# 【数学 II】微分法

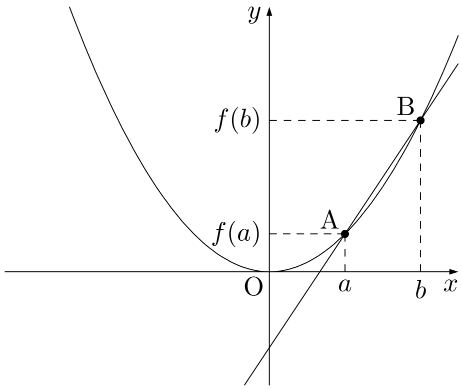
まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

# 目次

# 1　微分係数

## 1.1　平均変化率




関数 $y=f(x)$ において、$x$ が $a$ から $b$ まで変化するときの $x$ の変化量に対する $y$ の変化量の割合を、$x$ が $a$ から $b$ まで変化するときの関数 $f(x)$ の**平均変化率**といい、

$$(\text{平均変化率})=\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

と表されます。

この平均変化率は、$y=f(x)$ という曲線のグラフ上では、右図のように曲線上の異なる 2 点を通る**直線の傾き**になります。

【例題 1 − 1】

関数 $f(x)=x^2+2x+3$ において、$x$ の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1) $-1$ から 1 まで　　(2) $a$ から $a+h$ まで

＜解説＞

$y$ の変化量は計算量が多くなるので、定義式に代入する前に先に計算しておきます。

(1)

$$\begin{aligned} f(1)-f(-1)&=(1^2+2\cdot1+3)-\{(-1)^2+2\cdot(-1)+3\}\\ &=6-2=4 \end{aligned}$$

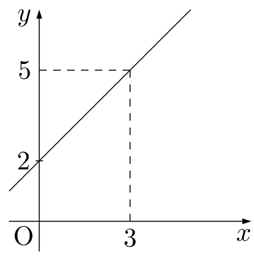
$$(\text{平均変化率})=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{4}{2}=2$$

(2)

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a)&=\{(a+h)^2+2(a+h)+3\}-(a^2+2a+3)\\ &=(a^2+2ah+h^2+2a+2h+3)-(a^2+2a+3)\\ &=2ah+h^2+2h=(2a+2)h+h^2 \end{aligned}$$

$$(\text{平均変化率})=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{(2a+2)h+h^2}{h}=2a+2+h$$

## 1.2　極限値




関数 $f(x) = x + 2$ において、$x$ が 3 と異なる値をとりながら 3 に限りなく近づくと、関数 $f(x)$ は限りなく 5 に近づきます。このことを、「$x$ が 3 に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**は 5 である」といい、

$$x \longrightarrow 3 \text{ のとき } f(x) \longrightarrow 5 \qquad \text{や} \qquad \lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

のようにして表します。

一般的に、関数 $y = f(x)$ において、「($x \fallingdotseq a$ のもとで) $x$ が $a$ に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限値は $A$ である」場合、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow A \qquad\qquad \lim_{x \to a} f(x) = A$$

のようにして表します。

【例題 1 − 2】

次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1}(5x - 6)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to -1}(x^2 - 4x + 5)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 2}(x - 3)(x + 1)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x \to -2}\frac{5x + 9}{x - 3}$

＜解説＞

関数 $f(x)$ において、$f(a)$ が存在すれば、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

として求めれば問題ありません。

(1) $x = 1$ のとき、

$$5 \cdot 1 - 6 = -1$$

となるので、

$$\lim_{x \to 1}(5x - 6) = -1$$

(2) $x = -1$ のとき、

$$(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 5 = 10$$

となるので、

$$\lim_{x \to -1}(x^2 - 4x + 5) = 10$$

(3) $x = 2$ のとき、

$$(2 - 3)(2 + 1) = -3$$

となるので、

$$\lim_{x \to 2}(x - 3)(x + 1) = -3$$

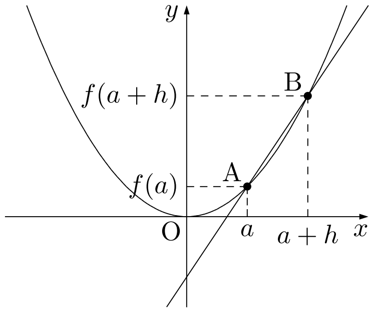
(4) $x - -2$ のとき、

$$\frac{5 \cdot (-2) + 9}{-2 - 3} = \frac{1}{5}$$

となるので、

$$\lim_{x \to -2}\frac{5x + 9}{x - 3} = \frac{1}{5}$$

## 1.3 微分係数




関数 $y=f(x)$ の $x$ が $a$ から $a+h$ まで変化するとき、その平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において、$h$ を限りなく 0 に近づけたとき、この極限が存在するならば、その値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**（**変化率**）といい、$f'(a)$ と表します。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

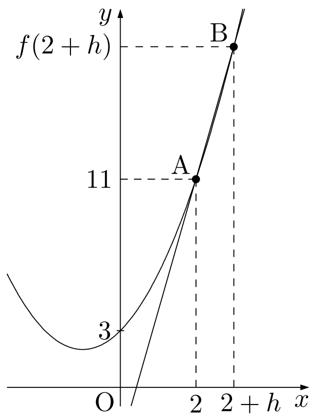
右の図のような曲線 $y=f(x)$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(a+h,\ f(a+h))$ があるとき、$x$ が $a$ から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は、直線 AB の傾きになります。ここで $h$ を限りなく 0 に近づけると、点 B は点 A に限りなく近づくことになり、2 点 A, B がほとんど重なっている状態になります。このとき、直線 AB の傾きは点 A における接線になると考えることができます。このことから、$f'(a)$（微分係数）は、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを表します。

【例題 1 − 3】

$f(x)=x^2+2x+3$ について次の微分係数を求めなさい。

(1) $f'(2)$　　(2) $f'(a)$

＜解説＞

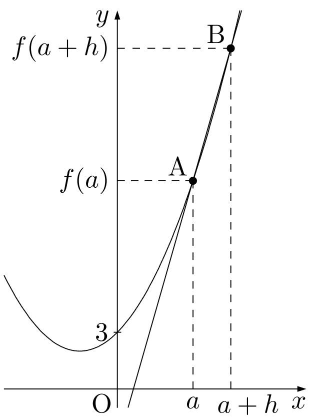



(1) 微分係数の定義式より、

$$\begin{aligned}
f(2+h)&=(2+h)^2+2(2+h)+3\\
&=4+4h+h^2+4+2h+3\\
f(2)&=2^2+2\cdot 2+3\\
&=4+4+3\\
f(2+h)-f(2)&=6h+h^2\\
f'(2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(6+h)=6
\end{aligned}$$

(2) 微分係数の定義式より、

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= (a+h)^2 + 2(a+h) + 3 \\
&= a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h + 3 \\
f(a) &= a^2 + 2a + 3 \\
f(a+h) - f(a) &= (2a+2)h + h^2 \\
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2a+2)h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2a + 2 + h) = 2a + 2
\end{aligned}
$$



# 2 導関数

## 2.1 導関数

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき、$x=a$ における微分係数は $f'(a)$ となりました。この $f'(a)$ の値は $a$ の値を 1 つ決めると、$f'(a)$ の値もただ 1 つに決まるので、$f'(a)$ は $a$ の関数であるといえます。そこで、$a$ を $x$ に書き改め、この関数を $f'(x)$ と表し、これを関数 $f(x)$ の**導関数**といいます。つまり、$f'(x)$ は、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

のように定義されます。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを、$f(x)$ **を（$x$ について）微分する**といい、関数 $y=f(x)$ の導関数は、

$$y',\quad f'(x),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

のようにいろいろな記号で表されます。

【例題 2 − 1】

定義に従って次の関数を微分しなさい。

(1) $f(x)=5$　(2) $f(x)=5x-7$　(3) $f(x)=x^2$　(4) $f(x)=x^3$

＜解説＞

(1)

$$\begin{aligned} f(x+h)&=5\\ f(x+h)-f(x)&=5-5=0\\ f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}0=0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x+h)&=5(x+h)-7\\ &=5x+5h-7\\ f(x+h)-f(x)&=5h\\ f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}5=5 \end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^2 \\
&= x^2+2xh+h^2 \\
f(x+h)-f(x) &= 2xh+h^2 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^3 \\
&= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \\
f(x+h)-f(x) &= 3x^2h+3xh^2+h^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

### 2.2　微分法の公式

① 定数関数 $f(x)=c$　（$c$：定数）の微分

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

② 関数 $f(x)=x^n$ の微分

$n$ を自然数とすると、二項定理より、

$$\begin{aligned}f(x+h)&=(x+h)^n\\&=x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n\end{aligned}$$

となるので、

$$f(x+h)-f(x)={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1})\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$

③ $kf(x)$（$k$：定数）の微分

$$\begin{aligned}\{kf(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}\\&=k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=kf'(x)\end{aligned}$$

④ $f(x)+g(x)$ の微分

$$\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

関数の和を微分するときは、各関数を微分したものの和をとればよいことになります。

【例題 2 − 2】

次の関数の微分をしなさい。

(1) $y=x^3-4x^2+5x-7$　　(2) $y=2x^2-3x+9$

＜解説＞

(1)

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^3 - 4x^2 + 5x - 7)' \\
&= (x^3)' - (4x^2)' + (5x)' - (7)' \\
&= (x^3)' - 4(x^2) + 5(x)' - (7)' \\
&= 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 \\
&= 3x^2 - 8x + 5
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
y' &= (2x^2 - 3x + 9)' \\
&= (2x^2)' - (3x)' + (9)' \\
&= 2(x^2)' - 3(x)' + (9)' \\
&= 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 \\
&= 4x - 3
\end{aligned}
$$

## 2.3 微分係数の条件から関数の決定

【例題 2 − 3】

2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき、$f(x)$ をそれぞれ求めなさい。

(1) $f(2) = 7,\ f'(0) = 3,\ f'(1) = -1$　　(2) $f(x) + xf'(x) = -3x^2 + 4x + 3$

＜解説＞

関数 $f(x)$ は 2 次関数であるので、定数 $a,\ b,\ c$ を用いて、

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と表すことができます。すると、

$$f'(x) = 2ax + b$$

となるので、これらの式を用いて、問題の条件から $a,\ b,\ c$ の値を決定し、$f(x)$ を求めていきます。

(1) 問題の条件から、

$$\begin{cases} f(2) = 4a + 2b + c = 7 & \cdots\cdots \text{①} \\ f'(0) = b = 3 & \cdots\cdots \text{②} \\ f'(1) = 2a + b = -1 & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

②, ③より

$$\begin{aligned} 2a + 3 &= -1 \\ 2a &= -4 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

この値と②を①に代入して、

$$\begin{aligned} -8 + 6 + c &= 7 \\ -2 + c &= 7 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

よって、

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 9$$

(2) 問題の条件から、

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c + x(2ax + b) &= -3x^2 + 4x + 3 \\ ax^2 + bx + c + 2ax^2 + bx &= -3x^2 + 4x + 3 \\ 3ax^2 + 2bx + c &= -3x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

これが $x$ についての恒等式であるので、係数を比較して、

$$3a = -3, \quad 2b = 4, \quad c = 3$$

つまり、

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = 3$$

となるので、

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

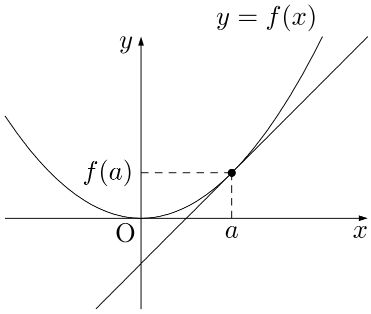
# 3　接線の方程式

## 3.1　接線の方程式

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ での微分係数 $f'(a)$ は、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ での接線の傾きを表すので、その点 A における接線の方程式は、

$$
\begin{aligned}
y-f(a)&=f'(a)(x-a)\\
y&=f'(a)(x-a)+f(a)
\end{aligned}
$$

と表すことができます。




【例題 3 − 1】

関数 $f(x)=x^2-3x+2$ 上の点 $(3,\ 2)$ における接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞

$f(x)$ を $x$ で微分すると、

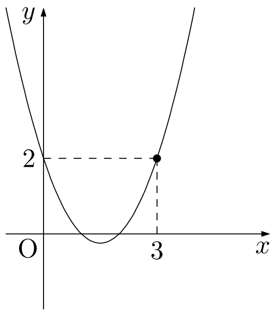
$$f'(x)=2x-3$$

となるので、$x=3$ での微分係数 $f'(3)$ は、

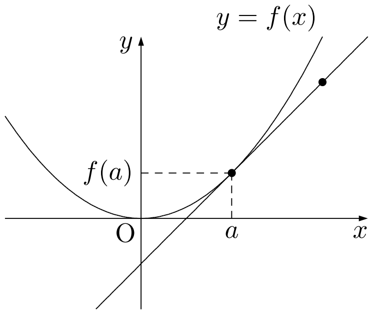
$$f'(3)=2\cdot 3-3=3$$

このことから傾き 3、点 $(3,\ 2)$ を通る直線の方程式を求めればよいので、

$$
\begin{aligned}
y&=3(x-3)+2\\
&=3x-9+2\\
&=3x-7
\end{aligned}
$$



## 3.2 曲線外の点から引いた接線の方程式




曲線上の点における接線の方程式の公式を利用し、曲線外の点から引いた接線の方程式は、次のような手順で求めることができます。

( i ) 接点の座標を $(a,\ f(a))$ のように、適当な文字を使って表す。

( ii ) (i) の接点における接線の方程式を求める。

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \ \cdots\cdots \ ①$$

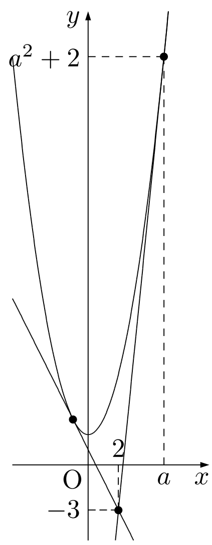
(iii) 接線の方程式が曲線外の点を通る条件から、(i) で用いた文字についての方程式を解く。

(iv) (iii) で得られた方程式の解を①に代入する。

【例題 3 − 2】

点 $(2,\ -3)$ から放物線 $y = x^2 + 2$ に引いた接線の方程式を求めなさい。

＜解説＞




$f(x) = x^2 + 2$ とすると、$f'(x) = 2x$ となります。

( i ) 関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ a^2+2)$ とします。

( ii ) 点 $(a,\ a^2+2)$ における接線の方程式は、$f'(a) = 2a$ より、

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-a) + a^2 + 2 \\ &= 2ax - a^2 + 2 \ \cdots\cdots \ ① \end{aligned}$$

(iii) ①が点 $(2,\ -3)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 4a - a^2 + 2 &= -3 \\ a^2 - 4a - 5 &= 0 \\ (a-5)(a+1) &= 0 \\ a &= 5,\ -1 \end{aligned}$$

(iv) このことから、

- $a = 5$ のとき：$y = 10x - 23$
- $a = -1$ のとき：$y = -2x + 1$

# 4　関数の増減

## 4.1　関数の増減

$x_1 < x_2$ とするとき、不等式 $x_1 < x < x_2$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$ などを満たす実数 $x$ の集合を**区間**といいます。

関数 $y = f(x)$ において、ある区間の任意の値 $x_1$, $x_2$ に対し、「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成り立つとき、$f(x)$ はその区間で**増加**（**単調に増加**）といい、「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき、$f(x)$ はその区間で**減少**（**単調に減少**）といい、そのときのグラフのようすは次のようになります。

(ｉ) $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$　　　(ii) $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$


つまり、ある区間において、

(ｉ) $x$ が増えると $y$ も増える　$\longrightarrow$ 関数 $y = f(x)$ はこの区間において増加
(ii) $x$ が増えると $y$ は減る　$\longrightarrow$ 関数 $y = f(x)$ はこの区間において減少

ということになります。

この関数の増加・減少と導関数の符号には、関数 $y = f(x)$ のグラフから、

(i) $f'(x) > 0$ ならば、$f(x)$ はその区間で増加
(ii) $f'(x) < 0$ ならば、$f(x)$ のその区間で減少

という関係が成り立ち、その増加・減少のようすを表（**増減表**）にすると右のように表すことができます。

| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ |

【例題 4 − 1】

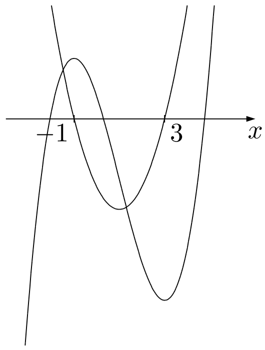
次の関数の増減を調べなさい。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$　　　(2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

<解説>

関数の増減を調べるときは、導関数の符号をチェックします。そのため、それぞれの関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を最初に求めておきます。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次のようになります。




$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

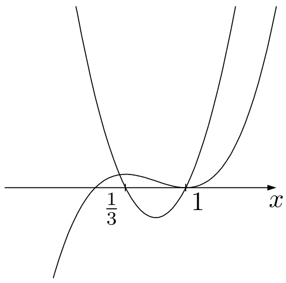
ここで、$f'(x) = 0$ のとき $x = 3,\ -1$ になるので、$f'(x)$ の符号は次の表（増減表）のようにまとめることができます。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{8}{3}$ | $\searrow$ | $-8$ | $\nearrow$ |

このことから、

- $x \leqq -1,\ 3 \leqq x$ のとき：増加
- $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき：減少

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次のようになります。




$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ &= (3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

ここで、$f'(x) = 0$ のとき $x = \dfrac{1}{3},\ 1$ になるので、$f'(x)$ の符号は次の表（増減表）のようにまとめることができます。

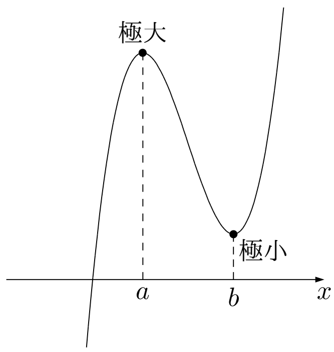
| $x$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{3}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{27}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

このことから、

- $x \leqq \dfrac{1}{3},\ 1 \leqq x$ のとき：増加
- $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ のとき：減少

## 4.2 関数の極大・極小

関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき、$f(x)$ は $x=a$ で**極大**であるといい、$f(a)$ を**極大値**といいます。これとは逆に $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき、$f(x)$ は $x=b$ で**極小**であるといい、$f(b)$ を**極小値**といいます。また、極大値と極小値をまとめて**極値**といいます。




関数の極大・極小（極値）に関する問題では、右図のようにグラフをかけば、関数の増加・減少も、極大・極小も判断しやすいのですが、グラフをかくのはやや面倒です。そこで、下に示すような増減表をかけばグラフの大まかなイメージがわかり、関数の増加・減少も極大・極小も判断できます。そのため、このような問題では増減表を利用して考えます。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(a)$ | $\searrow$ | $f(b)$ | $\nearrow$ |

【例題 4 − 2】

次の関数の増減表をかいて、極値を求めなさい。

(1) $f(x)=x^3-3x$　　(2) $f(x)=-x^3+3x^2+24x$

＜解説＞

(1) 関数 $f(x)$ を $x$ で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-3 \\ &= 3(x^2-1) \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

となり、$f'(x)=0$ のとき、

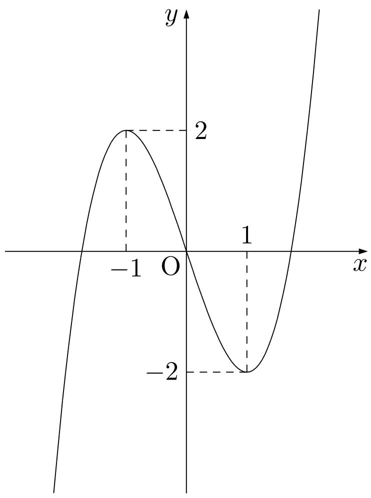
$$x=-1,\ 1$$

このことから、増減表は次のようになり、

$x=-1$ のとき極大値 $2$,　　$x=1$ のとき極小値 $-2$

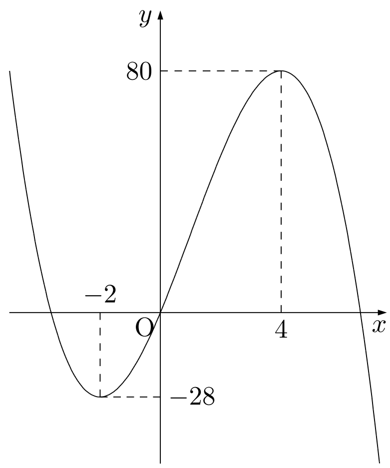
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ |

また、関数のグラフは右のようになります。



(2) 関数 $f(x)$ を $x$ で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2+6x+24 \\ &= -3(x^2-2x-8) \\ &= -3(x-4)(x+2) \end{aligned}$$




となり、$f'(x)=0$ のとき、

$$x=4,\ -2$$

このことから、増減表は次のようになり、

$x=-2$ のとき極小値 $-28$,　　$x=4$ のとき極大値 $80$

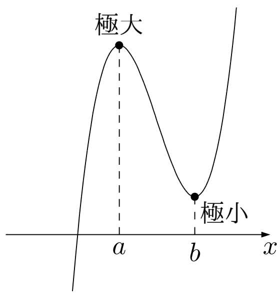
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-28$ | $\nearrow$ | $80$ | $\searrow$ |

また、関数のグラフは右のようになります。

## 4.3 極値の条件から関数の決定

関数 $y = f(x)$ において、増減表が次のようになり、そのグラフが右のようになるとします。

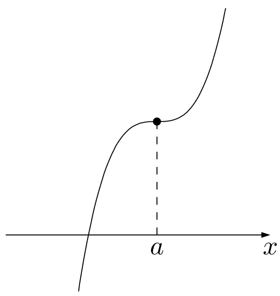
| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ | $f(b)$ | ↗ |




このグラフ（増減表）からもわかるように、関数が増加から減少（または、減少から増加）に転ずるとき、その境目における増減は必ず 0 にならなければいけないので、$f(x)$ が $x = a$ において微分できるとき、$f(x)$ が $x = a$ で極値をもつならば、$f'(a) = 0$ となります。

しかし、関数 $y = f(x)$ において、増減表が次のようになり、そのグラフが右のようなるとします。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↗ |




このような関数の増減（グラフ）では、増加から減少に転ずるのではなく、増加からさらに増加するので極値を持ちません。そのため、$f'(a) = 0$ のときに極値をもつとは限らないので注意が必要です。

【例題 4 − 3】

(1) $x = 0$ で極小値をとり、$x = 2$ で極大値 4 をとる 3 次関数で、$x^3$ の係数が $-1$ であるものを求めなさい。

(2) $x = 1$ で極大値をとり、$x = 3$ で極小値 $-1$ をとる 3 次関数で、$x^3$ の係数が 1 であるものを求めなさい。

＜解説＞

(1) $x^3$ の係数が $-1$ である 3 次関数を、定数 $a, b, c$ を用いて、

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

とします。$f(x)$ を $x$ で微分すると、

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

となります。この関数 $f(x)$ は、$x = 0, 2$ で極値を持つので、$f'(0) = f'(2) = 0$。よって、

$$f'(0) = b = 0$$

$$\begin{aligned} f'(2) = -12 + 4a + b &= 0 \\ 4a &= 12 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

また、$x=2$ で極大値 4 をとることから、

$$
\begin{aligned}
f(2) = -8 + 4a + 2b + c &= 4 \\
-8 + 12 + c &= 4 \\
c &= 0
\end{aligned}
$$

このことから、

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

このとき、関数 $f(x)$ の増減は次のようになるので、確かに $x=0,\ 2$ のときに極値を持つことが分かります。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^3 + 3x^2 \\
f'(x) &= -3x^2 + 6x \\
&= -3x(x-2)
\end{aligned}
$$

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ |

(2) $x^3$ の係数が $-1$ である 3 次関数を、定数 $a,\ b,\ c$ を用いて、

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とします。$f(x)$ を $x$ で微分すると、

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

となります。この関数 $f(x)$ は、$x=1,\ 3$ で極値を持つので、$f'(1)=f'(3)=0$。よって、

$$
\begin{aligned}
f'(1) = 3 + 2a + b &= 0 \\
2a + b &= -3 \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f'(3) = 27 + 6a + b &= 0 \\
6a + b &= -27 \quad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

また、$x=3$ で極小値 $-1$ をとることから、

$$
\begin{aligned}
f(3) = 27 + 9a + 3b + c &= -1 \\
9a + 3b + c &= -28 \quad \cdots\cdots ③
\end{aligned}
$$

①, ②, ③より、$a=-6,\ \ b=9,\ \ c=-1$ となるので、

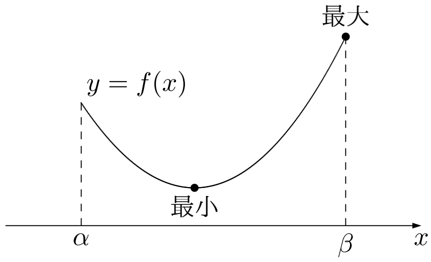
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

このとき、関数 $f(x)$ の増減は次のようになるので、確かに $x=1,\ 3$ のときに極値を持つことが分かります。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \\
f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\
&= 3(x^2 - 4x + 3) \\
&= 3(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |

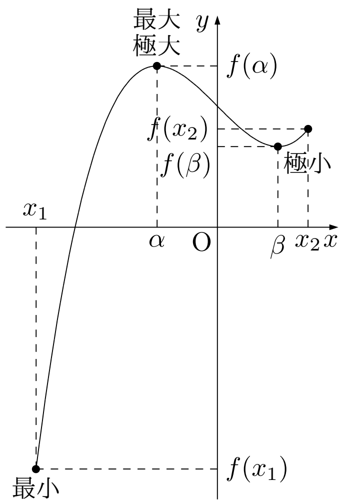
## 4.4　関数の最大・最小




右の図のような関数 $y=f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ のグラフについて考えます。このとき、与えられた定義域において、関数 $y=f(x)$ の値域の中で最も大きな値を**最大値**といい、最も小さな値を**最小値**といいます。

関数（3 次関数）$y=f(x)$　$(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ の最大・最小

$\longrightarrow$ グラフで考える




関数（ここでは 3 次関数）$y=f(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ の最大・最小を求めるような問題では、グラフで考えるのが基本になります。そのため、次のような手順で解くことになります。

( i ) 導関数 $f'(x)$ を求める。

(ii) $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲で増減表を作る。

| $x$ | $x_1$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $f(x_1)$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $f(\beta)$ | $\nearrow$ | $f(x_2)$ |

(iii) 増減表（グラフ）から最大値・最小値を読み取る。

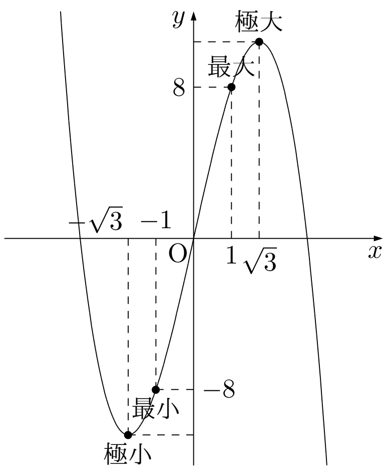
最大値・最小値の候補は、極値、または、端点における値になります。

【例題 4 − 4】

次の関数の最大値、最小値を求めなさい。

(1) $y=x(9-x^2)$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$　　(2) $y=x^3-6x^2+9x$　$(0 \leqq x \leqq 4)$

＜解説＞




(1) 導関数を求めるために、右辺を展開して整理してから $x$ で微分します。

$$
\begin{aligned}
y &= x(9-x^2) \\
&= -x^3+9x \\
y' &= -3x^2+9 \\
&= -3(x^2-3)
\end{aligned}
$$

$y'=0$ より $x=\pm\sqrt{3}$

となるので、$-1 \leqq x \leqq 1$ において、増減表は次のようになります。

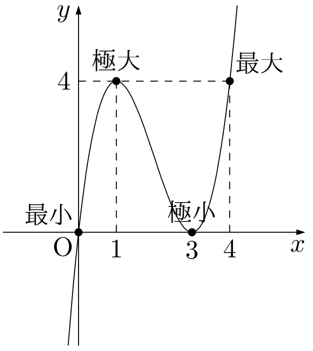
| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | |
| $y$ | $-8$ | $\nearrow$ | $8$ |

よって、$x=1$ のとき最大値 8、$x=-1$ のとき最小値 $-8$

(2) まずは導関数を求めます。

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$y' = 0$ より $x = 1,\ 3$




このことから、$0 \leqq x \leqq 4$ における増減表は次のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ |

よって、$x = 0, 1$ のとき最大値 4,、$x = 0, 3$ のとき最小値 0

## 4.5　3 次方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は、$\begin{cases} y=f(x) \text{ のグラフ} \\ y=0 \quad (x \text{ 軸}) \end{cases}$ の交点の $x$ 座標として求めることができます。そのため、3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は、次の手順により求めることができます。

(ｉ) $y=f(x)$ とし、$y'$ を求める。
(ii) $y$ の増減を調べる。
(iii) $y=f(x)$ のグラフをかいて、グラフと $x$ 軸の共有点の個数を調べる。

【例題 4 − 5】

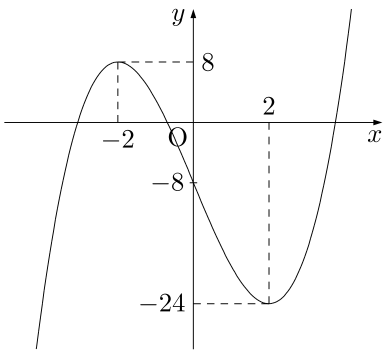
次の方程式の異なる実数解の個数を求めなさい。

(1) $x^3-12x-8=0$　　　　(2) $x^3-3x^2+4=0$

＜解説＞

(1) $y=x^3-12x-8$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-12 \\ &= 3(x^2-4) \\ &= 3(x+2)(x-2) \end{aligned}$$



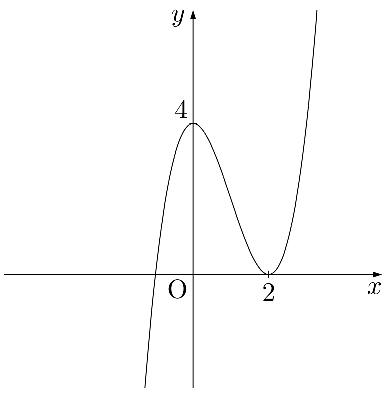

$y'=0$ のとき、$x=\pm 2$ となるので、増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $8$ | ↘ | $-24$ | ↗ |

このことからグラフは右のようになるので、$x$ 軸との交点の個数から、 方程式の異なる実数解の個数は 3 個。

(2) $y=x^3-3x^2+4$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$




$y'=0$ のとき、$x=0,\ 2$ となるので、増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ |

このことからグラフは右のようになるので、$x$ 軸との交点の個数から、方程式の異なる実数解の個数は 2 個。

## 4.6　文字を含む 3 次方程式

方程式 $f(x)=a$ の実数解は、$\begin{cases} y=f(x) \text{ のグラフ} \\ y=a \end{cases}$ の交点の $x$ 座標として求めることができます。

そのことから、文字を含む 3 次方程式の実数解の個数を求める問題では、次の手順により求めることができます。

(i) $f(x)=$（文字）の形に変形する。
(ii) $y=f(x)$ とし、$y'$ を求める。
(iii) $y$ の増減を調べる。
(iv) $y=f(x)$ のグラフをかいて、グラフと直線 $y=$ (文字) の共有点の個数を調べる。

【例題 4 − 6】

3 次方程式 $x^3-3x^2-a=0$ の実数解の個数は、定数 $a$ の値によりどのように変わりますか。

＜解説＞

$x^3-3x^2-a=0$ より、$x^3-3x^2=a$ とできるので、

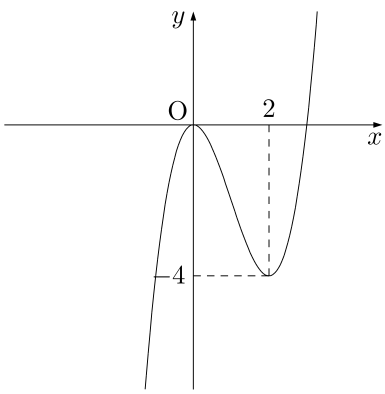
$$y=x^3-3x^2$$

とすると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

$y'=0$ のとき、$x=0,\ 2$ となるので、増減表は次のようになります。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ |




このことからグラフは右のようになるので、この $y=x^3-3x^2$ と $y=a$ との交点から、

- $a<-4,\ 0<a$ のとき：1 個
- $a=-4,\ 0$ のとき：2 個
- $-4<a<0$ のとき：3 個

## 4.7 不等式の証明

$A, B$ の大小関係を比べるとき、

① $A > B \iff A - B > 0$　　② $A < B \iff A - B < 0$

のように、$A - B$ の符号を調べることで判断することができます。そこで、不等式 $f(x) > g(x)$ の証明をするときには、次の手順により証明することができます。

(ｉ) $y = f(x) - g(x)$ の増減を調べる。
(ii) $y = f(x) - g(x)$ の最小値を求める。
(iii) 「$f(x) - g(x)$ の最小値 $> 0$」を示す。

【例題 4 − 7】

次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

(1) $x \geqq 0$ のとき、$x^3 + 2 \geqq 3x$　　(2) $x \geqq 0$ のとき、$x^3 - 6x^2 + 32 \geqq 0$

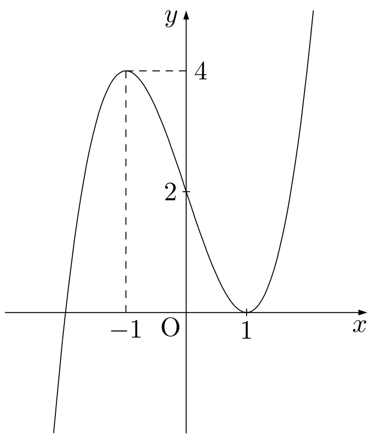
＜解説＞

(1) $y = x^3 + 2 - 3x$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ のとき、$x = \pm 1$ となるので、増減表は次のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |




このことからグラフは右のようになり、$x \geqq 0$ において $x = 1$ で最小値 0 になることから、$y \geqq 0$。つまり、$x^3 + 2 - 3x \geqq 0$ となるので、

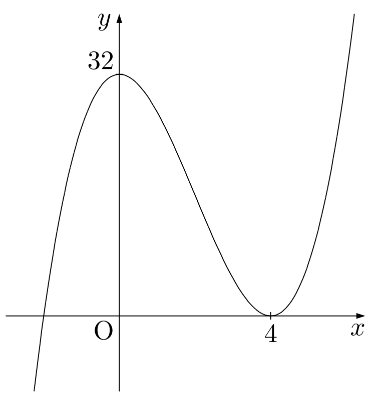
$x \geqq 0$ のとき　$x^3 + 2 \geqq 3x$

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 32$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x \\ &= 3x(x-4) \end{aligned}$$

$y' = 0$ のとき $x = 0,\ 4$ となるので、増減表は次のようになります。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $32$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |




このことからグラフは右のようになり、$x \geqq 0$ において $x = 4$ で最小値 0 になることから、$y \geqq 0$。よって、

$x \geqq 0$ のとき　$x^3 - 6x^2 + 32 \geqq 0$