【数学 I】集合と命題

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1 集合

1.1 集合とその要素

考えるべき対象の範囲がはっきりと定められているものの集まりを**集合**といい、A, B などの文字で表します。また、集合に含まれている 1 つ 1 つのものを、その集合の**要素**といいます。
a が集合 P の要素であることを、

a は集合 P に**属する**

といい、

$a \in P$ (または $P \ni a$)

のように、「要素」という意味の英単語「Element」の頭文字「E」もとにした記号「$\in$」を用いて表します。また、a が集合 P に属さない場合は、

$a \notin P$ (または $P \not\ni a$)

のように表します。

【例題 1 − 1】

10 以下の素数全体の集合を A とするとき、$\boxed{}$ に $\in$, $\ni$, $\notin$, $\not\ni$ のどれかを入れなさい。

(1) $A \boxed{} 3$　　(2) $1 \boxed{} A$　　(3) $A \boxed{} 7.5$

<解説>

10 以下の素数には

2, 3, 5, 7

という 4 つの数があり、この 4 つの数を要素とする集合が A です。このことから
(1) $A \ni 3$　　(2) $1 \notin A$　　(3) $A \not\ni 7.5$
となります。

集合 A に属しているのかどうかも大切ですが、記号の向きにも注意が必要です。集合と要素では集合の方が大きいというイメージは作れると思うので、不等号と同じように、集合(大きい)の方に開いている形をしていると覚えておくと、間違えないと思います。

1.2 集合の表し方

集合の表し方には、次のように主に 2 通りの方法があります。

- **要素を書き並べて表す方法**
- **要素の満たす条件を表示する方法**

例として、「2 桁の正の偶数」という集合について考えると、「要素を書き並べて表す方法」では、

$$\left\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots,\ 98\right\}$$

のように $\{\quad\}$ 内にその要素を書き並べて表します。

また、「要素の満たす条件を表示する方法」では、

$$\left\{x \,\middle|\, x \text{ は 2 桁の正の偶数}\right\}$$

のように、「$|$」で波括弧内を 2 つの領域に区切り、左側にその集合の要素の代表を、右側に満たす条件を書きます。

【例題 1 − 2】

次の集合を、要素を書き並べる方法で表しなさい。

(1) $\left\{x \,\middle|\, x < 3,\ x \text{ は自然数}\right\}$　(2) $\left\{3x-2 \,\middle|\, x \text{ は 3 以下の自然数}\right\}$

(3) $\left\{x \,\middle|\, x \text{ は 12 の正の約数}\right\}$　(4) $\left\{x \,\middle|\, x^2 = 4\right\}$

＜解説＞

(1) 条件「$x < 3,\ x$ は自然数」を満たす x は

$$1,\ 2$$

になります。この x が求める集合の要素になるので、

$$\left\{1,\ 2\right\}$$

と表すことができます。

(2) 条件「x は 3 以下の自然数」を満たす x は

$$1,\ 2,\ 3$$

になります。この x を「$3x-2$」に代入したものが求める集合の要素になるので、

$$\left\{1,\ 4,\ 7\right\}$$

と表すことができます。

(3) 条件「x は 12 の正の約数」を満たす x は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$$

になります。この x が求める集合の要素になるので、

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$$

と表すことができます。

(4) 条件「$x^2=4$」を満たす x は

$$\pm 2$$

になります。この x が求める集合の要素になるので

$$\{-2,\ 2\}$$

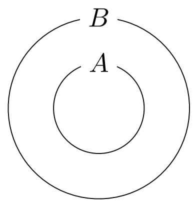
と表すことができます。

1.3 部分集合と包含関係

集合 A のすべての要素が集合 B の要素になっているとき、A は B の**部分集合**といい、

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

と表します。このとき、集合 A と B は次の図のようになっているので、



数の大小関係を不等号を用いて表したように、集合の大小関係を「⊂」、「⊃」という記号を用いて表していると考えると理解しやすいと思います。ただし、ただ集合の大小関係を表しているのではなく、ある集合（集合 B）が別のある集合（集合 A）を包んでいる状態でなければいけないことに注意してください。

また、このようになっている集合 A と B の関係を、

「A は B に**含まれる**」　または　「B は A を**含む**」

といいます。さらに、集合 A は A 自身の部分集合でもあるので、

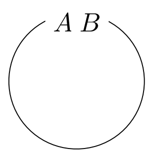
$$A \subset A$$

と表すこともできます。

集合 A と集合 B の要素が一致しているとき、A と B は集合として**等しい**といい、

$$A = B$$

で表します。



このとき、

$$A \subset B, \quad A \supset B$$

の両方が成り立っていることになります。

また、数の大小関係を不等号を用いて表すとき、「≧」や「≦」のような等号付きの不等号がありましたが、集合のときも同じようにして、包含関係を示すときに「⊂」や「⊃」に等号を付けた記号を用いて表すこともできます。

【例題 1 − 3】

次の 2 つの集合 A、B の関係を $\subset$ 、$\supset$ 、$=$ のどれかを用いて表しなさい。

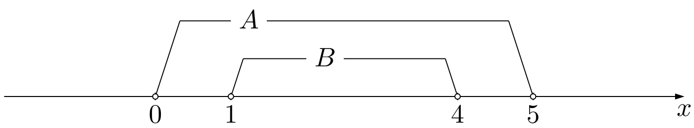
(1) $A=\left\{x \,\middle|\, 0<x<5\right\}$, $\quad B=\left\{x \,\middle|\, 1<x<4\right\}$

(2) $A=\left\{1,\ 2\right\}$, $\quad B=\left\{x \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 2\right\}$

(3) $A=\left\{1,\ 4,\ 7\right\}$, $\quad B=\left\{3x-2 \,\middle|\, x \text{ は 3 以下の自然数}\right\}$

＜解説＞

(1) 要素の条件が不等式で表されるような集合では、数直線上に表すと考えやすくなります。そこで、集合 A, B を数直線上に表してみると

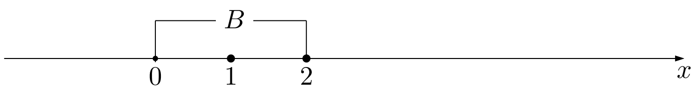


となり、この図から B は A に含まれる（A は B を含む）ことがわかります。よって

$A \supset B$ （または $B \subset A$）

となります。

(2) 数直線を図示しても明らかなように、集合 A の要素はすべて集合 B に含まれます。



よって

$A \subset B$ （または $A \supset B$）

となります。

(3) 集合 B の要素を書き並べて表すと

$B=\left\{1,\ 4,\ 7\right\}$

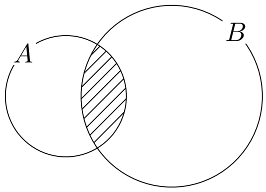
となります。つまり、集合 A の要素と集合 B の要素が完全に一致するので

$A=B$

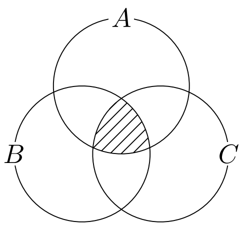
となります。

1.4　共通部分と和集合

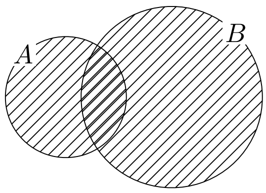
2 つの集合 A と B のどちらにも属している要素の集合を A と B の**共通部分**といい、$A \cap B$（「A かつ B」や「A and B」と読みます）で表します。



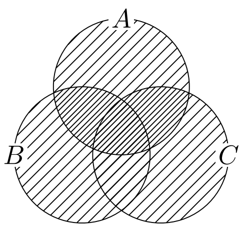
3 つの集合 A, B, C についても、どの集合にも属する要素の集合を A, B, C の共通部分といい、$A \cap B \cap C$ で表します。



2 つの集合 A と B の少なくとも一方に属している要素の集合、すなわち、2 つの集合 A と B のすべての要素を集めてできる集合を、A と B の**和集合**といい、$A \cup B$（「A または B」や「A or B」と読みます）で表します。



同じようにして、3 つの集合集合 A, B, C の少なくとも 1 つに属する要素の集合を A, B, C の和集合といい、$A \cup B \cup C$ で表します。



【例題1－4】

次の2つの集合 A、B の和集合 $(A \cup B)$、共通部分 $(A \cap B)$ を求めなさい。

(1) $A = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}$, $B = \left\{2,\ 4,\ 6,\ 8\right\}$

(2) $A = \left\{x \,\middle|\, 0 < x < 3\right\}$, $B = \left\{x \,\middle|\, -1 < x < 5\right\}$

＜解説＞

(1) 和集合 $A \cup B$ は、集合 A と B のすべての要素を集めてできる集合なので、

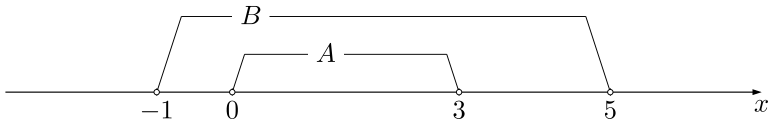
$$A \cup B = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\right\}$$

となり、共通部分 $A \cap B$ は、集合 A と B で共通になっている要素を探して、

$$A \cap B = \left\{2,\ 4\right\}$$

となります。

(2) 要素の条件が不等式で表されているので、集合 $A,\ B$ を数直線上に表してみます。



図から明らかなように、集合 A は B に含まれます。つまり、2つの集合 A と B のすべての要素を集めても、集合 B にしかなりません。このことから、和集合 $A \cup B$ は

$$A \cup B = B$$

より

$$A \cup B = \left\{x \,\middle|\, -1 < x < 5\right\}$$

また、共通部分 $A \cap B$ も、図より集合 A になることがわかるので、

$$A \cap B = A$$

です。このことから

$$A \cap B = \left\{x \,\middle|\, 0 < x < 3\right\}$$

となります。

1.5 空集合

要素を 1 つももたない集合を**空集合**といいます。数では、何もないことを「0」で表しますが、そこに「/」を加えた記号「ϕ」で、空集合を表します。

この空集合は、どんな集合においてもその部分集合となります。

【例題 1 − 5】

集合 $\left\{1,\ 2,\ 3\right\}$ の部分集合をすべてあげなさい。

<解説>

集合 $\left\{1,\ 2,\ 3\right\}$ の部分集合には、

$$\phi,\quad \left\{1\right\},\quad \left\{2\right\},\quad \left\{3\right\},\quad \left\{1,\ 2\right\},\quad \left\{1,\ 3\right\},\quad \left\{2,\ 3\right\},\quad \left\{1,\ 2,\ 3\right\}$$

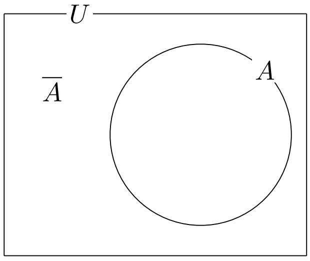
の 8 つがあります。

集合 $\left\{1,\ 2,\ 3\right\}$ 自身も部分集合になること、そして、空集合 ϕ はどんな集合においても部分集合になることに注意しましょう。

1.6 補集合

集合を扱うときには、最初に 1 つの集合を定めて、その集合の要素や部分集合を考えることがほとんどです。そのため、最初に定めるある 1 つの集合を**全体集合**といい、全体集合は、「全体集合」を表す英単語「universal set」の頭文字「U」でよく表されます。

全体集合 U の部分集合 A に対して、U の要素のうち A に属さない要素の集合を、A の**補集合**といい、$\overline{A}$（「A バー」と読みます）で表します。



このとき、

$$A \cap \overline{A} = \phi, \qquad A \cup \overline{A} = U, \qquad \overline{(\overline{A})} = A$$

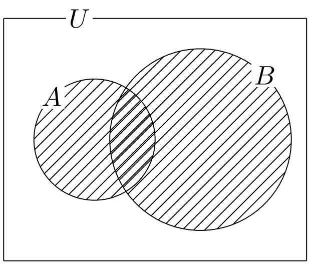
という関係が成り立ちます。

また、共通部分、和集合と補集合には、任意の集合 $A,\ B$ について次のような関係が成り立ち、これを**ド・モルガンの法則**といいます。

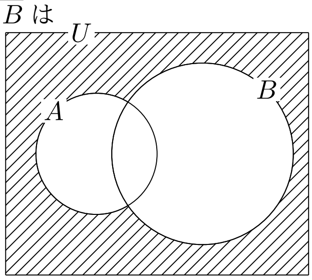
(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

① $\overline{A \cup B}$

$A \cup B$ は



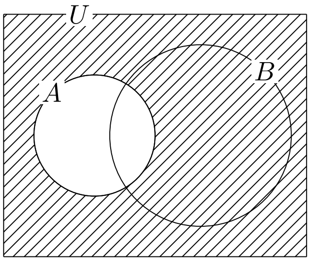
となるので、その補集合である $\overline{A \cup B}$ は



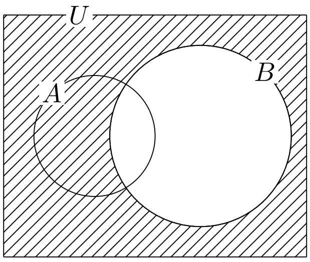
となります。

② $\overline{A} \cap \overline{B}$

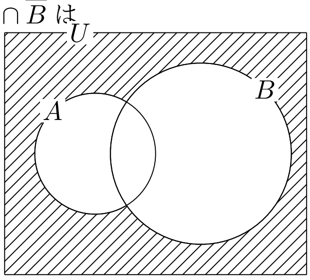
$\overline{A}$ は



また、$\overline{B}$ は



になるので、その共通部分である $\overline{A} \cap \overline{B}$ は



になります。

①, ②より、$\overline{A \cup B}$ と $\overline{A} \cap \overline{B}$ それぞれの集合を示す図は一致するので、

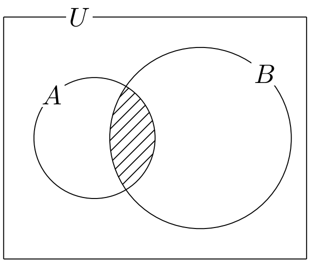
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

という関係が成り立つことがわかります。

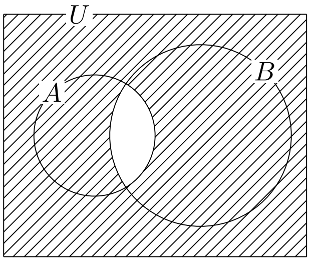
(ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

① $\overline{A \cap B}$

$A \cap B$ は



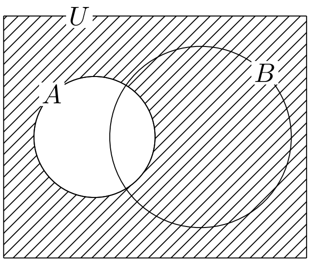
となるので、その補集合である $\overline{A \cap B}$ は



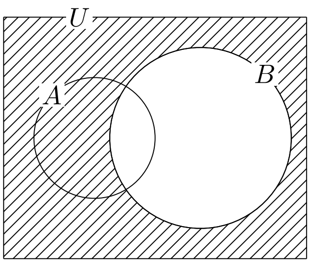
となります。

② $\overline{A} \cup \overline{B}$

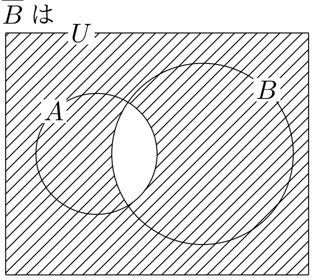
$\overline{A}$ は



また、$\overline{B}$ は



になるので、その和集合である $\overline{A} \cup \overline{B}$ は



になります。

①, ②より、$\overline{A \cap B}$ と $\overline{A} \cup \overline{B}$ それぞれの集合を示す図は一致するので、

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

という関係が成り立つことがわかります。

「A に属さない」要素の集合を $\overline{A}$ と表したように、補集合を表す記号「$-$」には意味を反対にする働きがあると考えることができます。数の世界では、反対の意味を表すのにマイナスの符号「$-$」を用いましたが、

$$-(a+b+c) = -a-b-c$$

のようにあるまとまりのあるものにマイナスの符号がついている場合には、分配法則を利用することができました。

集合の世界でも、$\overline{A \cup B}$ は、

$$A \longrightarrow \overline{A}, \qquad \cup \longrightarrow \cap, \qquad B \longrightarrow \overline{B}$$

のように、それぞれを反対の意味になるように変換して

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

同じように、$\overline{A \cap B}$ も、それぞれが反対の意味になるように

$$A \longrightarrow \overline{A}, \qquad \cap \longrightarrow \cup, \qquad B \longrightarrow \overline{B}$$

と変換して

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

となっていると思えば、ド・モルガンの法則は集合の世界での分配法則であると考えることができます。

【例題 1 − 6】

1 から 10 までの自然数を全体集合とする次の部分集合があります。

$$A = \left\{3,\ 6,\ 9\right\}, \quad B = \left\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\right\}$$

このとき、次の集合を求めなさい。

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{B}$　(3) $A \cap B$　(4) $A \cup B$　(5) $\overline{A} \cap B$

(6) $A \cap \overline{B}$　(7) $\overline{A} \cup B$　(8) $A \cup \overline{B}$　(9) $\overline{A} \cap \overline{B}$　(10) $\overline{A} \cup \overline{B}$

＜解説＞

1 から 10 までの自然数が全体集合になるので、全体集合を U とすると

$$U = \left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\right\}$$

になります。

(1) 全体集合の要素の中から、A に属さない要素を選んで、

$$\overline{A} = \left\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\right\}$$

(2) 全体集合の要素の中から、B に属さない要素を選んで、

$$\overline{B} = \left\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\right\}$$

(3) A と B に共通な要素を選んで、

$$A \cap B = \left\{3,\ 9\right\}$$

(4) A と B のすべての要素を選んで、

$$A \cup B = \left\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\right\}$$

(5) （1）の結果から、$\overline{A}$ と B に共通な要素を選んで、

$$\overline{A}\cap B=\left\{1,\ 5,\ 7\right\}$$

(6) （2）の結果から、A と $\overline{B}$ に共通な要素を選んで、

$$A\cap\overline{B}=\left\{6\right\}$$

(7) （1）の結果から、$\overline{A}$ と B のすべての要素を選んで、

$$\overline{A}\cup B=\left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\right\}$$

となります。また、ド・モルガンの法則から

$$\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A}\cup B$$

であるので、（6）の結果を利用して、その補集合を考えることで求めることもできます。

(8) （2）の結果から、A と $\overline{B}$ のすべての要素を選んで、

$$A\cup\overline{B}=\left\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\right\}$$

となります。また、ド・モルガンの法則から

$$\overline{\overline{A}\cap B}=A\cup\overline{B}$$

であるので、（5）の結果を利用して、その補集合を考えることでも求めることができます。

(9) （1）、（2）の結果から、$\overline{A}$ と $\overline{B}$ に共通な要素を選んで、

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\left\{2,\ 4,\ 8,\ 10\right\}$$

また、ド・モルガンの法則から

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

であるので、（4）の結果を利用して、その補集合を考えることでも求めることができます。

(10) （1）、（2）の結果から、$\overline{A}$ と $\overline{B}$ のすべての要素を選んで、

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\left\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\right\}$$

となります。また、ド・モルガンの法則から

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

であるので、（3）の結果を利用して、その補集合を考えることでも求めることができます。

2　命題と条件

2.1　命題と条件

一般に、正しいか正しくないかがはっきり決まる式や文章を**命題**といい、命題が正しいとき、その命題は**真**である（または、「成り立つ」）といい、正しくないとき、その命題は**偽**である（または、「成り立たない」）といいます。

命題には、

「$x^2 = 1$ ならば $x = 1$」

のように文字（変数）を含むものもあります。「$x^2 = 1$」や「$x = 1$」のように、文字（変数）x を含んだ式や文章を、x についての**条件**といいます。

【例題 2 − 1】

次の事柄のうち、命題はどれですか。また、その命題の真偽を答えなさい。

① 象は人より大きい。
② 1 億は非常に大きい数である。
③ $3x + x$ は $4x$ である。
④ 三角形の内角の和は $360°$ である。

＜解説＞

① 小さな象と大きな人を比べた場合、象よりも人の方が大きい場合があるかもしれません。そのため、象が人よりも必ず大きいかどうかははっきりしませんね。つまり、この事柄は命題ではありません。
② 普通に考えれば、1 億という数は非常に大きな数だと考えられそうですが、日常的に億や兆といった数を扱っている人にとっては、非常に大きな数ではなくなってしまうと思います。人によって数の大きさの価値観は異なるので、1 億という数が必ず「非常に大きな数」とは言えません。つまり、この事柄も命題ではありません。
③ 数学を学習してきた人にとって、これは明らかに正しいということがわかりますね。つまり、この事柄は命題です。
④ 三角形の内角の和は $180°$ と学習したと思います。そのため、この事柄は正しくないということがはっきりわかるので、命題です。

以上のことから命題は③, ④になり、その真、偽は

③ : 真　　④ : 偽

となります。

2.2 命題の真偽

任意の命題を表すには、条件を p, q などの記号を用いて、「p ならば q」と表すことがあります。このとき、「ならば」を「$\Longrightarrow$」を使って、

「$p \Longrightarrow q$」

と表します。そして、このような形になっている命題では、p を**仮定**、q を**結論**といいます。つまり、

「仮定 $\Longrightarrow$ 結論」

という形になっているわけです。

また、「$p \Longrightarrow q$」という命題において、p（仮定）は満たすが q（結論）を満たさない例を**反例**といい、この反例がある場合、その命題は偽となります。

【例題 2 − 2】

次の命題の真偽を調べ、真でないものは反例をあげなさい。ただし、x, a, b, c は実数とします。

(1) $x^2 = 1$ ならば $x = 1$ (2) $a^2 > 1$ ならば $a > 1$

(3) $a > b$ ならば $a^2 > b^2$ (4) $ac = bc$ ならば $a = b$

＜解説＞

命題の真偽を調べるような問題では、「偽」である命題でも「真」であると思わせるような書き方のしているものが多くあります。そのため

「正しそうだな」

と思ってしまうと、すべて正しく思えてしまい、すべての命題を「真」と答えてしまいます。そのようにならないためにも、根拠を持って（証明して）「真」と答えられる命題以外はすべて、「偽」である命題だと考えて、反例を探す努力をしてください。そして、どうしても反例が見つけられない命題を、「真」と答えるようにするようにしましょう。

また、「真でないものは反例をあげなさい」と問題文に書かれていますが、そのように書かれていなくても、命題の真偽を調べるような問題では、真でない、つまり、偽である命題を示すためには反例を 1 つ挙げることもおさえておきましょう。

(1) 仮定「$x^2 = 1$」を満たす x の値は

$$x = \pm 1$$

になります。このことから、仮定「$x^2 = 1$」を満たしても結論「$x = 1$」を満たさない

$$x = -1$$

が存在し、これが反例になります。反例が存在するので、この命題は偽になります。

(2) $a^2 > 1$ を満たすような a^2 には、

$$a^2 = 4$$

があり、この a の 2 次方程式を解くと

$$a = 2,\ -2$$

となります。この

$$a = -2$$

は、仮定「$a^2 > 1$」を満たしますが結論「$a > 1$」を満たさないので反例になります。反例が存在するので、この命題は偽になります。

また、この他にも、

$$a = -3, \qquad a = -4, \qquad a = -5, \qquad \cdots\cdots$$

などのように、反例は複数存在するので、そのうちのどれか 1 つを反例として挙げれば問題ありません。

(3)

$$a = 1, \quad b = -2$$

とすると

$$1 > -2$$

であるので、仮定「$a > b$」は満たします。しかし、

$$a^2 = 1^2 = 1, \qquad b^2 = (-2)^2 = 4$$

より

$$a^2 < b^2$$

となるので、結論「$a^2 > b^2$」は満たしません。つまり、反例

$$a = 1, \quad b = -2$$

が存在するので、この命題は偽になります。

また、反例は複数存在するので、仮定は満たすけど結論を満たさない例を 1 つ挙げれば問題ありません。

(4) $ac = bc$ を

$$\begin{aligned} ac - bc &= 0 \\ (a-b)c &= 0 \end{aligned}$$

と変形すると

$$a - b = 0 \quad \text{または} \quad c = 0$$

という関係が導き出されます。このことから、

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 0$$

とすると、仮定「$ac = bc$」は

$$ac = 1 \times 0 = 0, \quad bc = 2 \times 0 = 0$$

より満たしますが、結論「$a = b$」は満たしません。つまり、これが反例となるので、この命題は偽になります。

また、この命題も反例が複数存在するので、そのうちの 1 つを挙げてもらえれば問題ありません。

2.3 必要条件と十分条件

2 つの条件 p、q について、命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき、

「p（仮定）は q（結論）であるための**十分条件**である」

「q（結論）は p（仮定）であるための**必要条件**である」

といいます。

命題「$p \Longrightarrow q$」と「$q \Longrightarrow p$」がともに成り立つ場合には、「$p \Longleftrightarrow q$」のように表します。このとき、

「p は q であるための十分条件であり、必要条件である」

ので、このことをまとめて

「p は q であるための**必要十分条件**である」

といいます。同じように q も、

「q は p であるための十分条件であり、必要条件である」

ので、

「q は p であるための**必要十分条件**である」

といえます。また、このことを

「p と q は**同値**である」

ということがあります。

【例題 2 − 3】

次の条件 p は q であるための何条件ですか。また、q は p であるための何条件ですか。

(1) $p : 3x - 4 = -2x + 6, \qquad q : x = 2$

(2) $p : xy = 6, \qquad q : x = 2,\ y = 3$

(3) $p : x^2 - 3x + 2 = 0, \qquad q : x = 1,\ 2$

＜解説＞

(1) 条件 p は

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -2x + 6 \\ 3x + 2x &= 6 + 4 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

となり、条件 q と一致します。このことから、「$p \Longrightarrow q$」も「$q \Longrightarrow p$」も成り立つので、「$p \Longleftrightarrow q$」であるといえます。つまり、

「p は q であるための必要十分条件」　「q は p であるための必要十分条件」

になります。

(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」は、$x=1,\ y=6$ という反例が存在するので偽になります。しかし、命題「$q \Longrightarrow p$」は真になるので、

「p は q であるための必要条件」　「q は p であるための十分条件」

になります。

(3) 条件 p は

$$\begin{aligned} x^2-3x+2&=0 \\ (x-1)(x-2)&=0 \\ x&=1,\ 2 \end{aligned}$$

となり、条件 q と一致します。このことから、「$p \Longrightarrow q$」も「$q \Longrightarrow p$」も成り立つので、「$p \Longleftrightarrow q$」であるといえます。つまり、

「p は q であるための必要十分条件」　「q は p であるための必要十分条件」

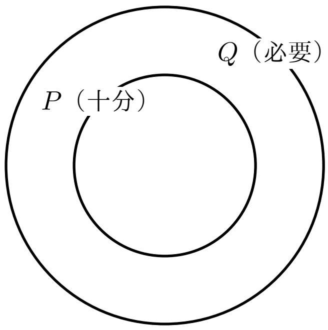
になります。

2.4　命題と集合

2 つの条件 p、q に関し、p を満たすもの全体の集合を P、q を満たすもの全体の集合を Q で表すと、命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき、p を満たすもの（集合 P のすべての要素）が q を満たさなければいけない（集合 Q の要素にもならなければいけない）ので、次の図のように

$$P \subset Q$$

となります。



このとき、集合 P の要素であることは、集合 Q の要素であるためには「十分」です。つまり、条件 p は

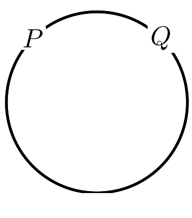
「p は q であるための**十分条件**である」

といえます。そして、集合 Q の要素であることは、集合 P の要素であるのに十分ではありませんが「必要」です。そのため、条件 q は

「q は p であるための**必要条件**である」

ということになります。必要条件や十分条件はこの図を利用して考えるとイメージがつきやすくなるので、是非この関係性を理解しておいてください。

また、命題「$p \Longleftrightarrow q$」が真であるときは、「$P \subset Q$」かつ「$Q \subset P$」でなければいけないので、「$P = Q$」となります。



そのため、条件 p, q は必要条件にも十分条件にもなっている、つまり、必要十分条件になっていることになります。

【例題 2 − 4】

次の問いに答えなさい。ただし、x は実数とします。

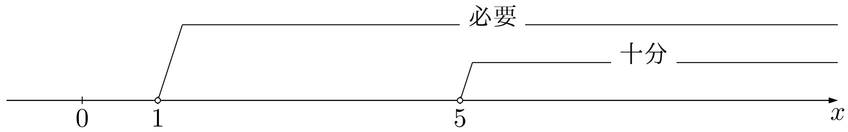
(1) $x > 1$ は、$x > 5$ であるための何条件ですか。

(2) $-1 < x < 1$ は、$3x - 6 \leqq 0$ であるための何条件ですか。

＜解説＞

不等式は数直線上に図示することができたので、不等式であるような条件は、数直線上に図示することで、命題を集合を利用して理解しやすくなります。

(1) $x > 1$, $x > 5$ を数直線上に表すと



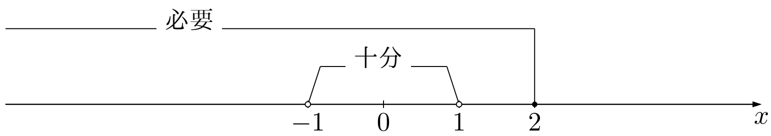
となるので、

$x > 1$ は、$x > 5$ であるための**必要条件**である

(2) $3x - 6 \leqq 0$ を x について解くと

$$
\begin{aligned}
3x - 6 &\leqq 0 \\
3x &\leqq 6 \\
x &\leqq 2
\end{aligned}
$$

となるので、$-1 < x < 1$, $x \leqq 2$ を数直線上に表すと

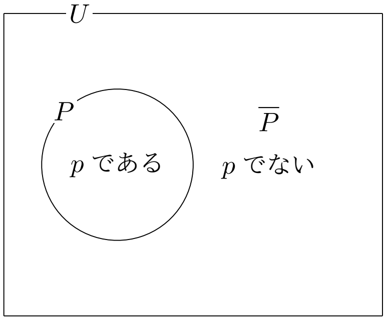


となります。このことから、

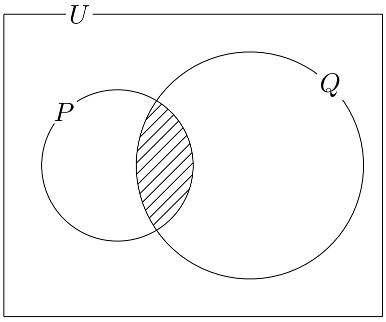
$-1 < x < 1$ は、$3x - 6 \leqq 2$ であるための**十分条件**である

2.5　条件の否定

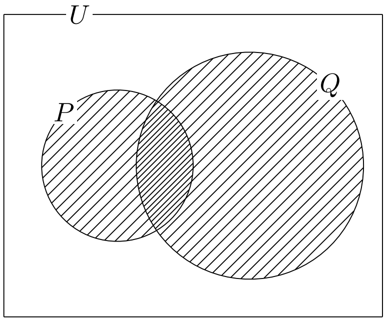
条件 p に対して、「p でない」という条件を p の**否定**といい、$\overline{p}$ で表します。このとき、条件 p を満たすもの全体の集合を P とすると、条件 $\overline{p}$ を満たすもの全体の集合は $\overline{P}$ となります。



条件 $p,\ q$ を満たすもの全体の集合をそれぞれ $P,\ Q$ とすると、「p かつ q」という条件を満たすもの全体の集合は、P と Q の共通部分 $P \cap Q$ になります。



同じようにして、「p または q」という条件を満たすもの全体の集合は、P と Q の和集合 $P \cup Q$ になります。



また、ド・モルガンの法則から

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}, \qquad \overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

が成り立つので、2 つの条件 $p,\ q$ について

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{または}\overline{q}, \qquad \overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \overline{p}\text{かつ}\overline{q}$$

という関係が成り立つことになります。

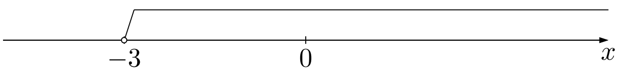
【例題 2 − 5】

次の条件の否定をつくりなさい。

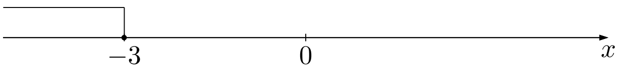
(1) $x > -3$ かつ $y \leqq 0$　　　(2) $x = 0$ または $x + y > 2$

＜解説＞

(1) 「$x > -3$」を数直線上に表すと、



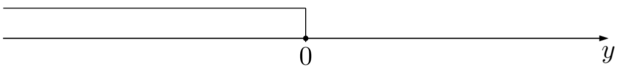
となるので、その否定は、この集合の補集合を考えればよいので、



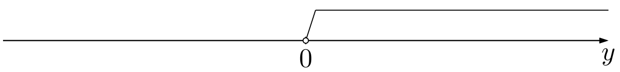
より、

$x \leqq -3$

そして、「$y \leqq 0$」を数直線上に表すと、



となるので、その否定は、この集合の補集合を考えて、



$y > 0$

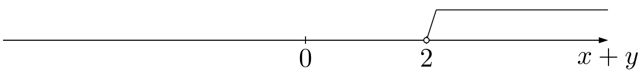
になります。
以上のことから、条件「$x > -3$ かつ $y \leqq 0$」の否定は、

$x \leqq -3$ または $y > 0$

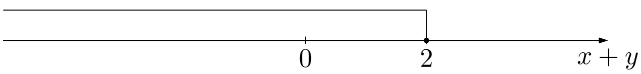
(2) 「$x = 0$」の否定は

$x \neq 0$

「$x + y > 2$」を数直線上に表すと、



となるので、その否定は、この集合の補集合を考えて、



$$x + y \leqq 2$$

になります。

以上のことから、条件「$x = 0$ または $x + y > 2$」の否定は、

$$x \fallingdotseq 0 \text{ かつ } x + y \leqq 2$$

条件に不等式（不等号）が含まれる場合、

「＞」⟶「＜」,　「＜」⟶「＞」

のように、不等号の向きを逆にすることで、その条件の否定を作ることができるわけではないので、その点を注意してください。

2.6 命題の逆・裏・対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」に対して、

命題「$q \Longrightarrow p$」（仮定と結論の条件を入れかえたもの）を、もとの命題の**逆**

命題「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」（仮定と結論の条件を否定にしたもの）を、もとの命題の**裏**

命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」（「逆（裏）」にして「裏（逆）」にしたもの）を、もとの命題の**対偶**

といいます。また、命題「$q \Longrightarrow p$」に対しては、

命題「$p \Longrightarrow q$」を、もとの命題の**逆**

命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を、もとの命題の**裏**

命題「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」を、もとの命題の**対偶**

となり、それぞれの相互関係を図にまとめると次の図のようになります。

$$
\begin{tikzcd}
\text{「}p \Longrightarrow q\text{」} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}" description] \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}" description] \arrow[ddrr, leftrightarrow, "\text{対偶}" description] & & \text{「}q \Longrightarrow p\text{」} \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}" description] \arrow[ddll, leftrightarrow] \\
& & \\
\text{「}\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}\text{」} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}" description] & & \text{「}\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}\text{」}
\end{tikzcd}
$$

【例題 2 − 6】

命題「$x > 0$ かつ $y > 0$ ならば $xy > 0$ である」の逆、裏、対偶をいいなさい。また、それぞれの真、偽を答えなさい。

＜解説＞

この命題において、仮定と結論は

仮定 :「$x > 0$ かつ $y > 0$」　　結論 :「$xy > 0$」

となっています。

(ｉ) 逆

命題の逆は、仮定と結論を入れかえて

「$xy > 0$ ならば $x > 0$ かつ $y > 0$ である」

となります。このとき、$x = -1,\ y = -2$ という反例が存在するので、この命題は偽になります。

(ii) 裏

仮定について、条件「$x > 0$ かつ $y > 0$」の否定は

「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$」

結論について、条件「$xy > 0$」の否定は

「$xy \leqq 0$」

であるので、命題の裏は、仮定と結論の条件をそれぞれ否定したものを考えて

「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば $xy \leqq 0$ である」

となります。
このとき、$x = -1,\ y = -2$ という反例が存在するので、この命題は偽になります。

(iii) 対偶

(i) を利用して、命題の逆「$xy > 0$ ならば $x > 0$ かつ $y > 0$ である」の裏、もしくは、(ii) を利用して、命題の裏「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば $xy \leqq 0$ である」の逆を考えれば、もとの命題の対偶になります。
つまり、命題の対偶は

「$xy \leqq 0$ ならば $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ である」

となります。
このとき、反例は存在しないので、この命題は真になります。

命題「$x > 0$ かつ $y > 0$ ならば $xy > 0$ である」は真であるので、以上の結果からわかるように、もとの命題とその逆や裏の命題の真偽は、一致することもありますが、必ず一致するとは限りません。ただし、もとの命題とその命題の対偶の真偽は必ず一致します。

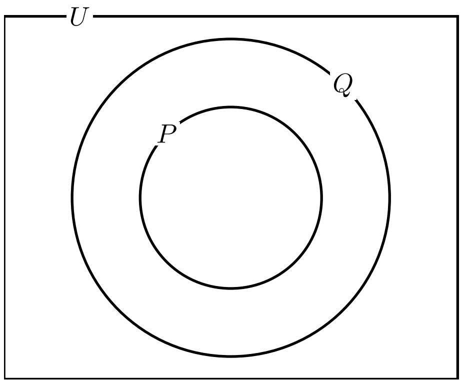
3　命題と証明

3.1　対偶を利用した証明

条件 $p,\ q$ を満たすもの全体の集合をそれぞれ $P,\ Q$ としたとき、命題「$p \Longrightarrow q$」が真であれば

$$P \subset Q$$

となりました。



このとき、先の図のように、それぞれの補集合 $\overline{P},\ \overline{Q}$ の間にも

$$\overline{Q} \subset \overline{P}$$

という関係が成り立つことがわかります。

このことから、命題「$p \Longrightarrow q$」が真であれば、その命題の対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」も真となり、

「命題とその対偶の真偽は一致する」

ということがいえます。

あることがらを、仮定から出発し、すでに正しいと認められていることがらを根拠として、筋道を立てて結論を導くことを「証明」といいましたが、「仮定」が複雑な形をしていて「結論」が簡単な形になっている場合、仮定から出発して証明を行うことが難しい場合があります。ある命題の対偶は、仮定と結論それぞれの条件の否定にはなりますが、もとの命題と仮定と結論を入れかえた形になっているので、「ある命題とその命題の対偶の真偽は一致する」ことを利用して、その命題を証明する（その命題が真であることを示す）のではなく、その命題の対偶を証明する（対偶が真であることを示す）ことのほうが楽になる場合があります。

また、ある命題を直接証明するのではなく、対偶などを利用して間接的に証明する方法を**間接証明法**といいます。

【例題３－１】

整数 a の 2 乗 a^2 が偶数ならば a も偶数であることを証明しなさい。

<解説>

2 次式を用いて 1 次式を計算するのは難しいと思いますが、1 次式を用いて 2 次式を計算するのはそれほど難しくはないはずです。そのため、対偶

「整数 a が奇数ならば a の 2 乗 a^2も奇数である」

を利用して証明をします。

＜証明＞

a を奇数とすると、整数 n を用いて、

$$a = 2n + 1$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} a^2 &= (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

となり、n は整数であるので、$2n^2 + 2n$ も整数になり、a^2 は奇数である。
このことから、命題の対偶

「整数 a が奇数ならば a の 2 乗 a^2も奇数である」

が真であるので、もとの命題も真である。

3.2　背理法

　ある命題を証明するときに、

(i) 命題が成り立たないと仮定する
(ii) その仮定のもとで矛盾を導く
(iii) 矛盾が生じたのは「命題が成り立たない」とした仮定が原因である
(iv) よって、もとの命題が成り立つ

として証明する方法があり、この証明法を**背理法**といいます。この背理法も、命題を直接証明せず間接的に証明を行うので、間接証明法の1つになります。

【例題3－2】

「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことを利用して、「$1+\sqrt{2}$ が無理数である」ことを証明しなさい。

＜解説＞

　実数の世界では、大まかなくくりで「有理数」か「無理数」かの2択になります。このような2択のときで、直接証明をするのが難しいような場合、背理法がよく用いられます。特に、無理数は「有理数でない数」であるので、そのことを証明するためによく背理法が用いられます。「無理数であることを証明しなさい」という問題に遭遇したら、「背理法を利用できるのではないか？」と反応できるようにしておくといいと思います。

(i) 命題「$1+\sqrt{2}$ が無理数である」が成り立たない、つまり、

「$1+\sqrt{2}$が有理数である」

と仮定します。
そこで、有理数 r を用いて

$$1+\sqrt{2}=r$$

のように表せます。

(ii) (i) より

$$\begin{aligned}1+\sqrt{2}&=r\\ \sqrt{2}&=r-1\end{aligned}$$

となり、$r,\ 1$ は有理数であるので、右辺の「$r-1$」は有理数です。しかし、左辺の「$\sqrt{2}$」は無理数であるので、左辺と右辺を等号で結ぶことはおかしくなりますね。つまり、ここに矛盾が生じます。

(iii) この矛盾が生じたのは、

「$1+\sqrt{2}$が有理数である」

と仮定したことが原因ですね。つまり、「$1+\sqrt{2}$」は有理数ではないということになります。

(iv) 「$1+\sqrt{2}$」が有理数でないなら無理数です。このことから、

「$1+\sqrt{2}$は無理数である」

ということが示せたことになります。

＜証明＞

$1+\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、有理数 r を用いて

$$1+\sqrt{2}=r$$

と表せる。このことから、

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{2}&=r \\ \sqrt{2}&=r-1 \end{aligned}$$

と変形でき、$\sqrt{2}$ は無理数、$r-1$ は有理数であるので矛盾する。よって、$1+\sqrt{2}$ は無理数である。