【数学 II】図形と方程式

まなびの学園

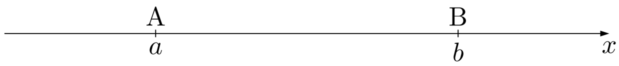
http://www.manabino-academy.com

目次

1　直線上の点

1.1　直線上の 2 点間の距離

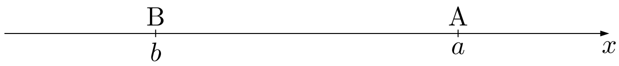
次の図のように、数直線上に 2 点 A(a), B(b) が与えられているとします。



このとき 2 点間の距離 AB は、

$\mathrm{AB} = b - a$

と表すことができます。また、



のように数直線上に 2 点 A(a), B(b) が与えられているときには、2 点間の距離 AB は、

$\mathrm{AB} = a - b$

と表すことができます。

基本的には 2 つの数のうち、大きい数（数直線の右側にある数）から小さい数（数直線の左側にある数）を引けば 2 点間の距離を求めることができますが、文字が含まれているような 2 数では、大小関係がはっきりしない場合もあります。そこで、絶対値記号を用いれば、2 点の位置関係にかかわらず、

$\mathrm{AB} = |a - b|$

のようにして表すこともできます。

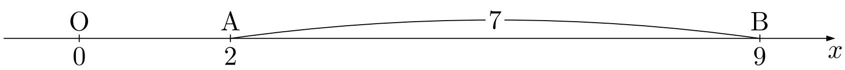
【例題 1 − 1】

次の 2 点間の距離を求めなさい。

(1) A(2), B(9)　　　(2) C(-2), D(3)

＜解説＞

(1) 2 点間の距離 AB



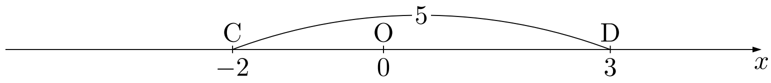
図から、

$\mathrm{AB} = 9 - 2 = 7$

と求めることができますが、公式を利用すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= |2 - 9| \\ &= |-7| = 7\end{aligned}$$

(2) 2 点間の距離 CD



図から、

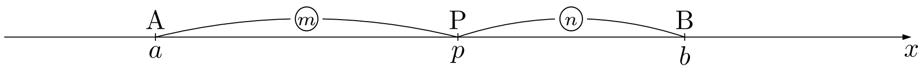
$$\mathrm{CD} = 3 - (-2) = 5$$

と求めることができますが、公式を利用すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= |-2-3| \\ &= |-5| = 5\end{aligned}$$

1.2　直線上の内分点の座標

　次の図のように 2 点 A(a), B(b) があり、点 P は線分 AB を $m:n$ に内分する点であるとします。



このとき

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$$

で、

$$\mathrm{AP}=p-a, \qquad \mathrm{PB}=b-p$$

であるので、

$$(p-a):(b-p)=m:n$$

という関係が成り立ちます。この式を変形して整理すると、

$$\begin{aligned} n(p-a)&=m(b-p)\\ np-na&=mb-mp\\ (m+n)p&=na+mb\\ p&=\frac{na+mb}{m+n} \end{aligned}$$

となり、この式を利用して内分点の座標を求めることができます。

　また、$m=n=1$ となるとき、これは、線分 AB を $1:1$ に内分する点、つまり線分 AB の**中点**を表すことになり、その中点の座標は、

$$\mathrm{AB}\text{ の中点}:\frac{a+b}{2}$$

のように与えられます。

【例題 1 − 2】

2 点 A(-1), B(9) に対して次の点の座標を求めなさい。

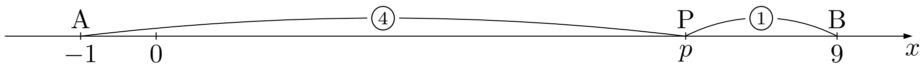
(1) 線分 AB を $4:1$ に内分する点 P　　(2) 線分 AB を $1:4$ に内分する点 Q

＜解説＞

　公式に代入すれば何も考えなくても内分点の座標を求めることができますが、内分点がどこにあるのかしっかりと図示（イメージ）することも大切です。

(1) $a=-1,\ b=9,\ m=4,\ n=1$ として公式に代入すると、点 P の座標は

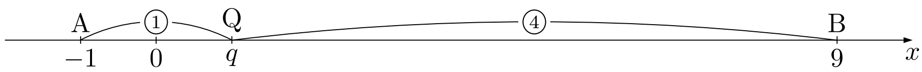
$$\frac{1\cdot(-1)+4\cdot 9}{4+1}=\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{5}^{1}}=7$$



となります。

(2) $a=-1,\ b=9,\ m=1,\ n=4$ として公式に代入すると、点 Q の座標は

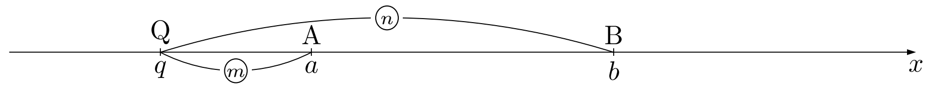
$$\frac{4\cdot(-1)+1\cdot 9}{1+4}=\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}^{1}}=1$$



となります。

1.3 直線上の外分点の座標

次の図のように 2 点 A(a), B(b) があり、点 Q は線分 AB を $m : n$（ただし、$m < n$）に外分する点であるとします。



このとき、

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

で、

$$\mathrm{AQ} = a - q, \qquad \mathrm{QB} = b - q$$

であるので、

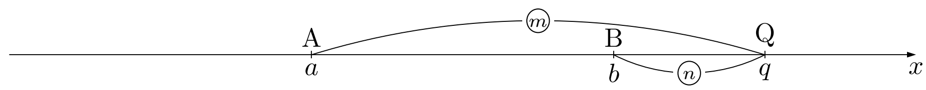
$$(a - q) : (b - q) = m : n$$

という関係が成り立ちます。この式を変形して整理すると、

$$\begin{aligned} n(a - q) &= m(b - q) \\ na - nq &= mb - mq \\ (m - n)q &= -na + mb \\ q &= \frac{-na + mb}{m - n} \end{aligned}$$

のように表すことができます。

同じようにして、次の図のように 2 点 A(a), B(b) があり、点 Q は線分 AB を $m : n$（ただし、$m > n$）に外分する点であるとします。



このとき、

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

で、

$$\mathrm{AQ} = q - a, \qquad \mathrm{QB} = q - b$$

であるので、

$$(q - a) : (q - b) = m : n$$

という関係が成り立ちます。この式を変形して整理すると、

$$\begin{aligned} n(q-a) &= m(q-b) \\ nq - na &= mq - mb \\ (-m+n)q &= na - mb \\ q &= \frac{na-mb}{-m+n} \end{aligned}$$

のように表すことができます。

このようにして、線分 AB を $m:n$ に外分する点 $\mathrm{Q}(q)$ の座標は、

$$q = \frac{na-mb}{-m+n} \quad \text{または} \quad q = \frac{-na+mb}{m-n}$$

のように与えられるのですが、どちらの式も内分する点の座標において、

$$m \longrightarrow -m \quad \text{または} \quad n \longrightarrow -n$$

としたものと同じ形になっています。つまり、

「$m:n$ に外分する点の座標」

というのは、

「$(-m):n$ に内分する点の座標」 または 「$m:(-n)$ に内分する点の座標」

として求めればよいことになります。また、

$$q = \frac{na-mb}{-m+n}, \qquad q = \frac{-na+mb}{m-n}$$

の 2 つの式は、分子、分母に「$\times(-1)$」をすることにより同じ形になるので、どちらか一方の形だけ、つまり、m と n のどちらかを負の値にして、内分する点の座標を求める式により求めることができます。

【例題 1 − 3】

2 点 A(-1), B(9) に対して次の点の座標を求めなさい。

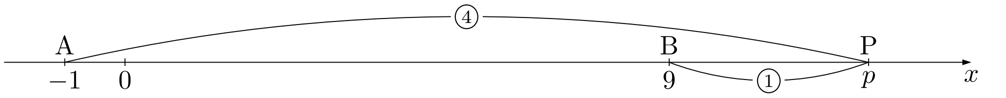
(1) 線分 AB を $4:1$ に外分する点 P　　(2) 線分 AB を $1:4$ に外分する点 Q

＜解説＞

内分点のときと同じようにして公式に代入すれば外分点の座標を求めることができますが、外分点がどこにあるのかしっかりと図示（イメージ）することも大切です。

(1) 点 P は、線分 AB を $4:(-1)$（または $(-4):1$）に内分する点だと考えて公式を利用すると、点 P の座標は、

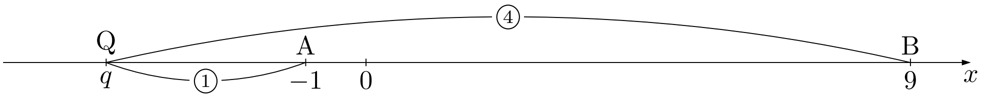
$$\frac{(-1)\cdot(-1)+4\cdot 9}{4+(-1)} = \frac{37}{3}$$



となります。

(2) 点 Q は、線分 AB を $1 : (-4)$（または $(-1) : 4$）に内分する点だと考えて公式を利用すると、点 Q の座標は、

$$\frac{(-4)\cdot(-1)+1\cdot 9}{1+(-4)} = \frac{13}{-3} = -\frac{13}{3}$$

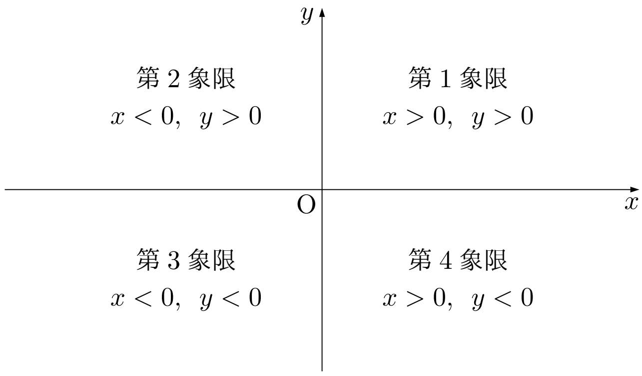


となります。

2　平面上の点

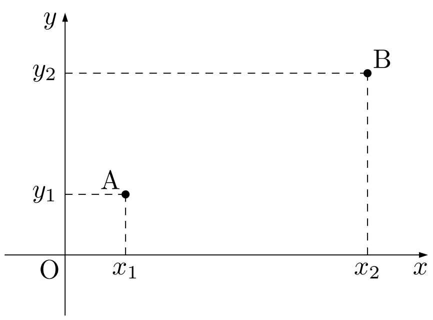
右の図のように、x 軸や y 軸のような座標軸が定められた平面を**座標平面**といいます。

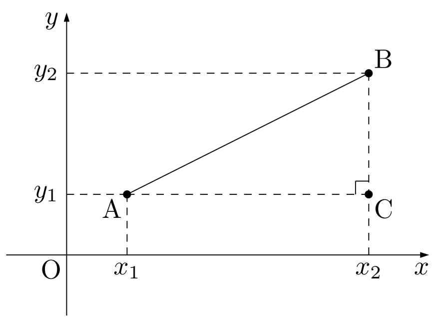
座標平面は、座標軸によって 4 つの部分に分けられ、その各部分を**象限**といい、$x > 0,\ y > 0$ となる部分を**第 1 象限**。そこを基準に、反時計回り（左回り）に**第 2 象限**（$x < 0,\ y > 0$ となる部分)、**第 3 象限**（$x < 0,\ y < 0$ となる部分)、**第 4 象限**（$x > 0,\ y < 0$ となる部分）といいます。このとき、座標軸は各象限の境界になるので、どの象限にも含めません。



2.1　座標平面上の 2 点間の距離

次の図（左）のように、平面上にある 2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離を考えます。
このとき、次の図（右）のように点 C$(x_2,\ y_1)$ を考えると、△ACB は直角三角形になります。





そこで三平方の定理を利用すると、2 点 AB 間の距離は、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}$$

と表されます。ここで、

$$\mathrm{AC} = |\,x_2 - x_1\,|, \qquad \mathrm{BC} = |\,y_2 - y_1\,|$$

であるので、2 点 AB 勘の距離は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{|\,x_2 - x_1\,|^2 + |\,y_2 - y_1\,|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (= \sqrt{(x\ \text{座標の差})^2 + (y\ \text{座標の差})^2})\end{aligned}$$

で求めることができます。

【例題 2 − 1】

次の 2 点間の距離を求めなさい。

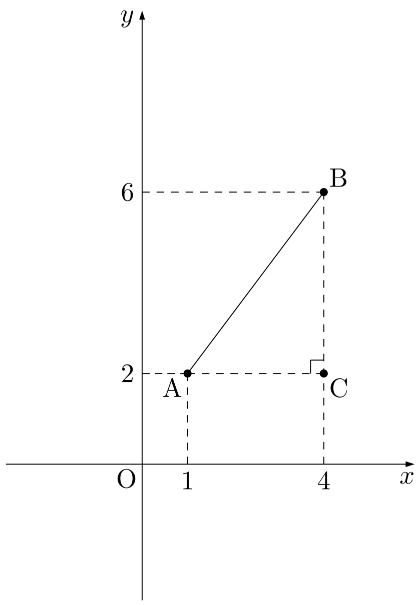
(1) A(1, 2), B(4, 6)　　　(2) C(−5, −1), D(1, 8)

＜解説＞

直角三角形をイメージし、三平方の定理を利用して求めているということを意識しながら、公式を使えるようにしてください。

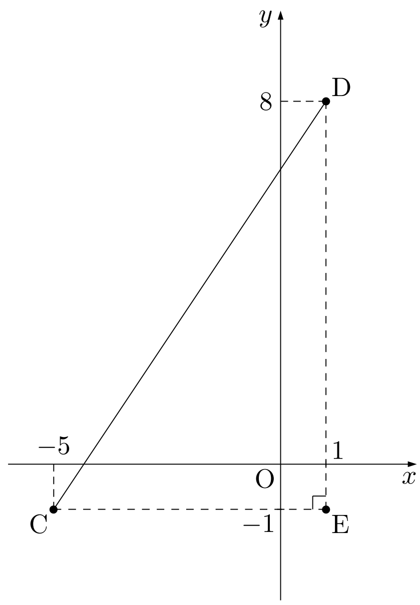
(1) 2 点間の距離の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$



(2) 2 点間の距離の公式を用いて、

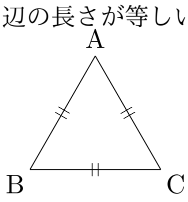
$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= \sqrt{\{1-(-5)\}^2+\{8-(-1)\}^2} \\ &= \sqrt{36+81} \\ &= \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\end{aligned}$$



2.2　三角形の形状

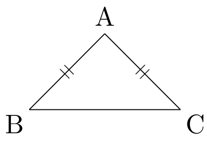
三角形の辺の長さの関係がわかれば、それぞれ次のように三角形の形を特定することができます。また、そのとき、三角形の頂点が与えられていて、辺や角などを示すことができる場合には、等しい辺の長さや直角となる角なども合わせて答えるようにします。

(i) 3 辺の長さが等しい



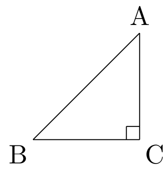
正三角形

(ii) 2 辺の長さが等しい



$AB = AC$ の二等辺三角形

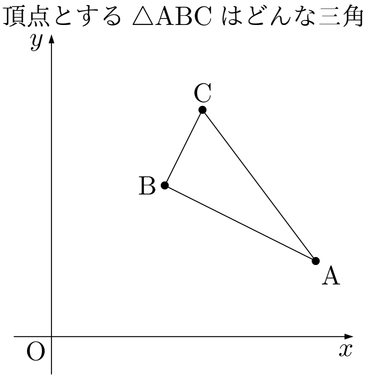
(iii) 三平方の定理が成り立つ



$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

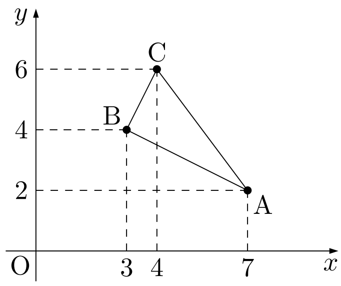
【例題 2 − 2】

3 点 A(7, 2), B(3, 4), C(4, 6) を頂点とする △ABC はどんな三角形ですか。



＜解説＞

3 辺の長さの関係を把握するために、3 辺 AB, BC, CA の長さを求めます。2 点間の距離の公式を用いると、



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(3-7)^2+(4-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC &= \sqrt{(4-3)^2+(6-4)^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(7-4)^2+(2-6)^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

となり、

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

が成り立つので、△ABC は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形であることがわかります。

2.3 中線定理の証明

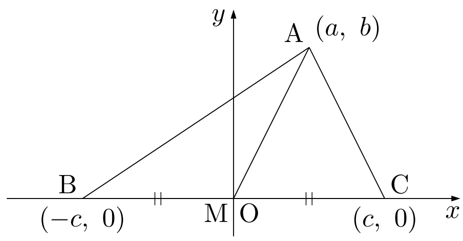
【例題 2 − 3】

$\triangle$ABC の辺 BC の中点を M とするとき、次の等式（中線定理）が成り立つことを証明しなさい。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

＜解説＞

中線定理は、座標を用いることで簡単に証明することが可能です。このとき、右図のように各点をとります。原点や座標軸上に点を配置することで「0」を多く含むことになるため、計算しやすくなります。



＜証明＞

直線 BC を x 軸、点 M を原点となるようにすると、3 頂点 A, B, C の座標は

$$\mathrm{A}(a,\ b),\quad \mathrm{B}(-c,\ 0),\quad \mathrm{C}(c,\ 0)$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\{a-(-c)\}^2+(b-0)^2\\&=(a+c)^2+b^2\\&=a^2+2ac+c^2+b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=(a-c)^2+(b-0)^2\\&=a^2-2ac+c^2+b^2\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)\\&=2(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2&=(a-0)^2+(b-0)^2\\&=a^2+b^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{BM}^2=c^2$$

より、

$$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)=2(a^2+b^2+c^2)$$

となるので、

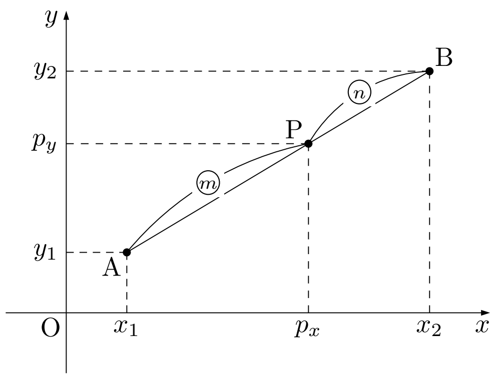
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

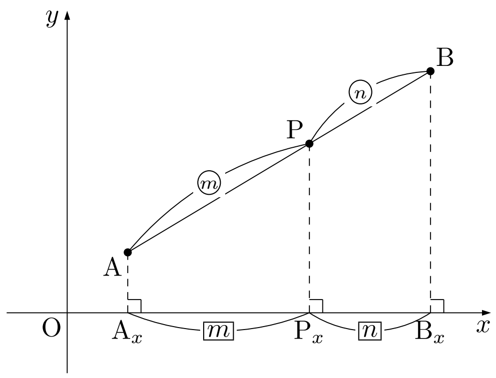
が成り立つ。

2.4 座標平面上の内分点、外分点の座標

次の図（左）のような 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(p_x,\ p_y)$ の座標を考えます。

（座標）平面では、縦（y）と横（x）という 2 つの要素があり、その 2 つの要素を同時に扱うのは難しいものです。そこで、A, B, P から x 軸に垂線を下ろし、x 軸との交点を次の図（右）のように $\mathrm{A}_x(x_1,\ 0)$, $\mathrm{B}_x(x_2,\ 0)$, $\mathrm{P}_x(p_x,\ 0)$ とし、横（x）という 1 つの要素のみに着目します。





このとき、平行線と線分の比の関係から、

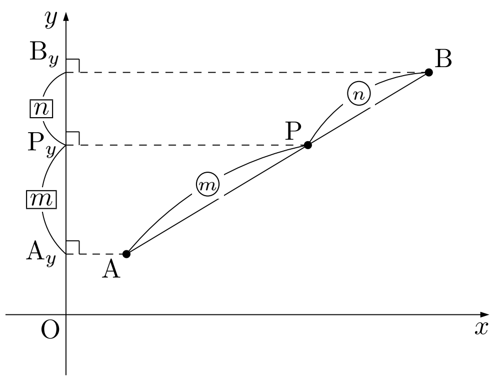
$$\mathrm{A}_x\mathrm{P}_x : \mathrm{P}_x\mathrm{B}_x = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

となるので、点 P_x は線分 $\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x$ を $m:n$ に内分する点となります。よって、数直線上の内分点の座標を求める式より、

$$p_x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

となります。

また、y 座標も同様にして考えることができ、A, B, P から y 軸に垂線を下ろし、y 軸との交点を次の図のように $\mathrm{A}_y(0,\ y_1)$, $\mathrm{B}_y(0,\ y_2)$, $\mathrm{P}_y(0,\ p_y)$ とすることで、縦（y）という 1 つの要素のみに着目します。このとき、平行線と線分の比の関係から、



$$\mathrm{A}_y\mathrm{P}_y : \mathrm{P}_y\mathrm{B}_y = \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

となるので、点 P_y は線分 $\mathrm{A}_y\mathrm{B}_y$ を $m:n$ に内分する点となり、数直線上の内分点の座標を求める式より、

$$p_y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

となります。

以上のことから、座標平面上の内分点は x 座標、y 座標をそれぞれ独立して考えることにより、数直線上の内分点の公式を用いて、

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

のように与えられます。

また、中点 M の座標は $m = n = 1$ とすることにより、

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

となります。

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を $m : n$ に外分する点 Q も、内分点と同様に x 座標、y 座標それぞれ別々で考えればよいことになります。つまり、$m : n$ に外分する点 Q の座標は、$m : (-n)$（または、$(-m) : n$）に内分する点の座標を考えればよく、

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$$

と与えられることになります。

【例題 2 − 4】

2 点 $\mathrm{A}(-2,\ -3)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$ があります。線分 AB を $3 : 2$ の比に内分する点 P、および外分する点 Q の座標を求めなさい。

＜解説＞

$\mathrm{P}(p_x,\ p_y)$ とすると、内分点の座標を求める公式より、

$$p_x = \frac{2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{3 + 2} = \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{5}^{\,1}} = 1 \qquad p_y = \frac{2 \cdot (-3) + 3 \cdot 7}{3 + 2} = \frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{5}^{\,1}} = 3$$

同じようにして、$\mathrm{Q}(q_x,\ q_y)$ とすると、外分点の座標を求める公式より、

$$q_x = \frac{(-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{3 - 2} = 13 \qquad q_y = \frac{(-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 7}{3 - 2} = 27$$

となるので、点 P, Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}(1,\ 3), \qquad \mathrm{Q}(13,\ 27)$$

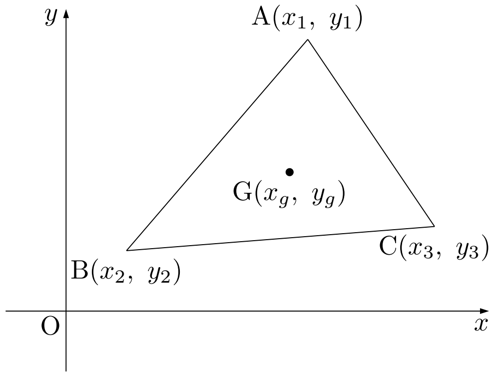
2.5 三角形の重心の座標

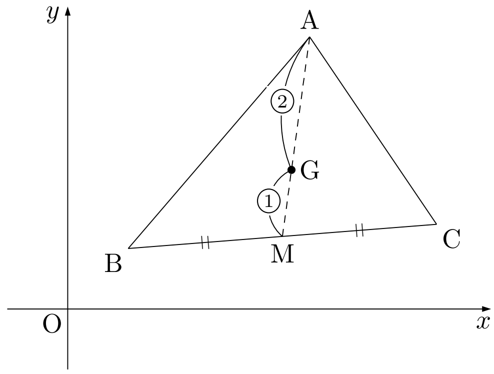
次の図（左）のような 3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心 G$(x_g,\ y_g)$ を考えます。

まず、辺 BC の中点を M とすると、その座標は

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

となります。





そして、重心 G は AM を 2 : 1 に内分する点であるので、

$$\mathrm{G}\left(\frac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{1\cdot y_1+2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

となり、これを計算して整理すると

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

のようになり、3 点の平均という形で与えられます。

【例題 2 − 5】

次の 3 点を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めなさい。

(1) A(5, 3)，B(1, 2)，C(−3, 4)　　　(2) A(1, 2)，B(−3, 5)，C(−1, −4)

＜解説＞

三角形の重心の座標は、3 頂点の x 座標、y 座標それぞれの平均を計算することで求めることができます。

(1) G$(x,\ y)$ とすると、

$$x=\frac{5+1+(-3)}{3}=\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}^1}=1$$

$$y=\frac{3+2+4}{3}=\frac{\cancel{9}^3}{\cancel{3}^1}=3$$

となるので、重心 G の座標は

G(1, 3)

(2) G(x, y) とすると、

$$x = \frac{1 + (-3) + (-1)}{3} = -\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}^1} = -1 \qquad y = \frac{2 + 5 + (-4)}{3} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}^1} = 1$$

となるので、重心 G の座標は

G(-1, 1)

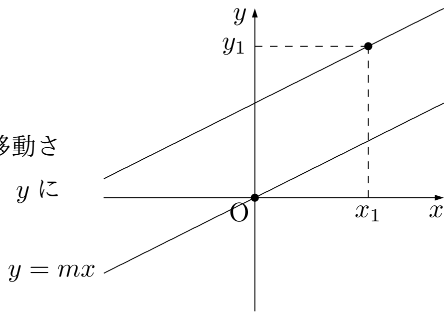
3　直線の方程式

3.1　通る 1 点と傾きから直線の方程式の決定

傾きが m で原点 O を通る直線の方程式は、

$$y = mx$$

となりました。この直線を x 軸方向に x_1、y 軸方向に y_1 だけ平行移動させれば、傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線になります。そこで、$x,\ y$ にそれぞれ



$$x \longrightarrow x - x_1, \qquad y \longrightarrow y - y_1$$

を代入して、

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

とすれば、傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の方程式を導出することができます。

【例題 3 − 1】

次の条件を満たす直線の方程式を求めなさい。

(1) 点 $(1,\ 2)$ を通り、傾き -3 の直線　　(2) 点 $(3,\ -2)$ を通り、傾き 5 の直線

＜解説＞

通る 1 点と傾きが決まれば直線がただ 1 つに決まり、点 $(x_1,\ y_1)$ を通り、傾き m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

となるので、この式に条件を当てはめて直線の方程式を求めます。ただし、直線の方程式は

$$y = (x \text{ の式})$$

という形で表されることが多いので、あらかじめ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \longrightarrow y = m(x - x_1) + y_1$$

のように変形しておき、この式に代入した方がより速く直線の方程式を求めることができます。

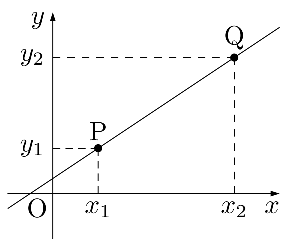
(1) 点 $(1,\ 2)$ を通り、傾き -3 の直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -3(x - 1) + 2 \\ &= -3x + 5 \end{aligned}$$

(2) 点 $(3,\ -2)$ を通り、傾き 5 の直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 5(x - 3) + (-2) \\ &= 5x - 17 \end{aligned}$$

3.2 通る 2 点から直線の方程式の決定



相異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾き m は、

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (\text{ただし、} x_1 \neq x_2)$$

となります。

通る 1 点と傾きがわかれば直線の方程式は決定されるので、2 点 P, Q を通る直線の方程式は、

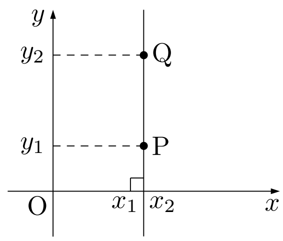
(i) 傾き m で点 P を通る直線の方程式

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \end{aligned}$$

(ii) 傾き m で点 Q を通る直線の方程式

$$\begin{aligned} y - y_2 &= m(x - x_2) \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) \end{aligned}$$

と表されます。この 2 つの式は一見すると異なりますが、計算するとどちらも同じ式になるので、どちらの点を利用しても問題ありません。



また、$x_1 = x_2$ のときは、y の値にかかわらず x の値が常に一定となるので、その直線の方程式は、

$$x = x_1 \quad (= x_2)$$

となり、x 軸に垂直（y 軸に平行）な直線となります。

【例題 3 − 2】

次の 2 点を通る直線の方程式を求めなさい。

(1) $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 8)$

(2) $\mathrm{C}(-1,\ -2)$, $\mathrm{D}(-5,\ -6)$

＜解説＞

2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は、

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

となるので、この式に条件を当てはめて直線の方程式を求めます。ただし、直線の方程式は

$$y = (x \text{ の式})$$

の形で表されることが多いので、あらかじめ

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

のように変形しておき、この式に条件を代入して直線の方程式を求めます。

(1) 2 点 A，B を通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{8-2}{5-3}(x-3)+2 \\ &= \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{2}^{\,1}}(x-3)+2 \\ &= 3x-7 \end{aligned}$$

(2) 2 点 C，D を通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{(-2)-(-6)}{(-1)-(-5)}\{x-(-1)\}+(-2) \\ &= \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{4}^{\,1}}(x+1)-2 \\ &= x-1 \end{aligned}$$

慣れてきたら、傾きは暗算で求めてしまい、通る 1 点として与えられた 2 点のうち計算しやすいどちらか一方の点を利用して、「傾きと通る 1 点から直線の方程式を求める」という考えで行うようにしてみてください。

4　2 直線の位置関係

4.1　2 直線の平行条件

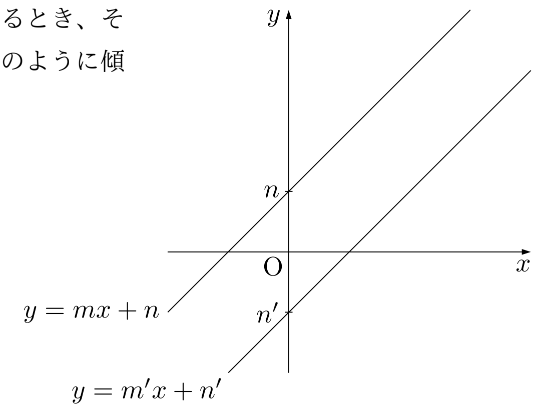
ある 2 つの直線 $y = mx + n$ と $y = m'x + n'$ が平行であるとき、そのようすを図に表すと右の図のようになり、図からも明らかのように傾きが等しくなります。つまり、

$$m = m'$$

のとき、2 つの直線は平行になり、

$$2\text{ 直線が平行} \iff \text{傾きが等しい}$$

となります。



図では y 切片 n と n' は、

$$n \fallingdotseq n'$$

となっていますが、

$$m = m' \quad \text{かつ} \quad n = n'$$

であるとき、2 つの直線は一致することになります。

【例題 4 − 1】

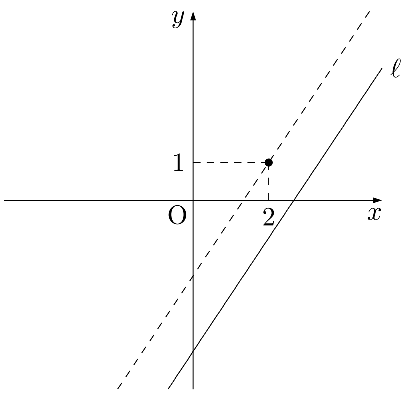
点 $(2,\ 1)$ を通り、$3x - 2y - 4 = 0$ に平行な直線を求めなさい。

＜解説＞

直線 $3x - 2y - 4 = 0$ を直線 ℓ とすると、

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 4 &= 0 \\ 2y &= 3x - 4 \\ y &= \frac{3}{2}x - 2 \end{aligned}$$

と変形できるので、直線 ℓ の傾きは $\dfrac{3}{2}$ であることがわかります。

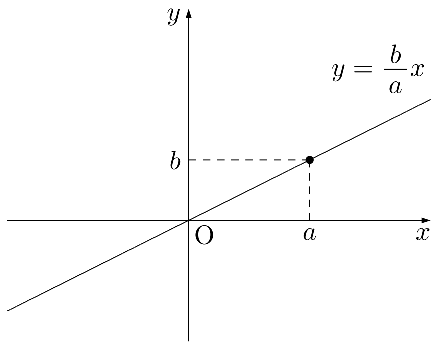


平行な直線は傾きが等しいので、求める直線は点 $(2,\ 1)$ を通り、傾き $\dfrac{3}{2}$ の直線になります。よって、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}(x - 2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}x - 2 \qquad (3x - 2y - 4 = 0) \end{aligned}$$

4.2　2 直線の垂直条件

2 つの直線の傾きが等しいとき、2 直線は平行になりますが、逆に言えば、2 つの直線の傾きが等しくないとき、2 直線は 1 点で交わることになります。そこで、2 直線が垂直に交わる条件について考えてみます。

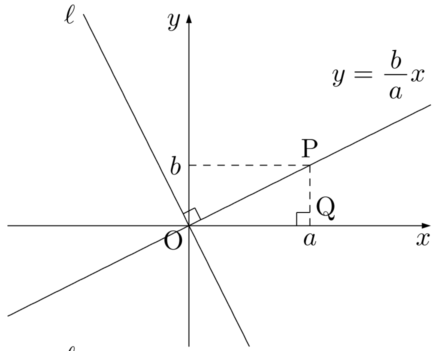


ここでは簡単にするため、右の図のような原点 O を通る傾き $\dfrac{b}{a}$ の直線、

$$y=\frac{b}{a}x \quad (ただし、a \fallingdotseq 0)$$

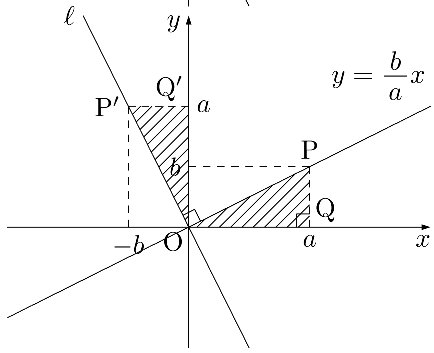
を考えます。

この直線に垂直な直線 ℓ を図示すると右の図のようになりますが、2 直線にどのような条件が成り立つのかがわかりにくいので、図のように、直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとり、点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q として、$\triangle\mathrm{POQ}$ を考えます。



直線 ℓ は、直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ を原点を中心に反時計回り（左回り）に 90 度回転させたものだと考えることができるので、同じようにして $\triangle\mathrm{POQ}$ を原点を中心に反時計回り（左回り）に 90 度回転させると、次の図の $\triangle\mathrm{P'OQ'}$ になります。

このとき、点 P は直線 ℓ 上に移り点 P′、点 Q は y 軸上に移り点 Q′ となり、$\triangle\mathrm{POQ}$ と $\triangle\mathrm{P'OQ'}$ は合同であるので、P′, Q′ それぞれの座標は



$$\mathrm{P'}(-b,\ a), \qquad \mathrm{Q'}(0,\ -a)$$

となります。

このことから、直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ となり、ある直線に垂直に交わる直線の傾きは、

「分子・分母と符号が逆になる」

という関係が成り立ちます。

また、このことを 2 直線の傾きを $m,\ m'$ としたとき、

$$mm'=-1$$

のように数式で表すこともできます。これは、先ほどの 2 直線の傾きの積を計算したとき、

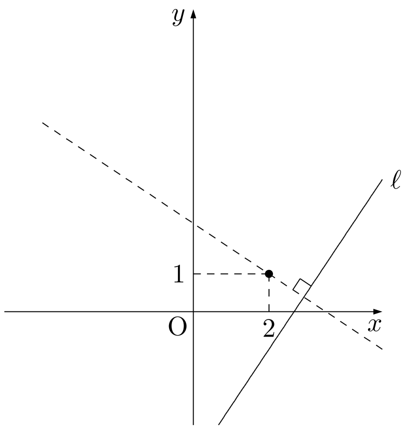
$$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

となることから理解できると思います。

【例題 4 − 2】

点 $(2,\ 1)$ を通り、$3x-2y-4=0$ に垂直な直線を求めなさい。

＜解説＞



直線 $3x-2y-4=0$ を直線 ℓ とすると、

$$\begin{aligned}3x-2y-4&=0\\ 2y&=3x-4\\ y&=\frac{3}{2}x-2\end{aligned}$$

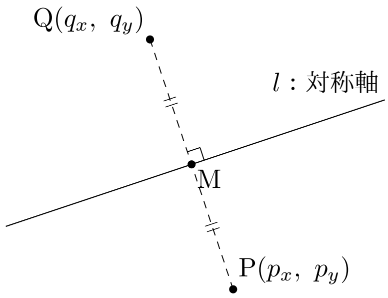
と変形できるので、直線 ℓ の傾きは $\frac{3}{2}$ であることがわかります。

垂直な直線の傾きは、基となる直線の傾きの「分子・分母と符号」を反対にしたものになるので、求める直線は点 $(2,\ 1)$ を通り、傾き $-\frac{2}{3}$ の直線になります。よって、その方程式は

$$\begin{aligned}y&=-\frac{2}{3}(x-2)+1\\ &=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\cdot(-2)+1\\ &=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}\qquad(2x+3y-7=0)\end{aligned}$$

4.3 線対称な点の座標

右の図のように、ある直線 ℓ に関して点 P と点 Q が線対称であるとします。このとき、直線と点 P がわかっていて、点 Q の座標を求める場合、x 座標と y 座標という 2 つの要素を求めなければいけないので、条件式が 2 つ必要になります。



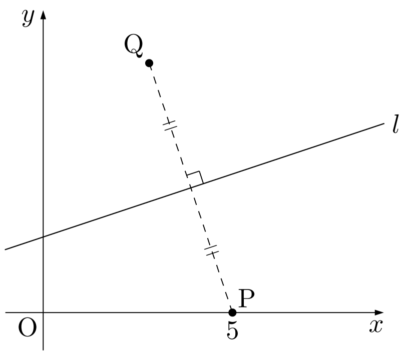
線対称な図形では、対称軸が、対称な 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線になるので、「垂直」で「二等分」という 2 つの条件が得られます。そのため、次のような 2 つの条件を考えることで、点 Q（対称な点）の座標を求めることができます。

① 直線 PQ $\perp \ell$

② 線分 PQ の中点（点 M）が直線 ℓ 上にある

【例題 4 − 3】

$y = \dfrac{1}{3}x + 2$ を ℓ とします。l に関して、点 P(5, 0) と対称な点 Q の座標を求めなさい。



＜解説＞

直線 l に関して点 P と点 Q が対称になっているので、l は対称軸です。つまり、l は線分 PQ の垂直二等分線になります。求める点 Q の座標を $(q_x,\ q_y)$ とおくと、$q_x,\ q_y$ と求めるものが 2 つあるので条件式も 2 つ必要になります。

まず、直線 PQ と l は垂直に交わるので、直線 PQ の傾きは直線 l の傾き $\dfrac{1}{3}$ の分子・分母と符号を反対にした -3 になります。つまり、

$$\frac{q_y - 0}{q_x - 5} = -3$$

$$q_y = -3q_x + 15 \ \cdots\cdots \ ①$$

が成り立ちます。

次に、P から直線 l までの距離と Q から直線 l までの距離が等しくなりますが、その距離を求めるのはやや面倒です。しかし、直線 PQ と l の交点はちょうど線分 PQ の中点になります。つまり、線分 PQ の中点

$\left(\dfrac{q_x+5}{2},\ \dfrac{q_y+0}{2}\right)$ が直線 l 上にあることになるので、

$$\begin{aligned}\frac{q_y+0}{2} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{q_x+5}{2}+2\\ 3q_y &= q_x+17 \ \cdots\cdots\ ②\end{aligned}$$

が成り立ちます。

①を②に代入して

$$\begin{aligned}3(-3q_x+15) &= q_x+17\\ -3q_x+45 &= q_x+17\\ 10q_x &= 28\\ q_x &= \frac{14}{5}\end{aligned}$$

これを①に代入して

$$\begin{aligned}q_y &= -3\cdot\frac{14}{5}+15\\ &= \frac{-42+75}{5}=\frac{33}{5}\end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{14}{5},\ \frac{33}{5}\right)$$

4.4 点と直線の距離

傾き m、y 切片が n である直線の方程式は、

$$y = mx + n$$

のように与えられましたが、直線の方程式は y と x を用いて表したものだけではなく、k を定数として、

$$x = k, \qquad y = k$$

などのように、x や y のみで表されるものもあります。

そこで、次のように $a,\ b,\ c$ を定数として、

$$ax + by + c = 0 \qquad (\text{ただし、} a \fallingdotseq 0 \quad \text{または} \quad b \fallingdotseq 0)$$

のように、x、y の 1 次方程式という形（これを「**直線の方程式の一般形**」ということがあります）で表すことで、次のように、すべての式を網羅することができるので、「$x = k$」や「$y = k$」の式も同等に扱うことができます。

① $a = 0,\ b \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + by + c &= 0 \\ by &= -c \\ y &= -\frac{c}{b} \end{aligned}$$

$b,\ c$ は定数なので、$-\dfrac{c}{b}$ も定数。そこで、新たな定数として、

$$-\frac{c}{b} = k$$

とすれば、

$$y = -\frac{c}{b} \longrightarrow y = k$$

② $a \fallingdotseq 0,\ b = 0$ のとき

$$\begin{aligned} ax + 0 \cdot y + c &= 0 \\ ax &= -c \\ x &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

$a,\ c$ は定数なので、$-\dfrac{c}{a}$ も定数。そこで、新たな定数として、

$$-\frac{c}{a} = k$$

とすれば、

$$x = -\frac{c}{a} \longrightarrow x = k$$

③ $a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0$ のとき

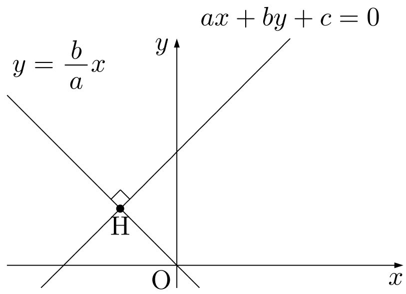
$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

$a,\ b,\ c$ は定数なので、$-\dfrac{a}{b},\ -\dfrac{c}{b}$ も定数。そこで、新たな定数として、

$$-\frac{a}{b} = m, \quad -\frac{c}{b} = n$$

とすれば、

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \longrightarrow y = mx + n$$



直線 $ax + by + c = 0$ の方程式は、

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

と変形できるので、原点を通りこの直線に垂直となる直線の方程式は、

$$y = \frac{b}{a}x$$

となります。

このとき、2 つの直線の交点を H とすると、点 H の座標は連立方程式

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & \cdots\cdots ① \\ y = \dfrac{b}{a}x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

より、②を①に代入して

$$\begin{aligned} ax + b \cdot \frac{b}{a}x + c &= 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{a}x &= -c \\ x &= \frac{-ac}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

これを②に代入して

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a} \cdot \frac{-ac}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{-bc}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

となるので、

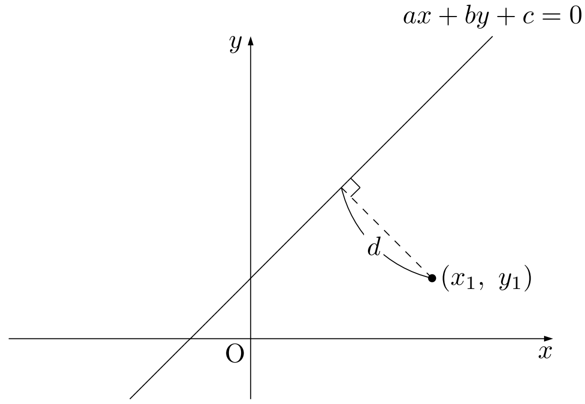
$$\mathrm{H}\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2},\ \frac{-bc}{a^2 + b^2}\right)$$

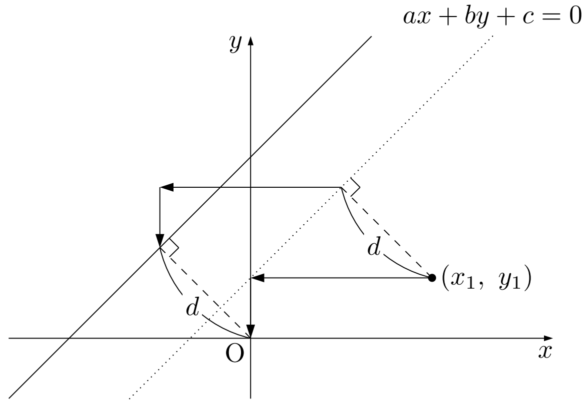
すると、OH の長さは 2 点間の距離の公式より、

$$\begin{aligned} \mathrm{OH} &= \sqrt{\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bc}{a^2 + b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

と表せ、この OH の長さが、原点 O と直線 $ax + by + c = 0$ との距離になります。

次に、次の図（左）のような、直線 $ax + by + c = 0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ との距離 d を考えますが、先ほど求めた原点と直線との距離を求める公式を利用するため、点 $(x_1,\ y_1)$ が原点になるように、それぞれ x 軸方向に $-x_1$、y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動させると、次の図（右）のようになります。





ここで、直線 $ax+by+c=0$ を x 軸方向に $-x_1$、y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動した直線の方程式は、

$$
\begin{aligned}
&a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0\\
&ax+by+(ax_1+by_1+c)=0
\end{aligned}
$$

と表されます。

点と直線をそれぞれ同じ方向に同じ距離だけ平行移動させても、互いの距離の関係は変わらないので、求める距離 d は、原点 O と直線 $ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$ との距離を考えればよいことになります。

そこで、先程の OH の長さを求めた式③において、

$$c \quad \longrightarrow \quad ax_1+by_1+c$$

と置き換えるにより、距離 d は、

$$d=\frac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と表されます。

【例題 4 − 4】

点 $(-2,\ 1)$ と次の直線との距離を求めなさい。

(1) $y=x$　　(2) $y=2x-5$　　(3) $3x-4y-1=0$

＜解説＞

直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ との距離 d は

$$d=\frac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となりましたが、やや複雑な形をしていて覚えにくいものだと思いますが、

$$d=\frac{|\,\text{直線の式（一般形）の左辺に点の座標を代入したもの}\,|}{\sqrt{\text{直線の係数の平方の和}}}$$

であると考えるとイメージしやすいと思います。

(1) まずは、公式に代入しやすいよう直線の方程式を一般形に直します。

$$x - y = 0$$

そして、公式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{|-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} &= \frac{|-3|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(2) 直線の方程式を一般形に直すと

$$2x - y - 5 = 0$$

となるので、公式より

$$\begin{aligned}\frac{|2\cdot(-2)-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} &= \frac{|-10|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\cancel{10}^{\,2}\sqrt{5}}{\cancel{5}} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

(3) すでに直線の方程式は一般形になっているので、公式を利用して、

$$\begin{aligned}\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot1-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} &= \frac{|-11|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{11}{5}\end{aligned}$$

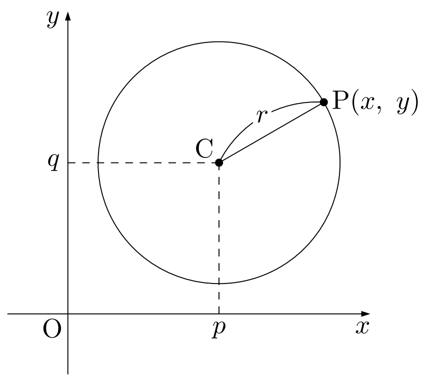
5　円の方程式

5.1　円の方程式の基本形

右の図のように、中心 C$(p,\ q)$、半径 r の円があるとします。

円は、ある定点からの距離が一定である点の集まりであるので、円周上の任意の点 P$(x,\ y)$ と円の中心との距離は一定で r となり、

$$\mathrm{CP} = r \ \cdots\cdots\ ①$$



と表せます。

また、2 点間の距離の公式から

$$\mathrm{CP} = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} \ \cdots\cdots\ ②$$

であるので、①, ②より

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} = r$$

と表すことができます。このままでもいいのですが両辺を 2 乗して左辺の根号をなくすと、

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$$

となり、これが中心 $(p,\ q)$、半径 r の円の方程式になり、このように、円の中心と半径 r がわかる円の方程式の形を、円の方程式の**基本形**といいます。

また、原点を中心とする半径 r の円の方程式は、中心 $(0,\ 0)$、半径 r の円の方程式であるので、

$$x^2+y^2=r^2$$

と表されます。

【例題 5 － 1】

次の円の方程式を求めなさい。

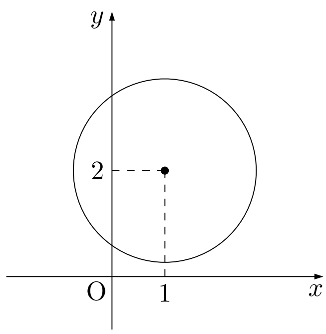
(1) 中心が $(1,\ 2)$ で半径が $\sqrt{3}$ の円　　(2) 2 点 $(-3,\ 1)$, $(1,\ 3)$ を直径の両端とする円

＜解説＞

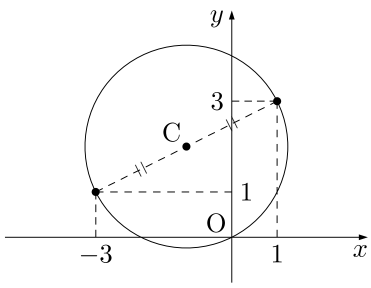
(1) 円の中心と半径が与えられているので、公式にあてはめれば、求める円の方程式は、

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{3})^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 3$$

となります。



(2) 円の方程式を求めるためには、円の中心の座標と半径が必要です。
与えられた 2 点を A(−3, 1), B(1, 3) とすると、AB が直径であるので、円の中心は AB の中点になり、その点を C$(c_x,\ c_y)$ とすると、



$$c_x = \frac{-3+1}{2} = -1, \qquad c_y = \frac{1+3}{2} = 2$$

より、円の中心の座標は、

$$\mathrm{C}(-1,\ 2)$$

となります。
また、円の半径を r とすると、

$$r = \mathrm{CA} = \mathrm{CB}$$

であるので、2 点間の距離の公式から

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\{-1-(-3)\}^2 + (2-1)^2} \\ &= \sqrt{2^1 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

となります。
以上のことから、求める円の方程式は、中心 $(-1,\ 2)$、半径 $\sqrt{5}$ の円の方程式であるので、

$$\begin{aligned} \{x-(-1)\}^2 + (y-2)^2 &= (\sqrt{5})^2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 5 \end{aligned}$$

5.2 円の方程式の一般形

中心 $(p,\ q)$、半径 r の円の方程式の基本形は、

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

と表されました。この式の左辺を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2&=r^2 \\ x^2+y^2-2px-2qy+(p^2+q^2-r^2)&=0 \ \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$-2p=l,\quad -2q=m,\quad p^2+q^2-r^2=n \qquad (l,\ m,\ n\ \text{は定数})$$

とおくと、①の式は

$$x^2+y^2+lx+my+n=0\ \cdots\cdots \text{②}$$

のようにして表すことができ、この式の形を、円の方程式の**一般形**といいます。

円の方程式の一般形では、円の中心や半径がどのような値になるのかを判断することができないので、円の中心や半径を求める場合には、円の方程式を一般形から基本形に変形する必要があります。

円の方程式の基本形から一般形に変形した逆の手順、つまり、式②を $x,\ y$ について平方完成をすればよいので、

$$\begin{aligned} x^2+y^2+lx+my+n&=0 \\ (x^2+lx)+(y^2+my)&=-n \\ \left\{x^2+lx+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}+\left\{y^2+my+\left(\frac{m}{2}\right)^2\right\}&=-n+\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2 \\ \left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2&=\frac{l^2+m^2-4n}{4}\ \cdots\cdots \text{③} \end{aligned}$$

のように変形でき、この式から

$$\text{中心}\left(-\frac{l}{2},\ -\frac{m}{2}\right)\text{、半径}\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}\text{の円}$$

であることがわかります。ただし、

$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2\geqq 0,\qquad \left(y+\frac{m}{2}\right)^2\geqq 0$$

であるので、③の等式が成り立つためには、

$$\frac{l^2+m^2-4n}{4}\geqq 0$$

でなければいけません。つまり、②の方程式は常に円を表す方程式というわけではなく、$\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}$ の符号によって、次のようになります。

(ｉ) $\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}>0$：中心 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$、半径 $\dfrac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$ の円

(ii) $\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}=0$：点 $\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$

(iii) $\dfrac{l^2+m^2-4n}{4}<0$：③を満たす実数 $x,\ y$ は存在しないので、何の図形も表さない

【例題 5 − 2】

次の方程式はどのような曲線を表しますか。

(1) $x^2+y^2-4x+8y+16=0$　　(2) $3x^2+3y^2-6x+3y-12=0$

＜解説＞

(1) $x,\ y$ について平方完成をすると、

$$\begin{aligned}(x^2-4x)+(y^2+8y)&=-16\\(x^2-4x+2^2)+(y^2+8y+4^2)&=-16+2^2+4^2\\(x-2)^2+(y+4)^2&=4\end{aligned}$$

となるので、方程式は

中心 $(2,\ -4)$、半径 2 の円

を表します。

(2) 左辺のすべての項は「3」を共通因数に持つので、両辺を 3 で割ると

$$x^2+y^2-2x+y-4=0$$

となります。この式を $x,\ y$ について平方完成をすると、

$$\begin{aligned}(x^2-2x)+(y^2+y)&=4\\(x^2-2x+1^2)+\left\{y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}&=4+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2&=\frac{21}{4}\end{aligned}$$

となるので、方程式は

中心 $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$、半径 $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ の円

を表します。

5.3　通る 3 点から円の方程式の決定

【例題 5 − 3】

3 点 A(5, 5), B(4, 6), C(−3, −1) を通る円の方程式を求めなさい。

＜解説＞

求める円の方程式を

(i) 円の方程式の基本形

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

(ii) 円の方程式の一般形

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

のどちらを用いるのか検討する必要があります。

この問題では、通る点に関しての条件が与えられているので、方程式に座標を代入しても等式は成り立ちます。そのときに得られる等式は、円の方程式の基本形では、p, q, r の 2 次方程式。円の方程式の一般形では、l, m, n の 1 次方程式になり、2 次方程式よりも 1 次方程式の方が解きやすいため、この問題では円の方程式の一般形を利用するべきだと判断できます。そこで、求める円の方程式を

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \cdots\cdots ①$$

とすると、点 A(5, 5) を通るので、

$$5^2+5^2+5l+5m+n=0$$
$$5l+5m+n=-50 \cdots\cdots ②$$

また、点 B(4, 6) も通るので、

$$4^2+6^2+4l+6m+n=0$$
$$4l+6m+n=-52 \cdots\cdots ③$$

そして、点 C(−3, −1) も通るので、

$$(-3)^2+(-1)^2+(-3)l+(-1)m+n=0$$
$$-3l-m+n=-10$$
$$3l+m-n=10 \cdots\cdots ④$$

という l, m, n の 3 つの 1 次方程式が得られます。このとき、② − ③ より

$$l-m=2 \cdots\cdots ⑤$$

また、③ + ④ より

$$7l+7m=-42$$
$$l+m=-6 \cdots\cdots ⑥$$

となるので、⑤ + ⑥ より

$$2l=-4$$
$$l=-2$$

これを⑥に代入して

$$\begin{aligned}(-2)+m&=-6\\ m&=-4\end{aligned}$$

そして、②に $l=-2,\ m=-4$ を代入すれば

$$\begin{aligned}5\cdot(-2)+5\cdot(-4)+n&=-50\\ n&=-20\end{aligned}$$

となります。よって、求める円の方程式は、以上の結果を①に代入して、

$$x^2+y^2-2x-4y-20=0$$

となります。

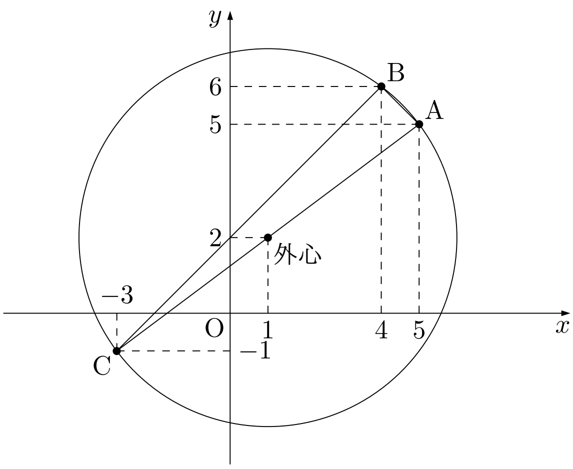
＜補足＞

円の方程式 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ を基本形に変形すると、

$$\begin{aligned}(x^2-2x)+(y^2-4y)&=20\\ (x^2-2x+1^2)+(y^2-4y+2^2)&=20+1^2+2^2\\ (x-1)^2+(y-2)^2&=25\end{aligned}$$

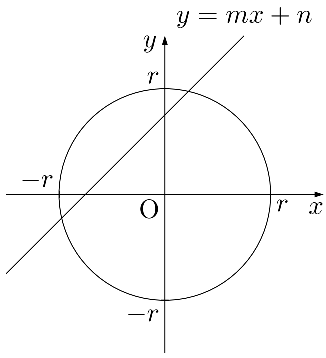
となるので、この円の方程式は、中心 $(1,\ 2)$、半径 5 の円を表していて、この円を図示すると右の図のようになります。

この図からもわかるように、中心 $(1,\ 2)$、半径 5 の円は、$\triangle$ABC の外接円となり、点 $(1,\ 2)$ は外心になります。



6　円と直線

6.1　円と直線の共有点の座標



中心 (0, 0)、半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と、傾き m、切片 n の直線 $y=mx+n$ の共有点の座標は、それぞれの方程式を同時に成り立たせる x, y の値の組を求めることになります。つまり、連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

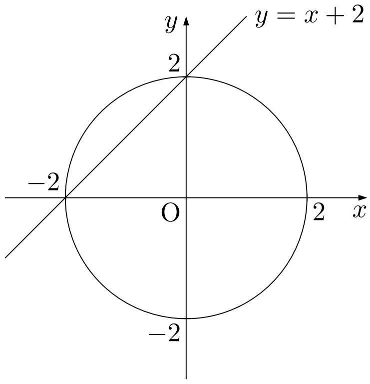
を解き、そのとき得られる実数解が共有点の座標になります。

実際に連立方程式を解くときには、②を①に代入し、y を消去することで x の値を求め、求めた x の値を②に代入することで y の値を決定します。

【例題 6 − 1】

円 $x^2+y^2=4$、直線 $y=x+2$ の共有点の座標を求めなさい。

＜解説＞



円 $x^2+y^2=4$ は、中心 (0, 0)、半径 2 の円です。また、直線 $y=x+2$ は、傾き 1 で点 (0, 2) を通る直線であるので、図示すると次のようになります。

すると、円と直線の共有点の座標は、計算しなくても

$$(-2,\ 0), \qquad (0,\ 2)$$

と求めることができてしまいますが、連立方程式を利用しても解けることを確認します。

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=x+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とすると、②を①に代入して

$$\begin{aligned} x^2+(x+2)^2&=4 \\ x^2+x^2+4x+4-4&=0 \\ 2x^2+4x&=0 \\ x^2+2x&=0 \\ x(x+2)&=0 \\ x&=0,\ -2 \end{aligned}$$

これを②に代入すると、

(i) $x = 0$ のとき

$$y = 0 + 2 = 2$$

(ii) $x = -2$ のとき

$$y = (-2) + 2 = 0$$

となるので、円と直線の共有点の座標は、

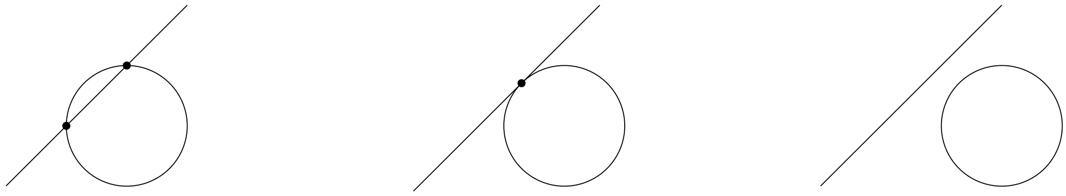
$$(0,\ 2), \qquad (-2,\ 0)$$

となります。

6.2 円と直線の位置関係（判別式）

円と直線があるとき、

(i) 異なる 2 点で交わる　　(ii) 接する　　(iii) 共有点をもたない



という 3 つの位置関係が考えられます。

また、円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=mx+n \end{cases}$$

という連立方程式の実数解で与えられました。この 2 つの式から y を消去して整理すると、

$$ax^2+bx+c=0$$

というような x の 2 次方程式が得られるので、この 2 次方程式の実数解の個数と共有点の個数とは一致することになります。

このことから、2 次方程式の判別式 $D=b^2-4ac$ を用いると、円と直線の位置関係は次のようにまとめることができます。

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数	異なる 2 つの実数解	1 つ（重解）	なし
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる	接する	共有点をもたない
円と直線の共有点の個数	2 個	1 個	0 個

【例題 6 − 2】

円 $x^2+y^2=16$ と次の各直線の共有点の個数を求めなさい。

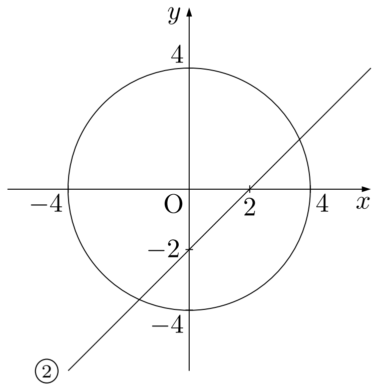
(1) $y=x-2$　　(2) $y=-2x+4\sqrt{5}$　　(3) $y=2x+9$

＜解説＞

円の方程式を

$$x^2+y^2=16 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とします。



(1) 直線の方程式を

$$y = x - 2 \ \cdots\cdots \ ②$$

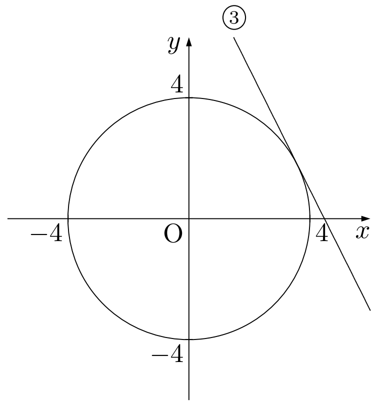
とすると、②を①に代入して y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2 + (x-2)^2 &= 16 \\ x^2 + x^2 - 4x + 4 - 16 &= 0 \\ 2x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ x^2 - 2x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

という x の 2 次方程式が得られます。この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot (-6) = 7 > 0$$

となるので、円と直線の共有点は 2 個。



(2) 直線の方程式を

$$y = -2x + 4\sqrt{5} \ \cdots\cdots \ ③$$

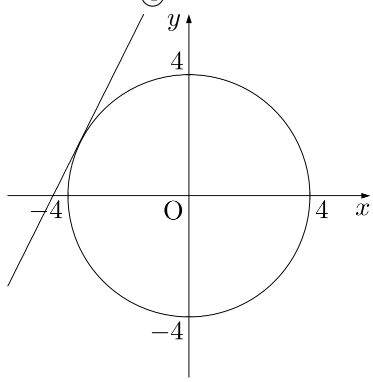
とすると、③を①に代入して y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x + 4\sqrt{5})^2 &= 16 \\ x^2 + 4x^2 - 16\sqrt{5}x + 80 - 16 &= 0 \\ 5x^2 - 16\sqrt{5}x + 64 &= 0 \end{aligned}$$

という x の 2 次方程式が得られます。この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = (-8\sqrt{5})^2 - 5 \cdot 64 = 0$$

となるので、円と直線の共有点は 1 個。



(3) 直線の方程式を

$$y = 2x + 9 \ \cdots\cdots \ ④$$

とすると、④を①に代入して y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2 + (2x+9)^2 &= 16 \\ x^2 + 4x^2 + 36x + 81 - 16 &= 0 \\ 5x^2 + 36x + 65 &= 0 \end{aligned}$$

という x の 2 次方程式が得られます。この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 18^2 - 5 \cdot 65 = -1 < 0$$

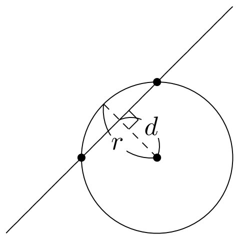
となるので、円と直線の共有点は 0 個。

6.3　円と直線の位置関係（点と直線の距離）

円と直線の位置関係は、円の中心から直線までの距離を考えることにより判断することもできます。

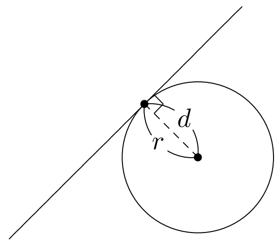
円の中心から直線までの距離を d、円の半径を r とすると、

(i) $d < r$ のとき



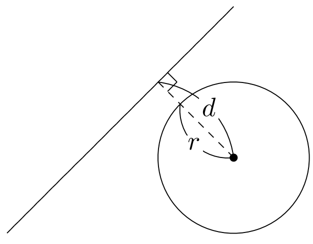
異なる 2 点で交わる

(ii) $d = r$ のとき



接する

(iii) $d > r$ のとき



共有点をもたない

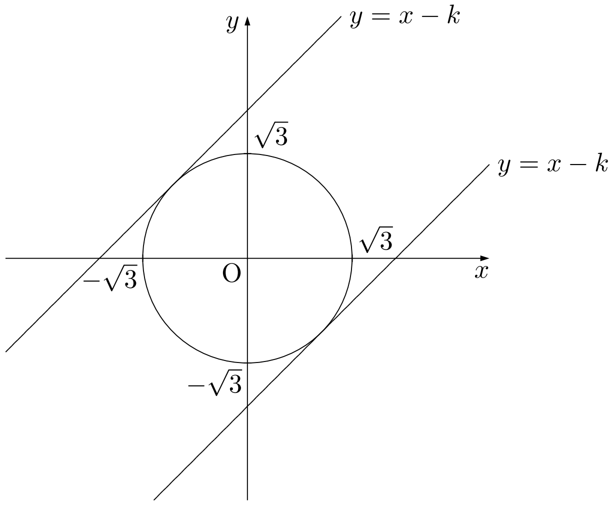
【例題 6 − 3】

直線 $y = x - k$ が円 $x^2 + y^2 = 3$ に接するように定数 k の値を定めなさい。

＜解説＞

直線 $y = x - k$ は、傾き 1、y 切片 $-k$ の直線になります。この直線は傾き 1 を保ったまま、k の値によって上下に動くことになります。

円 $x^2 + y^2 = 3$ は、中心 $(0,\ 0)$、半径 $\sqrt{3}$ の円になるので、直線と円が接するとき、右の図のようになります。



直線の方程式 $y = x - k$ は

$$x - y - k = 0$$

と、一般形に変形できるので、この直線と点 $(0,\ 0)$ との距離は、点と直線の距離の公式から

$$\frac{|0 - 0 - k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

となります。

この距離が円の半径と一致するとき、円と直線は接することができるので、そのときの k の値は

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$|k| = \sqrt{6}$$

$$k = \pm\sqrt{6}$$

となります。

また、この例題は 2 次方程式の判別式を利用しても解くことができます。

$$\begin{cases} y = x - k & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 3 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

とすると、①を②に代入して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (x-k)^2 &= 3 \\ x^2 + x^2 - 2kx + k^2 - 3 &= 0 \\ 2x^2 - 2kx + k^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

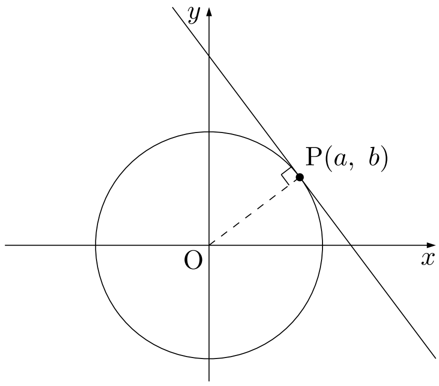
となります。円と直線が接するとき、この 2 次方程式の判別式 D が

$$D = 0$$

となればよいので、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 3) &= 0 \\ k^2 - 2k^2 + 6 &= 0 \\ k^2 &= 6 \\ k &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

6.4 円上の点における接線の方程式



原点を中心とする半径 r の円周上の点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式を考えます。

このとき、円の中心 O と点 P を結ぶ直線 OP は接線と垂直に交わるので、直線 OP の傾きが $\dfrac{b}{a}$ となることから、接線の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ になります。よって、点 P における円の接線は、

傾き $-\dfrac{a}{b}$、点 $(a,\ b)$ を通る直線

ということになるので、その方程式は、

$$y=-\frac{a}{b}(x-a)+b$$

と表されます。

この式を変形して整理すると

$$\begin{aligned} y&=-\frac{a}{b}(x-a)+b \\ by&=-a(x-a)+b^2 \\ by&=-ax+a^2+b^2 \\ ax+by&=a^2+b^2 \ \cdots\cdots\ ① \end{aligned}$$

となります。また、点 P$(a,\ b)$ は円周上の点であるので、円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ に代入して、

$$a^2+b^2=r^2 \ \cdots\cdots\ ②$$

が成り立ちます。よって、①, ②より、円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式は、

$$ax+by=r^2$$

と表されます。

【例題 6 − 4】

次の円周上の与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=6$ $(2,\ \sqrt{2})$　　(2) $x^2+y^2=25$ $(4,\ -3)$

＜解説＞

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式は、

$$ax+by=r^2$$

と表されますが、これは円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ を

$$xx+yy=r^2$$

のようにして表したとき、2 つずつある x と y の 1 つに、それぞれ接点の座標を代入したものだと考えることができます。

(1) 円の方程式 $x^2+y^2=6$ を

$$xx+yy=6$$

と変形すると、接点 $(2,\ \sqrt{2})$ より、$x,\ y$ の 1 つに $x=2,\ y=\sqrt{2}$ を代入して、求める接線の方程式は、

$$2x+\sqrt{2}y=6$$

(2) 円の方程式 $x^2+y^2=25$ を

$$xx+yy=25$$

と変形すると、接点 $(4,\ -3)$ より、$x,\ y$ の 1 つに $x=4,\ y=-3$ を代入して、求める接線の方程式は、

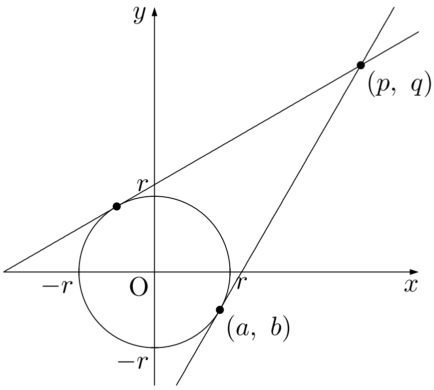
$$4x-3y=25$$

6.5 円外の点から円に引いた接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は、

$$ax+by=r^2$$

となることを学習しましたが、円外の点から円に引いた接線の方程式を求める場合には、この公式を直接利用することができません。そこで、この接線の公式を利用するために、接点の座標を求めることを考えます。



当たり前のことですが、接点は、接線上の点であり、なおかつ、円上の点であるので、その条件式を連立させることで求めることができます。具体的な手順は次のようになります。

(i) 接点の座標を適当な文字でおき、接線の方程式をその文字を使って表す。

接点 $(a,\ b) \longrightarrow$ 接線の方程式：$ax+by=r^2$

(ii) 接線が円外の点を通ることから関係式を作る。

円外の点 $(p,\ q) \longrightarrow ap+bq=r^2$

(iii) 接点が円上の点であることから関係式を作る。

円の方程式：$x^2+y^2=r^2 \longrightarrow a^2+b^2=r^2$

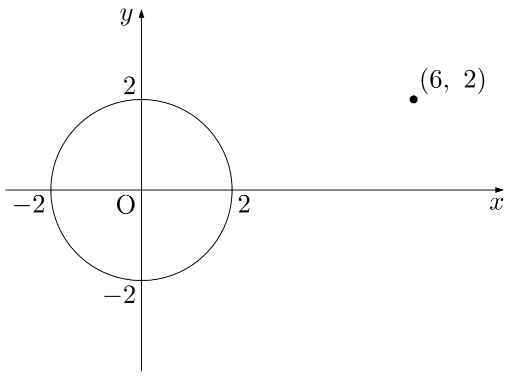
(iv) (ii), (iii) から接点と接線の方程式を求める。

【例題 6 − 5】

点 $(6,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞

円の接線の公式は、「円上の点における」接線の公式であるので、この例題の右の図のように、円外の点である場合には、その点の座標を代入して公式を用いることはできません。そこで、まずは先ほど説明した手順により、接点の座標を求めることを考えます。



(i) 接点の座標を適当な文字でおき、接線の方程式をその文字を使って表す。

点 $(6,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=4$ に接線を引くとき、その接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とします。すると、点 P は円周上の点であるので円の接線の公式を利用することができ、その接線を

$$ax+by=4 \ \cdots\cdots \ ①$$

と表すことができます。

(ii) 接線が円外の点を通ることから関係式を作る。
①の直線が (6, 2) を通るので、

$$6a+2b=4$$
$$3a+b=2$$
$$b=-3a+2 \cdots\cdots ②$$

(iii) 接点が円上の点であることから関係式を作る。
点 P は円周上の点であることから、円の方程式に座標を代入しても等式は成り立つので、

$$a^2+b^2=4 \cdots\cdots ③$$

となります。

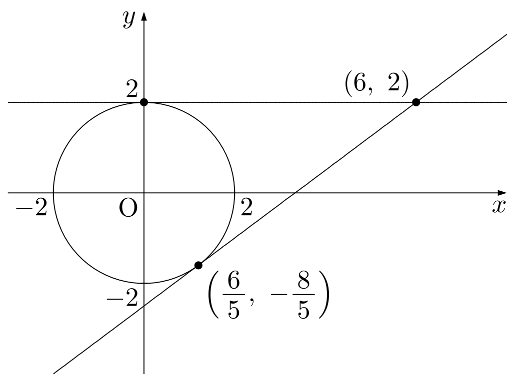
(iv) (ii), (iii) から接点と接線の方程式を求める。
②を③に代入して整理すると、

$$a^2+(-3a+2)^2=4$$
$$a^2+9a^2-12a+4-4=0$$
$$10a^2-12a=0$$
$$5a^2-6a=0$$

と a の 2 次方程式が得られるので、この方程式を解くと

$$a(5a-6)=0$$
$$a=0,\ \frac{6}{5}$$

となります。



(i) $a=0$ のとき
②より

$$b=-3\cdot 0+2=2$$

よって、$a=0,\ b=2$ を①に代入すれば、円の方程式は、

$$2y=4$$

つまり、

$$y=2$$

(ii) $a=\frac{6}{5}$ のとき
②より

$$b=-3\cdot\frac{6}{5}+2=-\frac{8}{5}$$

よって、$a = \frac{6}{5}$, $b = -\frac{8}{5}$ を①に代入すれば、円の方程式は、

$$\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y = 4$$

つまり、

$$3x - 4y = 10$$

以上より、求める円の方程式は

$$y = 2, \qquad 3x - 4y = 10$$

となります。円外の点から円に接線を引くとき、接線が 2 本引けることに注意しましょう。