、余りが $-6x + 3$ となった。

＜解説＞

(1) 条件から

$$A = (x-2)(2x^2 + x + 2)$$

という関係が成り立つので、これを計算して

$$\begin{aligned} A &= (x-2)(2x^2 + x + 2) \\ &= 2x^3 + x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 4 \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

(2) 条件から

$$B = (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 4) - 6x + 3$$

という関係が成り立つので、これを計算して

$$\begin{aligned} B &= (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 4) - 6x + 3 \\ &= (x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x^3 - 3x^2 + 4x - x^2 + 3x - 4) - 6x + 3 \\ &= x^4 - 2x^3 + x - 1 \end{aligned}$$

4　分数式とその計算

4.1　分数式の約分

A を整式, B を 1 次以上の整式とするとき、$\dfrac{A}{B}$ の形の式を**分数式**といい、A を**分子**、B を**分母**といいます。

分数式 : $\dfrac{2}{x+1}$　　分数式でない : $\dfrac{x+1}{2}$　$\left(=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)$

分数式においても、分数と同じように、分子、分母に同じ整式を割ったりしても、もとの分数式と等しくなります。

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}\qquad (ただし、C\fallingdotseq 0)$$

これにより、分数式の分母と分子を共通因数で割ることで**約分**ができ、それ以上約分することのできない**既約分数式**の形に変形することができます。

$$\frac{A}{B}=\frac{DE}{DF}=\frac{DE\div D}{DF\div D}=\frac{E}{F}$$

【例題 4 − 1】

次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{21a^3b^2c}{35a^2bc^3}$　　(2) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$

<解説>

(1) 分子・分母が単項式になっているような分数式では、数は数、文字は文字どうし約分をして、

$$\frac{21a^3b^2c}{35a^2bc^3}=\frac{3ab}{5c^2}$$

(2) 分子・分母が多項式になっているような分数式では、因数分解をして、積の形で表してから約分します。

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{x^2-x-2}&=\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x-2)\cancel{(x+1)}}\\&=\frac{x^2-x+1}{x-2}\end{aligned}$$

4.2 分数式の乗法・除法

分数式の乗法では、分数の計算と同じように、分母どうし、分子どうしを計算します。

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

また、分数式の除法についても、分数の計算と同じように、割る式を逆数（分母、分子を逆にしたもの）にすることで、除法を乗法に直し、乗法の計算を行います。

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

【例題 4 − 2】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x-3}{(x+1)^2} \times \dfrac{x^2+x}{x^2-9}$ (2) $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6} \div \dfrac{x+1}{x-3}$

<解説>

分数の乗法では、掛け算を行う前にまずは通分をし、数を小さくしてから掛け算を行いました。分数式の乗法においても、先に掛け算を行うと式が複雑になってしまうので、まずは、約分を行います。そのため、分子・分母が多項式になっている場合には、因数分解を行うことになります。

(1) 分子・分母を因数分解してから計算します。

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{(x+1)^2} \times \frac{x^2+x}{x^2-9} &= \frac{\cancel{x-3}}{(x+1)\cancel{(x+1)}} \times \frac{x\cancel{(x+1)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} \\ &= \frac{x}{(x+1)(x+3)}\end{aligned}$$

(2) 除法は乗法に直して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^2-x-6} \div \frac{x+1}{x-3} &= \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+2)} \times \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x+1}} \\ &= \frac{x-1}{x+2}\end{aligned}$$

4.3 分数式の加法・減法

分数式では、分子、分母に同じ多項式を掛けても、もとの分数式と等しくなります。

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}$$

そのため、分母の異なっている分数式の分母、分子に適当な整式を掛けて、**通分**すること（分母を同じにすること）ができます。

$$\frac{A}{B} + \frac{D}{C} = \frac{AC}{BC} + \frac{BD}{BC}$$

分数式の加法、減法では、通分して分母を同じにした後で、分子どうし計算をします。

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \qquad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

分数のときには、分母の最小公倍数にそろえるように通分をしました。最小公倍数は、それぞれの分母を素因数分解することで、足りない因数を見つけ出し、それを補ってやることで等しい数にする作業になります。分数式も同じように、分母が多項式になっている場合には、まずは、それぞれの分母を因数分解し、足りない因数を見つけ出し、それを補ってやることで分母を等しくします。

【例題 4 − 3】

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x} + \dfrac{2x}{x^2-2x-8}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$

＜解説＞

(1) まずは、分母を因数分解し、その後通分（分母をそろえる）して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2-4x} + \frac{2x}{x^2-2x-8} &= \frac{x-2}{x(x-4)} + \frac{2x}{(x-4)(x+2)} \\ &= \frac{(x-2)\times(x+2)}{x(x-4)\times(x+2)} + \frac{2x \times x}{(x-4)(x+2)\times x} \\ &= \frac{(x^2-4)+2x^2}{x(x-4)(x+2)} \\ &= \frac{3x^2-4}{x(x-4)(x+2)}\end{aligned}$$

(2) まずは、分母を因数分解し、その後通分（分母をそろえる）して計算します。

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} - \frac{2x+5}{x^2-x-2} &= \frac{1}{x+1} - \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{1\times(x-2)}{(x+1)\times(x-2)} - \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)-(2x+5)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{-x-7}{(x+1)(x-2)} \\ &= -\frac{x+7}{(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

4.4 繁分数式の計算

分数式の分母や分子がまた分数式になっている、

$$\text{分母が分数式}:\frac{A}{\frac{B}{C}},\qquad \text{分子が分数式}:\frac{\frac{A}{B}}{C},\qquad \text{分母・分子が分数式}:\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$$

のような式を**繁分数式**といいます。

繁分数式の計算方法には主に次のように2通りあります。

(i) 分数式の割り算にする方法

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

(ii) 分子、分母に適当な文字を掛けて、分数式にする方法

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{\frac{A}{\cancel{B}}\times \cancel{B}D}{\frac{C}{\cancel{D}}\times B\cancel{D}}=\frac{AD}{CB}$$

どちらの方法で計算してもかまいませんが、繁分数式の中には分数式の割り算に変形するのが面倒であるものが多くあるので、(ii) の方法で計算することをお勧めします。

【例題 4 − 4】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{x-\frac{9}{x}}{1-\frac{3}{x}}$　　(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

＜解説＞

分数の計算と同じように、分数式においても約分のし忘れに注意しましょう。

(1) 分子・分母に x を掛けて、繁分数式を分数式にして計算します。

$$\begin{aligned}\frac{x-\frac{9}{x}}{1-\frac{3}{x}}&=\frac{\left(x-\frac{9}{x}\right)\times x}{\left(1-\frac{3}{x}\right)\times x}\\&=\frac{x^2-9}{x-3}\\&=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}\\&=x+3\end{aligned}$$

(2) まずは、$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ の部分に着目し、分子・分母に x を掛けて繁分数式を分数式に直します。

$$
\begin{aligned}
1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}} &= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1\times x}{\left(1-\cfrac{1}{x}\right)\times x}} \\
&= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}
\end{aligned}
$$

そして、残りの繁分数式である $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$ の分子・分母に $x-1$ を掛けて分数式に直し、計算します。

$$
\begin{aligned}
1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}} &= 1-\frac{1\times(x-1)}{\left(1-\cfrac{x}{x-1}\right)\times(x-1)} \\
&= 1-\frac{x-1}{(x-1)-x} \\
&= 1-\frac{x-1}{-1} \\
&= 1+(x-1) \\
&= x
\end{aligned}
$$

4.5　部分分数分解

1 つの分数式を複数の分数式の和や差の形にすることを、**部分分数分解（部分分数に分解する）**といいます。

（分数での例）　$\dfrac{1}{2\cdot 3}\left(=\dfrac{1}{6}\right)\longrightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\left(=\dfrac{3}{6}-\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}\right)$

分数式では、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}&=\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)}\\&=\frac{b-a}{(x+a)(x+b)}\\\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)&=\frac{1}{(x+a)(x+b)}\end{aligned}$$

という関係式から、分母が積の形で表される分数式では、その因数を分母とするような分数式に分解できることになります。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\quad (a\fallingdotseq b)$$

【例題 4 − 5】

次の式を計算しなさい。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}$

(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

<解説>

(1) 分数式ではありませんが、部分分数分解のわかりやすい例として、具体的な数について確認をします。
普通であれば、

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}\longrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$$

のように表せばよいものを、わざわざ分母が積の形に表されていることがポイントになります。そこで、それぞれの因数を分母とする分数に部分分数分解して計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1\cancel{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}\right)\\&=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{6}^{\,3}}{7}=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

(2) 複数の分数式の和や差を求めるような計算では、通分して計算をするのは面倒です。そこで、部分分数分解を利用することを考えます。
分母が積の形で表されており、さらには、共通な因数を持ち、分母の因数の差が一定であるような分数式

では部分分数分解が有効な手段になります。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+7)} \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\cancel{-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}}\cancel{-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}}-\frac{1}{x+7}\right) \\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+7)-(x+1)}{(x+1)(x+7)} \\
=&\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{(x+1)(x+7)} \\
=&\frac{3}{(x+1)(x+7)}
\end{aligned}
$$

5　恒等式

5.1　恒等式の意味とその性質

次の式のように、文字 x が特定の値のときだけ成り立つ等式を、**方程式**といいます。

$$(x+5)(x-3)=0 \qquad (x=-5,\ 3 \text{ のときだけ等式は成り立つ})$$

これとは異なり、

$$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$$

などのように、式に含まれている文字にどのような数値を代入しても常に成り立つ等式を、**恒等式**といいます。

【例題 5 − 1】

次の等式のうち、恒等式はどれですか。ア〜エの記号で答えなさい。

ア $(x+4)(x-5)=x^2-x-20$

イ $x^2-9x+20=(x+4)(x-5)$

ウ $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

エ $(a-b)^2-2ab=a^2+b^2$

＜解説＞

恒等式は、文字にどのような値を代入しても等式が成り立たなければいけないので、左辺の式と右辺の式が一致していなければいけません。

ア 左辺を計算すると

$$\text{左辺}=(x+4)(x-5)=x^2-x-20$$

となり右辺と一致します。左辺の式と右辺の式が一致していれば、x にどのような値を代入しても常に等式が成り立つので、この等式は恒等式になります。

イ 右辺を計算すると

$$\text{右辺}=(x+4)(x-5)=x^2-x-20$$

となり左辺とは一致しません。つまり、この等式は恒等式ではありません。

ウ 左辺を計算すると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\\&=\frac{x}{x(x+1)}-\frac{x+1}{x(x+1)}\\&=-\frac{1}{x(x+1)}\end{aligned}$$

となり右辺とは一致しません。つまり、この等式は恒等式ではありません。

エ 左辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a-b)^2 - 2ab \\
&= a^2 - 2ab + b^2 - 2ab \\
&= a^2 - 4ab + b^2
\end{aligned}
$$

となり右辺とは一致しません。つまり、この等式は恒等式ではありません。

以上より、恒等式は

ア

になります。

5.2　数値代入法

恒等式になるように係数を決定する方法を**未定係数法**といい、ここでは、その未定係数法の 1 つである**数値代入法**について学習します。

数値代入表は、次のような手順で未定係数を決定する方法になります。

(i) x に適当な値を代入する

x の恒等式であるとき、x にどのような値を代入しても常に等式が成り立つので、計算が楽になるような適当な数値を代入します。

(ii) 連立方程式を解く

未定係数の数だけ方程式は必要になるので、その数と同じだけ数値を代入し、その連立方程式を解きます。

(iii) 逆が成り立つことを確認する

(ii) の連立方程式を解けば未定係数を求めることはできますが、ここで求めた未定係数は、(i) で代入した x について成り立つもので、「どのような x について」も成り立つものなのかどうかはわかりません。そのため、(ii) で求めた未定係数のときに、本当に恒等式になっているのかを確認する必要があります。

$ax^2+bx+c=0$ が x の恒等式である場合、

(i) x に適当な値を代入する

計算が楽になるように、$x=0,\ 1$ など小さな数値のものを代入します。また、未定係数は $a,\ b,\ c$ と 3 つあるので、3 つの方程式を作るために 3 つの数値を代入します。

① $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c&=0 \\ c&=0 \end{aligned}$$

② $x=1$ のとき

$$\begin{aligned} a\cdot 1^2+b\cdot 1+c&=0 \\ a+b+c&=0 \end{aligned}$$

③ $x=-1$ のとき

$$\begin{aligned} a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c&=0 \\ a-b+c&=0 \end{aligned}$$

(ii) 連立方程式を解く

(i) で得られた方程式を連立させて未定係数を求めていきます。

$$\begin{cases} c=0 & \cdots\cdots\ ① \\ a+b+c=0 & \cdots\cdots\ ② \\ a-b+c=0 & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

この連立方程式を解けば、

$$a=b=c=0$$

という関係が導き出されます。

(iii) 逆が成り立つことを確認する

$x=0,\ 1,\ -1$ のとき、

$$a=b=c=0$$

であれば、左辺と右辺は一致することがわかりましたが、「どのような x について」も成り立つかどうかはまだわかりません。そこで、逆が成り立つことを確認します。

$ax^2+bx+c=0$ が $a=b=c=0$ のとき、

$$\text{左辺}=0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$$

となり右辺と一致するので、確かに x の恒等式であることがわかります。

よって、$ax^2+bx+c=0$ が x の恒等式であるための必要十分条件は、

$$a=b=c=0$$

のように、各項の係数が 0 となることです。

【例題 5 − 2】

次の等式が x の恒等式になるように、$a,\ b,\ c$ の値を定めなさい。

(1) $x^2-1=(x-1)^2+a(x-1)x+b$　　(2) $x^2-2x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

<解説>

(1) (i) x に適当な値を代入する

① $x=1$ を代入

$$\begin{aligned}1^2-1&=(1-1)^2+a(1-1)+b\\0&=b\end{aligned}$$

② $x=0$ を代入

$$\begin{aligned}0^2-1&=(0-1)^2+a(0-1)+b\\-1&=1-a+b\\a-b&=2\end{aligned}$$

(ii) 連立方程式を解く

(i) から次の連立方程式が得られます。

$$\begin{cases}b=0 & \cdots\cdots ①\\ a-b=2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

このことから、

$$a=2,\quad b=0$$

(iii) 逆が成り立つことを確認する

(i), (ii) から $a,\ b$ の値を求めることはできましたが、この値は $x=0,\ 1$ のときに成り立つもので、他のすべての x の値に成り立つかどうかはわかりません。そのため、この値を答えにしてしまうのには少し問題があるので、本当に恒等式になっているのかを確かめる必要があります。

そこで、$a=2,\ b=0$ を与えられた式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}(x-1)^2+2(x-1)+0 &= x^2-2x+1+2x-2\\ &= x^2-1\end{aligned}$$

となり左辺と一致するので、確かに恒等式であることが確認できます。この結果を確認して、ようやく

$$a=2,\quad b=0$$

が答えであると示すことができます。

(2) (ⅰ) x に適当な値を代入する

③ $x=-1$ を代入

$$\begin{aligned}(-1)^2-2\cdot(-1)+3 &= a(-1+1)^2+b(-1+1)+c\\ 6 &= c\end{aligned}$$

④ $x=0$ を代入

$$\begin{aligned}0^2-2\cdot 0+3 &= a(0+1)^2+b(0+1)+c\\ 3 &= a+b+c\end{aligned}$$

⑤ $x=-2$ を代入

$$\begin{aligned}(-2)^2-2\cdot(-2)+3 &= a(-2+1)^2+b(-2+1)+c\\ 11 &= a-b+c\end{aligned}$$

(ⅱ) 連立方程式を解く

(i) から次の連立方程式が得られます。

$$\begin{cases} c=6 & \cdots\cdots\ ③\\ a+b+c=3 & \cdots\cdots\ ④\\ a-b+c=11 & \cdots\cdots\ ⑤\end{cases}$$

③を④, ⑤に代入すれば

$$\begin{cases} a+b=-3 & \cdots\cdots\ ⑥\\ a-b=5 & \cdots\cdots\ ⑦\end{cases}$$

となるので、この連立方程式を解けば、

$$a=1,\quad b=-4,\quad c=6$$

(iii) 逆が成り立つことを確認する

逆に、$a=1,\ b=-4,\ c=6$ を与えられた式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}1\cdot(x+1)^2+(-4)\cdot(x+1)+6 &= x^2+2x+1-4x-4+6\\ &= x^2-2x+3\end{aligned}$$

となり左辺と一致するので、確かに x の恒等式になっています。よって、

$$a=1,\ b=-4,\ c=6$$

5.3 係数比較法

未定係数法の 1 つである数値代入法を用いることで、

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が } x \text{ の恒等式} \Longleftrightarrow a=b=c=0$$

という関係を導くことができました。この関係から、$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x の恒等式である場合には、

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c' \text{が } x \text{ の恒等式} &\Longleftrightarrow (a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0 \text{ が } x \text{ の恒等式} \\ &\Longleftrightarrow a-a'=0, \quad b-b'=0, \quad c-c'=0 \\ &\Longleftrightarrow a=a', \quad b=b', \quad c=c' \end{aligned}$$

となり、左辺と右辺での同じ次数の項の係数が一致することが、x の恒等式であるための条件になります。

このように、恒等式の両辺で、同じ次数の係数が等しくなることを利用して、恒等式の未定係数を決定する方法を**係数比較法**といい、次のような手順で未定係数を決定します。

(i) 必要があれば各辺を降べきの順に整理する
(ii) 両辺の同じ次数の項の係数が等しい
(iii) (ii) でできた連立方程式を解く

【例題 5 − 3】

次の等式が x の恒等式のとき、a, b, c の値を求めなさい。

(1) $ax^2+bx+c=3x^2-4x+2$　　(2) $(a+b-3)x^2+(2a-b-c)x+b-2=0$

<解説>

数値代入法を利用して未定係数を決定することもできますが、ここでは係数比較法を利用して未定係数を決定します。

(1) (i) 必要があれば各辺を降べきの順に整理する

与えられた式は、すでに降べきの順に整理された形なので、改めて整理し直す必要はありません。

$$ax^2+bx+c=3x^2-4x+2$$

(ii) 両辺の同じ次数の項の係数が等しい

$$a=3, \quad b=-4, \quad c=2$$

(iii) (ii) でできた連立方程式を解く

(ii) までで、未定係数を決定することができたので、この問題では連立方程式を解く必要はありません。

(2) (i) 必要があれば各辺を降べきの順に整理する

与えられた式は、すでに降べきの順に整理された形なので、改めて整理し直す必要はありませんが、係数比較法を利用するために、次のような式のイメージを持ちます。

$$(a+b-3)x^2+(2a-b-c)x+b-2=0x^2+0x+0$$

(ii) 両辺の同じ次数の項の係数が等しい

$$\begin{cases} a+b-3=0 & \cdots\cdots ① \\ 2a-b-c=0 & \cdots\cdots ② \\ b-2=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(iii) (ii) でできた連立方程式を解く

③より、

$$b=2$$

であるので、これを①に代入して

$$\begin{aligned} a+2-3&=0 \\ a&=1 \end{aligned}$$

さらに、これらの値を②に代入して

$$\begin{aligned} 2\cdot 1-2-c&=0 \\ c&=0 \end{aligned}$$

よって、

$$a=1,\quad b=2,\quad c=0$$

5.4 分数式の恒等式

【例題 5 − 4】

次の等式が x についての恒等式であるとき、定数 $a,\ b$ の値を求めなさい。

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \quad \cdots\cdots\ ①$$

＜解説＞

分数を含む等式や不等式では、計算しやすいように分母を払って計算することが基本でした。分数式でも同様に、分数式を含んだままでは計算が面倒なので、分母を払います。そこで、①の両辺に $(x-1)(x-2)$ を掛けると、

$$x-3 = a(x-2) + b(x-1) \quad \cdots\cdots\ ②$$

となります。①が x の恒等式であるとき、その式を変形した②の等式ももちろん恒等式です。（ただし、$x=1,\ 2$ のときは①の分母は 0 になってしまうので、$x=1,\ 2$ を除くすべての実数 x についての恒等式になります。）このことから、②について係数比較法や数値代入法を用いて、未定係数を決定します。（ここでは、係数比較法を利用して未定係数を決定します。）

②の右辺を整理すると

$$x-3 = (a+b)x - 2a - b$$

となるので、両辺の同じ次数の項の係数を比較して、

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdots\cdots\ ③ \\ -2a-b=-3 & \cdots\cdots\ ④ \end{cases}$$

よって、③, ④より

$$a=2, \quad b=-1$$

6　等式の証明

6.1　等式の証明

ある等式を証明することは、その等式が恒等式であることを示すことをいいます。

等式 $A = B$ を証明する方法には、

(ｉ) 左辺（A）を変形して、右辺（B）を導く
(ii) 右辺（B）を変形して、左辺（A）を導く
(iii) 両辺（A と B）それぞれを変形して、同じ式 C を導く
(iv) (左辺) − (右辺) = 0（$A - B = 0$）を導く

という主に 4 つの方法があります。

どの方法でなければいけないということはありませんが、(iv) の証明方法を用いれば、

(ｉ) 左辺（A）を変形して、右辺（B）を導く

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= A - B \\ &= B - B = 0\end{aligned}$$

(ii) 右辺（B）を変形して、左辺（A）を導く

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= A - B \\ &= A - A = 0\end{aligned}$$

(iii) 両辺（A と B）それぞれを変形して、同じ式 C を導く

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= A - B \\ &= C - C = 0\end{aligned}$$

のように (i)〜(iii) の方法をすべて網羅することができます。そのため、(iv) の方法をお勧めします。

【例題 6 − 1】

次の等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$　　(2) $(a^2-b^2)(x^2-y^2) = (ax+by)^2 - (ay+bx)^2$

＜解説＞

(1) (iv) の方法で証明を行いますが、(i) の証明法を利用しているのと同じです。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \left\{(a+b)^2 - (a-b)^2\right\} - 4ab \\ &= \left\{(a^2+2ab+b^2) - (a^2-2ab+b^2)\right\} - 4ab \\ &= 4ab - 4ab = 0\end{aligned}$$

よって、

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

(2) (iv) の方法で証明を行いますが、(iii) の証明法を利用しているのと同じです。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2-b^2)(x^2-y^2) - \left\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\right\} \\ &= (a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2) \\ &\qquad -\left\{(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)\right\} \\ &= (a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+b^2y^2-a^2y^2-b^2x^2)=0\end{aligned}$$

よって、

$$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(ay+bx)^2$$

6.2 条件つきの等式の証明

等式の証明問題では複数の文字を含んでいることが多くあります。簡単なことであっても複数のことを同時に行うのが難しいように、数式の場合、複数の文字を同時に扱うのは難しいので、文字を減らして、同時に扱う文字を減らすと見通しが立て易くなります。

そのため、証明問題に限らず数式を扱うときの原則は、

- 文字を減らす
- 1 つの文字に着目する

などして、同時に複数の文字を扱わないようにすることです。

【例題 6 − 2】

次の等式を証明しなさい。

(1) $a+b=0$ のとき、$a^2+b^2=-2ab$　　(2) $a+b=1$ のとき、$a^2+b=b^2+a$

<解説>

条件式を利用して文字を減らす工夫をします。

(1) $a+b=0$ より、

$$b=-a$$

であるので、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (a^2+b^2)-(-2ab)\\ &= a^2+(-a)^2+2a\cdot(-a)\\ &= 2a^2-2a^2=0\end{aligned}$$

よって、

$$a^2+b^2=-2ab$$

(2) $a+b=1$ より、

$$b=1-a$$

であるので、

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (a^2+b)-(b^2+a)\\ &= a^2+(1-a)-(1-a)^2-a\\ &= a^2-2a+1-(a^2-2a+1)=0\end{aligned}$$

よって、

$$a^2+b=b^2+a$$

6.3 条件に比例式を含む等式の証明

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のように、比の値が等しいことを示す式を**比例式**といいます。このとき、比の値が等しいことは $a : b = c : d$ のようにしても表すこともでき、これも比例式になります。

【例題 6 − 3】

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき、$\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a+2b}{c+2d}$ であることを証明しなさい。

＜解説＞

条件式が与えられているので、文字を減らす方針で考えます。そのとき、条件式が比例式であるような場合には、

（比例式）$= k$

とおくことがポイントです。つまり、

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \ \cdots\cdots \ ①$$

とおきます。

一見すると、「文字を減らす方針」なのに文字を増やしてしまっているように思えますが、①より

$$a = bk, \qquad c = dk$$

のようにして、$a,\ b,\ c,\ d$ と 4 つあった文字が、$b,\ d,\ k$ という 3 つの文字で表せることになり、見事文字を減らすことができています。

このことから、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{a+b}{c+d} - \frac{a+2b}{c+2d} \\ &= \frac{bk+b}{dk+d} - \frac{bk+2b}{dk+2d} \\ &= \frac{b\cancel{(k+1)}}{d\cancel{(k+1)}} - \frac{b\cancel{(k+2)}}{d\cancel{(k+2)}} \\ &= \frac{b}{d} - \frac{b}{d} = 0\end{aligned}$$

となるので、等式を証明することができます。

＜証明＞

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと、

$$a = bk, \qquad c = dk$$

であるので、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{a+b}{c+d} - \frac{a+2b}{c+2d} \\
&= \frac{bk+b}{dk+d} - \frac{bk+2b}{dk+2d} \\
&= \frac{b\cancel{(k+1)}}{d\cancel{(k+1)}} - \frac{b\cancel{(k+2)}}{d\cancel{(k+2)}} \\
&= \frac{b}{d} - \frac{b}{d} = 0
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+2b}{c+2d}$$

7　不等式の証明

7.1　不等式の証明の基本

$a,\ b,\ c$ を実数とするとき、不等式は次のような性質が基本となります。

(i) 2 つの実数 $a,\ b$ の間には、

$$a > b,\quad a = b,\quad a < b$$

という 3 つの関係のうち、どれか 1 つだけが成り立つ。

(ii) $a > b,\ b > c$ ならば $a > c$

(iii) $a > b$ ならば、$a + c > b + c,\ a - c > b - c$

(iv) $a > b,\ c > 0$ ならば、$ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

(v) $a > b,\ c < 0$ ならば、$ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

ここで、$a > b$ のとき、両辺から b を引くと $a - b > 0$ となるので、

$$a > b \Longrightarrow a - b > 0$$

が成り立ち、また、$a - b > 0$ のとき、両辺に b を加えることで $a > b$ となるので、

$$a - b > 0 \Longrightarrow a > b$$

が成り立ちます。つまり、

$$a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$$

が成り立ち、同様にして

$$a < b \Longleftrightarrow a - b < 0$$

も成り立ちます。

このことから、2 つの式 $A,\ B$ の大小関係を知るには、2 つの式の差 $A - B$ の符号を調べればよく、そのことを利用して不等式の証明を行います。

【例題 7 − 1】

$x > y$ のとき、次の不等式を証明しなさい。

(1) $3x - 2 > 3y - 2$　　(2) $\dfrac{3x + y}{2} > \dfrac{4x + 2y}{3}$

＜解説＞

等式の証明において、

(左辺) − (右辺) = 0

となることを示すことで証明を行いましたが、不等式の証明においても、

(左辺) − (右辺)

の符号を調べることによって、等式の証明と同じ手順で証明できることになります。（等式の証明方法にはいくつかの方法がありましたが、(iv) の証明方法を使うことによって不等式の証明にも応用できることになるので、是非、(iv) の証明方法で統一して利用することをお勧めします。）

つまり、不等式 $A > B,\ A < B$ を証明するには、2 つの式の差 $A - B$ を変形して、それぞれ

$$A - B > 0, \qquad A - B < 0$$

となることを示します。

＜証明＞

(1)

$$\begin{aligned}(3x-2)-(3y-2) &= 3x-3y \\ &= 3(x-y)\end{aligned}$$

$x > y$ より、$x - y > 0$ であるので、

$$3(x-y) > 0$$

よって、

$$3x-2 > 3y-2$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{3x+y}{2}-\frac{4x+2y}{3} &= \frac{3(3x+y)-2(4x+2y)}{6} \\ &= \frac{9x+3y-8x-4y}{6} \\ &= \frac{x-y}{6}\end{aligned}$$

$x > y$ より、$x - y > 0$ であるので、

$$\frac{x-y}{6} > 0$$

よって、

$$\frac{3x+y}{2} > \frac{4x+2y}{3}$$

7.2　実数の 2 乗と不等式

実数 a は、$a > 0,\ a = 0,\ a < 0$ のいずれかの値をとりますが、それぞれの場合において不等式の性質から、

(i) $a > 0$ のとき　　(ii) $a = 0$ のとき　　(iii) $a < 0$ のとき

$$a^2 > 0 \qquad a^2 = 0 \qquad a^2 > 0$$

となります。このことから

$$a^2 \geqq 0 \qquad (とくに、a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 0)$$

という関係が成り立つので、$A \geqq B$ のような等号付きの不等式を証明する場合には、この性質を利用する場合が多くあります。

【例題 7 − 2】

次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときですか。

(1) $a^2 + b^2 \geqq 2ab$　　(2) $a^2 + b^2 + a + b + \dfrac{1}{2} \geqq 0$

＜解説＞

(1) 不等式 $A \geqq B$ の証明は、2 つの式の差 $A - B$ が

$$A - B \geqq 0$$

であることを示すことになります。そして、そこで活躍するのが、

$$a^2 \geqq 0$$

という性質です。$A - B$ を平方の形に変形し、それが 0 以上になることを示します。

$$A - B = (実数)^2 \geqq 0$$

(2) 複数の文字を含む場合、「文字を減らす」ことが基本方針でしたね。この問題では、条件式を利用して文字を減らすことができないので、特定の文字に着目をします。文字 a に着目すれば、左辺は

$$左辺 = a^2 + a + b^2 + b + \frac{1}{2}$$

のように a の 2 次式になります。そして、不等式を証明するためには平方の形を作らなければいけないので平方完成します。

$$\begin{aligned} a^2 + a + b^2 + b + \frac{1}{4} &= \left(a^2 + a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + b^2 + b + \frac{1}{2} \\ &= \left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) + b^2 + b + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + b + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

これで、a については平方の形を作ることができたので、残りの b についても

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + b + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2$$

のように平方の形を作ることができます。
ここで、$\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq 0,\ \left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ であるので、その和ももちろん 0 以上になります。

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

また、等号 $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ が成り立つ（0 以上の和が 0 になる）のは、

$$0+0=0$$

のときしかありません。つまり、

$$a+\frac{1}{2}=0 \quad \text{かつ} \quad b+\frac{1}{2}=0$$

が等号が成り立つための条件になります。

＜証明＞

(1)

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)-2ab &= a^2-2ab+b^2\\ &=(a-b)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって、

$$a^2+b^2 \geqq 2ab$$

等号が成り立つのは、$a-b=0$、つまり、

$$a=b$$

のとき。

(2)

$$\begin{aligned}a^2+b^2+a+b+\frac{1}{2} &= a^2+a+b^2+b+\frac{1}{2}\\ &=\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)+b^2+b+\frac{1}{4}\\ &=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって、

$$a^2+b^2+a+b+\frac{1}{2} \geqq 0$$

等号が成り立つのは、$a+\dfrac{1}{2}=0$ かつ $b+\dfrac{1}{2}=0$、つまり、

$$a=b=-\frac{1}{2}$$

のとき。

7.3 平方の大小関係

$A>0,\ B>0$ のとき、A^2 と B^2 の大小関係を考えてみます。
大小関係を考えるので、お馴染みのように差を考えると

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

と変形でき、$A>0,\ B>0$ であるので、常に $A+B>0$ です。このことから、A^2-B^2 の符号と $A-B$ の符号は一致することになります。つまり、

(ｉ) $A-B>0 \iff A^2-B^2>0 \qquad (A>B \iff A^2>B^2)$
(ii) $A-B=0 \iff A^2-B^2=0 \qquad (A=B \iff A^2=B^2)$
(iii) $A-B<0 \iff A^2-B^2<0 \qquad (A<B \iff A^2<B^2)$

という関係が成り立ちます。
このことを利用して、直接大小関係を考えることが難しいような場合、それぞれ平方したものの大小関係を考えることで解決できる場合があります。ただし、

$$A>0, \quad B>0$$

という条件の場合で利用できる関係式であるということに注意してください。

【例題７－４】

$a>0,\ b>0$ のとき、次の不等式を証明しなさい。
(1) $\sqrt{2}\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$　　(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

＜解説＞

不等式の証明であるので、それぞれ左辺と右辺の差を考えますが、
(1) $\sqrt{2}\sqrt{a+b}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$　　(2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a+b}$
のようにしても、これ以上計算することは難しく、また、このままでは大小関係もはっきりしないため証明することができません。その原因は根号を含んでいるからですね。そこで、根号をなくすことを考えますが、$a>0,\ b>0$ のとき、

$$\sqrt{2}\sqrt{a+b}>0, \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}>0, \qquad \sqrt{a+b}>0$$

であるので、それぞれ平方して大小関係を考えることができます。

＜証明＞

(1) 両辺の平方の差を考えると、

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= 2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)\\ &= a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\\ &= (\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

となり、$a>0,\ b>0$ のとき、

$$\sqrt{2}\sqrt{a+b}>0, \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$$

であるので、

$$\sqrt{2}\sqrt{a+b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

(2) 両辺の平方の差を考えると、

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2 &= (a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)-(a+b)\\ &= 2\sqrt{ab}>0\end{aligned}$$

よって、

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

となり、$a>0,\ b>0$ のとき、

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0, \qquad \sqrt{a+b}>0$$

であるので、

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

7.4　絶対値を含む不等式

【例題 7 − 4】

不等式 $|x+y| \leqq |x|+|y|$ を証明しなさい。

<解説>

絶対値を含む問題では、絶対値記号がついたままでは計算できないため、絶対値記号をはずすのが基本でしたね。その際には、場合分けの手法がよく用いられますが、不等式の証明では、場合分けが面倒であったり、困難である場合が多くあります。そこで、絶対値の性質の 1 つである

$$|A|^2 = A^2$$

という関係から、平方して絶対値記号をはずします。

また、

(i) $A \geqq 0$ のとき

$$|A| = A$$

(ii) $A < 0$ のとき

$$|A| > A$$

という関係から、$|A|$ は常に、

$$|A| \geqq A$$

となる性質もあり、このような条件も絶対値を含む不等式の証明では利用されることがあります。

<証明>

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2|xy| + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 2(|xy| - xy) \geqq 0\end{aligned}$$

よって、

$$(|x|+|y|)^2 \geqq |x+y|^2$$

となり、

$$|x|+|y| \geqq 0, \qquad |x+y| \geqq 0$$

であるので、

$$|x|+|y| \geqq |x+y|$$

7.5　相加平均と相乗平均

n 個の数について、それぞれを加えたものを n で割った数を**相加平均**といい、2 数 a と b に対して、

$$\frac{a+b}{2}$$

を、a と b の相加平均といいます。一般的に「平均」と言われればこの相加平均のことを指します。

また、n 個の正の数について、これらの全部の積の n 乗根を**相乗平均**といい、2 数 $a\ (>0),\ b\ (>0)$ について、

$$\sqrt{ab}$$

を a と b の相乗平均といいます。

この相加平均と相乗平均には、$a \geqq 0$、$b \geqq 0$ のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad (\text{相加平均}) \geqq (\text{相乗平均})$$

という大小関係が成り立つのですが、そのことを以下で証明してみたいと思います。

この不等式は等号付きの不等式であるので、

$$(\quad)^2 \geqq 0$$

という性質を利用できる形に変形することが目標です。

まずは 2 つの式の差を考えます。

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

ここで、$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ であるので、

$$a = (\sqrt{a})^2, \qquad b = (\sqrt{b})^2$$

と表すことができるので、

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0 \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

は成り立ちます。ここで、等号が成立するのは、

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0$$

つまり、

$$a = b$$

のときです。

また、相加平均と相乗平均の関係は、

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$$

という形で使うこともあります。

【例題 7 − 5】

$a > 0,\ b > 0$ のとき、次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{a}{2} \geqq \sqrt{2}$　　(2) $\dfrac{3b}{5a} + \dfrac{5a}{3b} \geqq 2$

<解説>

相加平均と相乗平均の関係を利用すると、等号付きの不等式の証明を非常に簡単にしてくれます。ただし、いつでも利用できるかというとそういうわけではなく、利用できる条件と利用した方がよい式の形があります。

まず、相加平均と相乗平均の関係は

$$\frac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB} \qquad (\text{または、} A + B \geqq 2\sqrt{AB})$$

でしたが、

$$A > 0 \quad \text{かつ} \quad B > 0 \qquad (A \geqq 0 \text{ かつ } B \geqq 0 \text{ でも成り立ちます。})$$

という条件のもと成り立つ関係式であるので、問題文にこのような条件が含まれているか、または、そのような条件が明らかである場合にしか利用できません。そのため、これが相加平均と相乗平均の関係を利用できるための条件になります。

次に、どのような式で相加平均と相乗平均の関係を利用すべきかですが、それはずばり、

「A と B に含まれている文字が逆数の関係になっている場合」

です。この例題でも、

(1) $A = \dfrac{1}{a},\ B = \dfrac{a}{2}$ とすると、それぞれの文字の部分は

$$A : \frac{1}{a}, \qquad B : a$$

(2) $A = \dfrac{3b}{5a},\ B = \dfrac{5a}{3b}$ とすると、それぞれの文字の部分は

$$A : \frac{b}{a}, \qquad B : \frac{a}{b}$$

のように逆数の関係になってます。このとき、A と B の積 AB は文字が約分され定数の形で表されるため、相加平均と相乗平均の関係を利用することが有効な手段になります。

＜証明＞

(1) $a>0$ より、$\dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{a}{2}>0$ であるので、(相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より、

$$\frac{1}{a}+\frac{a}{2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{2}}=\sqrt{2}$$

が成り立つ。また、等号が成り立つのは、$\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{2}$ のとき。つまり、

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{2}$$
$$a^2=2$$
$$a>0 \text{ より}\quad a=\sqrt{2}$$

のとき。

(2) $a>0,\ b>0$ より、$\dfrac{3b}{5a}>0,\ \dfrac{5a}{3b}>0$ であるので、(相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より、

$$\frac{3b}{5a}+\frac{5a}{3b}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{3b}}{\cancel{5a}}\cdot\frac{\cancel{5a}}{\cancel{3b}}}=2$$

が成り立つ。また、等号が成り立つのは、$\dfrac{3b}{5a}=\dfrac{5a}{3b}$ のとき。つまり、

$$\frac{3b}{5a}=\frac{5a}{3b}$$
$$25a^2=9b^2$$
$$a>0,\ b>0 \text{ より}\quad 5a=3b$$

のとき。