【数学I】2次方程式と2次不等式

まなびの学園

http://www.manabino-academy.com

目次

1　2次方程式

$a,\ b,\ c$ が定数で、a が 0 でないとき、

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

という形で表される方程式は、x の 2 次式である方程式なので、x についての **2 次方程式**といいます。また、方程式を満たす x の値のことを**方程式の解**といい、方程式の解を求めることを**方程式を解く**といいます。

1.1　因数分解による解法

2 つの数 $A,\ B$ について、

$$A \times B = 0$$

となっているとき、A と B の少なくとも一方は「0」とならなければいけないので、

$$A=0 \quad \text{または} \quad B=0$$

となります。このことを利用して、2 次方程式が因数分解できるときには、

$$(px+q)(rx+s)=0 \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は定数で、} p \fallingdotseq 0,\ r \fallingdotseq 0)$$

のように変形すると

$$px+q=0 \quad \text{または} \quad rx+s=0$$

となるので、2 次方程式の解を

$$x=-\frac{q}{p},\ -\frac{s}{r}$$

と求めることができます。

【例題 1 − 1】

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-3)(x-5)=0$　　(2) $4x(x+9)=0$　　(3) $x^2-5x+6=0$

＜解説＞

(1) $(x-3)(x-5)=0$ より

$$x-3=0 \quad \text{または} \quad x-5=0$$

となるので、2 次方程式の解は

$$x=3,\ 5$$

となります。

(2) $4x(x+9)=0$ より

$$4x=0 \quad \text{または} \quad x+9=0$$

となるので、2 次方程式の解は

$$x=0,\ -9$$

となります。

(3) 因数分解をすると

$$\begin{aligned} x^2-5x+6&=0 \\ (x-2)(x-3)&=0 \end{aligned}$$

となるので、

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x-3=0$$

より、2 次方程式の解は

$$x=2,\ 3$$

となります。

1.2 解の公式による解法

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \fallingdotseq 0)$ の解を、平方根を利用して求めてみたいと思います。
左辺に平方の形を作るので、まずは計算しやすくするために、x^2 の係数である a で両辺を割って

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

次に、定数項を右辺に移項します。

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

そして、x の係数 $\dfrac{b}{a}$ の半分の 2 乗 $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ を両辺に加えて

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

すると、左辺は平方の形に変形できるので

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

となり、平方根を利用して

$$\begin{aligned}x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

のようにして求めることができ、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を **2 次方程式の解の公式**として利用します。また、b の値が偶数のとき、つまり $b = 2b'$ として、2 次方程式が、

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

のような形になるとき、2 次方程式の解の公式は、b を $2b'$ に置き換えて

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-\cancel{2}b' \pm \cancel{2}^{1}\sqrt{b'^2 - ac}}{\cancel{2}^{1}a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}\end{aligned}$$

という形になります。この公式も合わせて覚えておくと、x の係数が偶数のときには楽に 2 次方程式の解を求めることができますが、絶対に覚えなければいけないというものではありません。ただし、x の係数が偶数のときには必ず約分できることになるので、そのことをしっかりおさせておいてください。

【例題 1 − 2】

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 - 11x + 6 = 0$　　(2) $2x^2 + 5x - 2 = 0$　　(3) $3x^2 - 4x - 1 = 0$

＜解説＞

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \fallingdotseq 0)$ の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を利用して解いてみます。

(1) 解の公式に、$a = 3,\ b = -11,\ c = 6$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6} \\ &= \frac{11 \pm 7}{6} \\ &= 3,\ \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となります。このように、2 次方程式の解が根号のつかない形になる場合は、元の 2 次方程式は因数分解することができ、

$$\begin{array}{cccccr} 1 & & -3 & \longrightarrow & & -9 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & & -2 \\ \hline & & & & & -11 \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x + 6 &= 0 \\ (x-3)(3x-2) &= 0 \\ x &= 3,\ \frac{2}{3} \end{aligned}$$

のようにして解くことができます。この問題を見てもわかるように、基本的に、2 次方程式は因数分解を利用して解いた方が楽です。しかし、因数分解ができるのかできないのかを考えることに時間をかけてしまうのは時間がもったいないので、すぐに判断できない場合には、いさぎよく解の公式を利用して解いた方が賢明です。

(2) 解の公式に、$a = 2,\ b = 5,\ c = -2$ を代入して

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

となります。

(3) 解の公式に、$a=3,\ b=-4,\ c=-1$ を代入して

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}\\
&= \frac{4\pm\sqrt{28}}{6}\\
&= \frac{\cancel{4}^{2}\pm\cancel{2}\sqrt{7}}{\cancel{6}^{3}}\\
&= \frac{2\pm\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}
$$

となります。また、与えられた 2 次方程式は x の係数が偶数であるので

$$3x^2+2\cdot(-2)x-1=0$$

という 2 次方程式だと考えて、$a=3,\ b'=-2,\ c=-1$ を

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

に代入して

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot(-1)}}{3}\\
&= \frac{2\pm\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}
$$

と解くこともできます。

このように、x の係数が偶数であることを利用すると、公式を導出する段階で約分を行ったので、約分をする手間をカットすることができます。(ただし、問題によってはさらに約分をしなければいけない場合もあります。) その分計算が楽になりますが、公式をもう 1 つ余分に覚えなければいけないという手間がかかります。先ほども言った通り、どうしても覚えなければいけないという公式ではないので、余裕のある人は覚えて使ってみましょう。

1.3　2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \fallingdotseq 0)$ の解の公式を導出する過程をもう一度確認すると、次のようになりました。

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=0 \\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0 \\ x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a} \\ x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots\cdots \text{①} \end{aligned}$$

まだ解の公式を導出する途中ですが、左辺は平方の形になっているので必ず 0 以上になります。そのため、この等式が成り立つためには、等号でつながれている右辺も 0 以上にならなければいけません。

$a \fallingdotseq 0$ であるとき、$4a^2>0$ となるので、右辺の正負を決めているのは、実質的に b^2-4ac であることになります。これを、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**といい、記号 D（判別式「discriminant」の頭文字）を用いて、

判別式　$D=b^2-4ac$

のように表されます。つまり、

$D=b^2-4ac<0$

となるときは、①の等式は、

左辺 $\geqq 0$,　　右辺 <0

となり成り立ちません。つまり、この方程式を成り立たせるような実数 x は存在しないので、この 2 次方程式は実数解をもたないことになります。

逆に、$D \geqq 0$ であれば引き続いて式変形ができ、

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と見た目は解が 2 つ存在していますが、$b^2-4ac=0$ のとき、

$$x=-\frac{b}{2a}, \qquad -\frac{b}{2a}$$

と、2 つの解は一致します。これは、2 つの実数解が重なって 1 つの実数解になったと考えられるので、**重解**といいます。

これらのことをまとめると、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、

(i) 判別式 $D=b^2-4ac>0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\left(=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\right)$$

となる、異なる 2 つの実数解

(ii) 判別式 $D=b^2-4ac=0$ のとき

$$x=-\frac{b}{2a}$$

となる、1 つの実数解（重解）

(iii) 判別式 $D=b^2-4ac<0$ のとき

実数解は存在しない

ということになります。

また、(i) と (ii) を合わせて

$$D\geqq 0$$

のとき、2 次方程式は実数解をもつことになります。

【例題 1 − 3】

次の 2 次方程式の実数解はいくつあるか調べ、解があるものについてはその解も求めなさい。

(1) $x^2-6x+5=0$　　(2) $x^2-4x+4=0$

(3) $x^2-2x+3=0$　　(4) $x^2+5x-3=0$

<解説>

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式

$$D=b^2-4ac$$

を利用して解の個数を調べます。

(1) 判別式 D に、$a=1,\ b=-6,\ c=5$ を代入して

$$\begin{aligned}D&=(-6)^2-4\cdot1\cdot5\\&=16>0\end{aligned}$$

となるので、この 2 次方程式の実数解の個数は 2 個となります。また、2 次方程式の解は

$$\begin{aligned}x^2-6x+5&=0\\(x-1)(x-5)&=0\\x&=1,\ 5\end{aligned}$$

となります。もちろん、解の公式を利用して

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}\\&=\frac{6\pm4}{2}\\&=5,\ 1\end{aligned}$$

として解くこともできますが、判別式 D の値が 16 $(= 4^2)$ と平方数 (n を自然数とするとき n^2 と表される数) になっているので、解には根号がつかないことがわかります。つまり、因数分解できることがわかるので、解の公式ではなく因数分解を利用した方が楽に求めることができます。

(2) 判別式 D に、$a = 1,\ b = -4,\ c = 4$ を代入して

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

となるので、この 2 次方程式の実数解の個数は 1 個となります。また、2 次方程式の解は

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

となりますが、重解の式 $x = -\dfrac{b}{2a}$ に代入をして

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}^{\,1} \cdot 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

として求めることもできます。簡単に因数分解できる場合はそのまま因数分解すればいいのですが、複雑な式の場合には、重解の式に代入した方が簡単に求められます。

(3) 判別式 D に、$a = 1,\ b = -2,\ c = 3$ を代入して

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -8 < 0 \end{aligned}$$

となるので、この 2 次方程式は実数解をもちません。つまり、実数解の個数は 0 個となります。

(4) 判別式 D に、$a = 1,\ b = 5,\ c = -3$ を代入して

$$\begin{aligned} D &= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \\ &= 37 > 0 \end{aligned}$$

となるので、この 2 次方程式の実数解の個数は 2 個となります。また、2 次方程式の解は

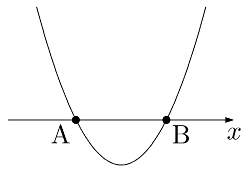
$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{aligned}$$

となります。

2　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2.1　2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

下の図のような2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフがあるとします。



このグラフと x 軸の共有点は、図の点A，Bになります。

このとき、グラフと x 軸の共有点の x 座標を求める場合、$y=0$ となる x の値になります。つまり、2次関数 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の x 座標は、

「2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解」

を求めればよいことになります。

また、2つのグラフの交点を求める場合は、連立方程式を利用することで求めることができました。そのため、$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸（直線 $y=0$）との交点（共有点の x 座標）は、

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$$

という連立方程式を解くことで求めることができると考えることができます。

【例題2－1】

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めなさい。

(1) $y=x^2-4x+3$　　(2) $y=(x+1)^2-4$　　(3) $y=-x^2-4x-4$

＜解説＞

2次関数のグラフと x 軸の共有点の「x 座標」ではなく、「座標」を求めることに注意をしてください。

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ y=0 \end{cases}$$

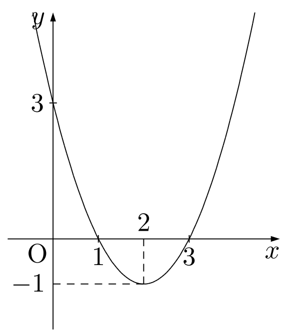
から、2次方程式 $x^2-4x+3=0$ が得られるので、この2次方程式を解くと、

$$\begin{aligned} x^2-4x+3&=0 \\ (x-1)(x-3)&=0 \\ x&=1,\ 3 \end{aligned}$$

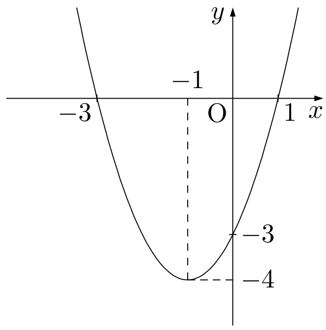
となるので、グラフと x 軸の共有点の座標は、

$(1,\ 0),\ (3,\ 0)$

となります。このとき、2次関数のグラフは右のようになっています。



(2) 連立方程式



$$\begin{cases} y=(x+1)^2-4 \\ y=0 \end{cases}$$

から、2 次方程式 $(x+1)^2-4=0$ が得られるので、この 2 次方程式を解くと、

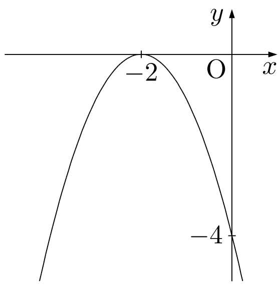
$$\begin{aligned} (x+1)^2-4&=0 \\ (x+1)^2&=4 \\ x+1&=\pm 2 \\ x&=-1\pm 2 \\ &=1,\ -3 \end{aligned}$$

となるので、グラフと x 軸の共有点の座標は、

$(1,\ 0),\ (-3,\ 0)$

となります。このとき、この 2 次関数のグラフは右のようになっています。

(3) 連立方程式



$$\begin{cases} y=-x^2-4x-4 \\ y=0 \end{cases}$$

から、2 次方程式 $-x^2-4x-4=0$ が得られるので、この 2 次方程式を解くと、

$$\begin{aligned} -x^2-4x-4&=0 \\ x^2+4x+4&=0 \\ (x+2)^2&=0 \\ x&=-2 \end{aligned}$$

となるので、グラフと x 軸の共有点の座標は、

$(-2,\ 0)$

となります。このとき、2 次関数のグラフは右のようになっています。

2.2 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

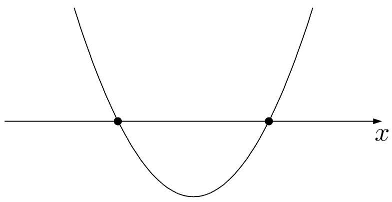
から得られる 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解でした。このことから、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の異なる実数解の個数に等しくなります。つまり、$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D\ (= b^2 - 4ac)$ とすると、判別式 D の符号によって、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の個数を、判別することができます。

(i) $D\ (= b^2 - 4ac) > 0$ のとき
$ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつので、$y = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数は 2 個になり、その共有点の x 座標は

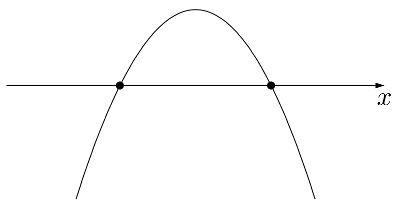
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

になります。また、このとき $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

① $a > 0$（下に凸の放物線）のとき



② $a < 0$（上に凸の放物線）のとき



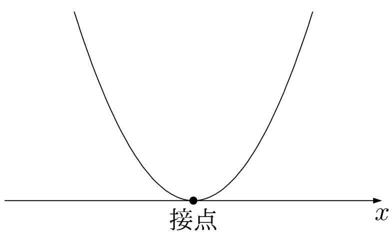
のようになります。

(ii) $D\ (= b^2 - 4ac) = 0$ のとき
$ax^2 + bx + c = 0$ は 1 つの実数解（重解）をもつので、$y = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数は 1 個になり、その共有点の x 座標は

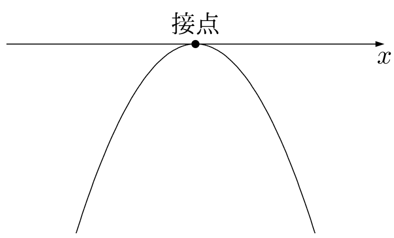
$$x = -\frac{b}{2a}$$

になります。また、このとき $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

① $a > 0$（下に凸の放物線）のとき



② $a < 0$（上に凸の放物線）のとき

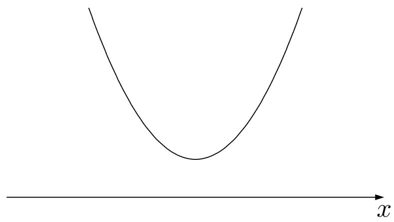


のようになり、このように 2 次関数のグラフが x 軸とただ 1 点を共有するとき、そのグラフは x 軸に**接する**といい、その共有点を**接点**といいます。

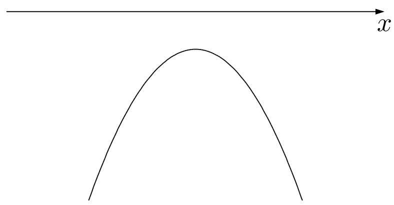
(iii) $D\ (= b^2 - 4ac) < 0$ のとき

$ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもたないので、$y = ax^2 + bx + c$ と x 軸の共有点の個数は 0 個になります。
また、このとき $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは

① $a > 0$（下に凸の放物線）のとき



② $a < 0$（上に凸の放物線）のとき



のようになります。

【例題 2 − 2】

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点はいくつありますか。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$　　(2) $y = x^2 - 4x + 4$　　(3) $y = x^2 - 2x + 3$

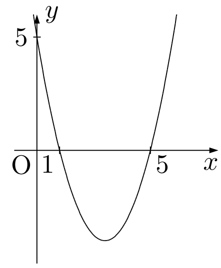
＜解説＞

$y = ax^2 + bx + c$ において $D = b^2 - 4ac$ とおき、D の符号で判別します。
もちろん、2 次関数のグラフをかけば、2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は一目瞭然です。

(1) $a = 1,\ b = -6,\ c = 5$ を代入すると、

$$\begin{aligned} D &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ &= 36 - 20 \\ &= 16 > 0 \end{aligned}$$

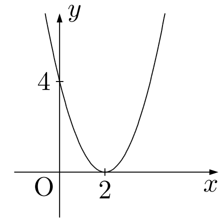
となるので、この 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は 2 個になります。また、このとき 2 次関数のグラフは右のようになっています。



(2) $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$ を代入すると、

$$\begin{aligned} D &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 16 - 16 = 0 \end{aligned}$$

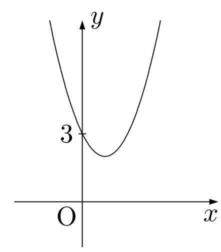
となるので、この 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個になります。また、このとき 2 次関数のグラフは右のようになっています。



(3) $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= 4 - 12 \\ &= -8 < 0 \end{aligned}$$

となるので、この 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は 0 個になります。また、このとき 2 次関数のグラフは右のようになっています。



2.3　2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

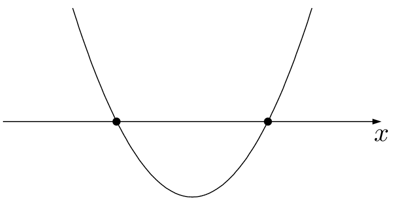
となったので、頂点の座標は

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

となります。この頂点の y 座標に着目することにより、2 次関数のグラフと x 軸との位置関係や、x 軸の共有点の個数を判断することもできます。

(ｉ) 2 次関数のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 2 個）

① $a > 0$（下に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸よりも下にあればよいので

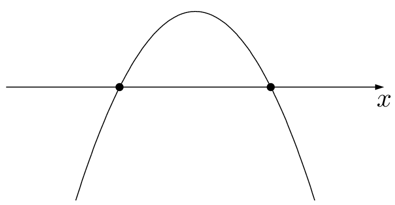
$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0 \ \cdots\cdots\ ①$$

という条件になります。ただし、$a > 0$ より $-4a < 0$ であるので、①の不等式は

$$b^2 - 4ac > 0$$

とすることができます。

② $a < 0$（上に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸よりも上にあればよいので

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0 \ \cdots\cdots\ ②$$

という条件になります。ただし、$a < 0$ より $-4a > 0$ であるので、②の不等式は

$$b^2 - 4ac > 0$$

とすることができます。

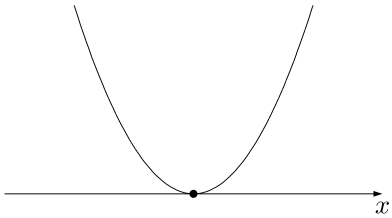
以上のことから、2 次関数のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 2 個）ためには、a の符号にかかわらず

$$b^2 - 4ac > 0$$

という条件を満たせばよいことになります。

(ii) 2 次関数のグラフと x 軸が接する（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 1 個）

① $a>0$（下に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸上にあればよいので、

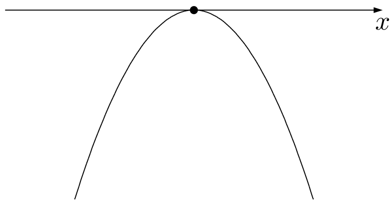
$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

という条件になります。ただし、③の方程式は、

$$b^2-4ac=0$$

とすることができます。

② $a<0$（上に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸上にあればよいので、

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \quad \cdots\cdots \text{④}$$

という条件になります。ただし、④の方程式は、

$$b^2-4ac=0$$

とすることができます。

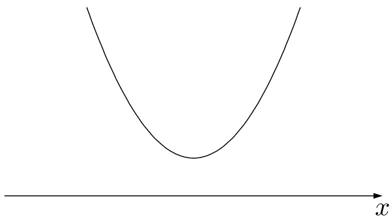
以上のことから、2 次関数のグラフと x が接する（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 1 個）ためには、a の符号にかかわらず

$$b^2-4ac=0$$

という条件を満たせばよいことになります。

(iii) 2 次関数のグラフと x 軸の共有点がない（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 0 個）

① $a>0$（下に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸よりも上にあればよいので

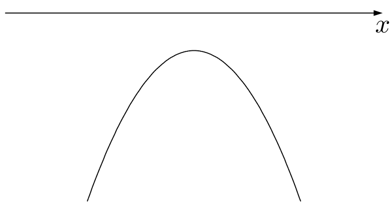
$$-\frac{b^2-4ac}{4a}>0 \quad \cdots\cdots \text{⑤}$$

という条件になります。ただし、$a>0$ より $-4a<0$ であるので、⑤の不等式は

$$b^2-4ac<0$$

とすることができます。

② $a<0$（上に凸の放物線）のとき



頂点が x 軸よりも下にあればよいので

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}<0 \quad \cdots\cdots \text{⑥}$$

という条件になります。ただし、$a<0$ より $-4a>0$ であるので、⑥の不等式は

$$b^2-4ac<0$$

とすることができます。

以上のことから、2 次関数のグラフと x が共有点を持たない（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が

0 個）ためには、a の符号にかかわらず

$$b^2 - 4ac < 0$$

という条件を満たせばよいことになります。

結局のところ、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の y 座標に着目しても、

$$D = b^2 - 4ac$$

の符号をチェックすることで、2 次関数のグラフと x 軸との位置関係や x 軸の共有点の個数を判断できるわけです。

【例題 2 − 3】

次の 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べ、共有点があるときはその共有点の座標を求めなさい。

(1) $y = x^2 - 3x - 10$　　(2) $y = -6x^2 + x + 1$

(3) $y = x^2 - 8x + 16$　　(4) $y = 3x^2 + 4x + 2$

＜解説＞

$y = ax^2 + bx + c$ において $D = b^2 - 4ac$ とおきます。

(1) $a = 1,\ b = -3,\ c = -10$ を代入すると、

$$\begin{aligned} D &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) \\ &= 49 > 0 \end{aligned}$$

となるので、グラフと x 軸は異なる 2 点で交わります。その共有点の x 座標は、$y = 0$ として得られる 2 次方程式

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

より

$$(x-5)(x+2) = 0$$
$$x = 5,\ -2$$

となるので、共有点の座標は

$$(5,\ 0),\ (-2,\ 0)$$

(2) $a = -6,\ b = 1,\ c = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} D &= 1^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 \\ &= 25 > 0 \end{aligned}$$

となるので、グラフと x 軸は異なる 2 点で交わります。その共有点の x 座標は、$y = 0$ として得られる 2 次方程式

$$-6x^2 + x + 1 = 0$$

より

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 1 &= 0 \\ (3x+1)(2x-1) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、共有点の座標は

$$\left(-\frac{1}{3},\ 0\right),\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right)$$

(3) $a = 1,\ b = -8,\ c = 16$ を代入すると

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

となるので、グラフは x 軸と接します。その接点の x 座標は、$y = 0$ として得られる 2 次方程式

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

より

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

となるので、共有点（接点）の座標は

$$(4,\ 0)$$

(4) $a = 3,\ b = 4,\ c = 2$ を代入すると

$$\begin{aligned} D &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -8 < 0 \end{aligned}$$

となるので、グラフと x 軸は共有点がありません。

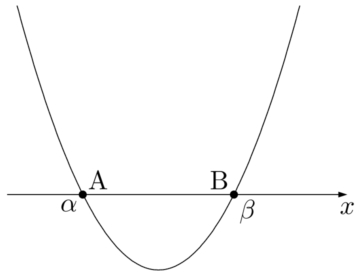
2.4　2 次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが、x 軸と 2 点 A, B で交わるとき、2 次関数のグラフが x 軸から切り取る線分は、図の AB になります。また、そのとき、2 次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ より、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

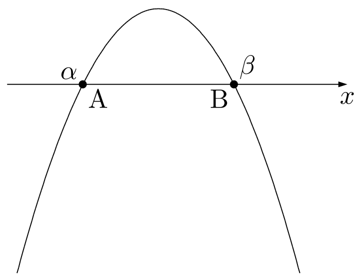
となることから、

① $a > 0$ のとき（下に凸の放物線）



$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\mathrm{AB} &= \beta - \alpha \\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{\cancel{2}^{1}\sqrt{b^2 - 4ac}}{\cancel{2}^{1}a} \\
&= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}
\end{aligned}$$

② $a < 0$ のとき（上に凸の放物線）



$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\mathrm{AB} &= \beta - \alpha \\
&= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-\cancel{2}^{1}\sqrt{b^2 - 4ac}}{\cancel{2}^{1}a} \\
&= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-a}
\end{aligned}$$

①, ②を 1 つにまとめると、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x から切り取る線分の長さは、

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

と表すことができます。

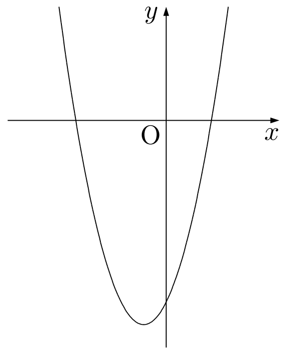
【例題 2 − 4】

次の 2 次関数のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

(1) $y = x^2 + 2x - 8$　　　　(2) $y = x^2 - 4x + 2$

<解説>

(1) $y = x^2 + 2x - 8$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、



$$
\begin{aligned}
x^2+2x-8&=0\\
(x+4)(x-2)&=0\\
x&=-4,\ 2
\end{aligned}
$$

となるので、

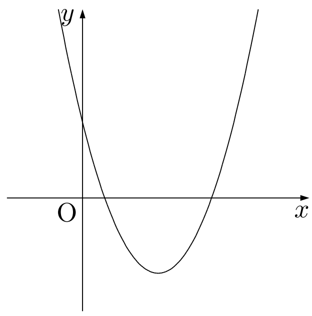
$$\text{線分の長さ}=2-(-4)=6$$

また、公式を用いて、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|\,a\,|}&=\frac{\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{|\,1\,|}\\
&=\sqrt{36}=6
\end{aligned}
$$

と求めることもできます。

(2) $y=x^2-4x+2$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、



$$
\begin{aligned}
x^2-4x+2&=0\\
x&=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}\\
&=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}\\
&=2\pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\text{線分の長さ}=(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

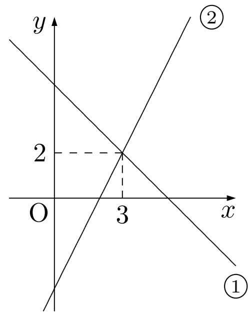
また、公式を用いて、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|\,a\,|}&=\frac{\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot2}}{|\,1\,|}\\
&=\sqrt{8}=2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

と求めることもできます。

3　2次不等式

3.1　グラフと不等式



2元1次方程式 $x+y=5$ や $2x-y=4$ などの方程式は、グラフ（直線）で表せることをすでに学習しています。また、その連立方程式

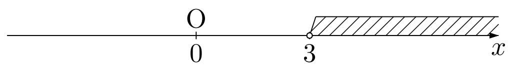
$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots\ ① \\ 2x-y=4 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

の解

$$(x,\ y)=(3,\ 2)$$

は、2つの直線の交点を考えることで求めることもできました。このように、方程式はグラフを用いることで図形的に考えることができます。

方程式と同じように $x>3$ のような不等式も、数直線を利用することで、図形的に考えることができました。



ここでは、より複雑な不等式も、グラフを利用することで解けることを学習します。

【例題3－1】

次の不等式を解きなさい。

(1) $\dfrac{1}{2}x+2>0$　　　(2) $-2x+3<0$

＜解説＞

不等式の性質を利用すると、それぞれの不等式は

(1)

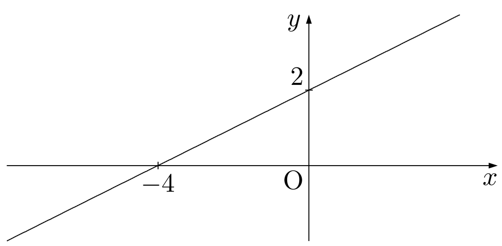
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x+2&>0 \\ x+4&>0 \\ x&>-4 \end{aligned}$$

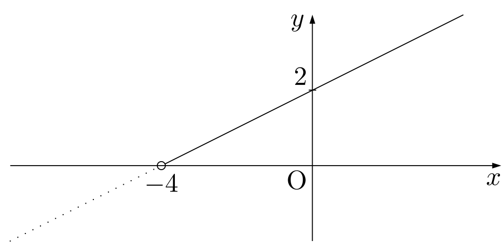
(2)

$$\begin{aligned} -2x+3&<0 \\ -2x&<-3 \\ x&>\frac{3}{2} \end{aligned}$$

と解くことができますが、これを1次関数のグラフを利用して解いてみます。

(1) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ とすると、この1次関数のグラフは次のようになります（下図左）。



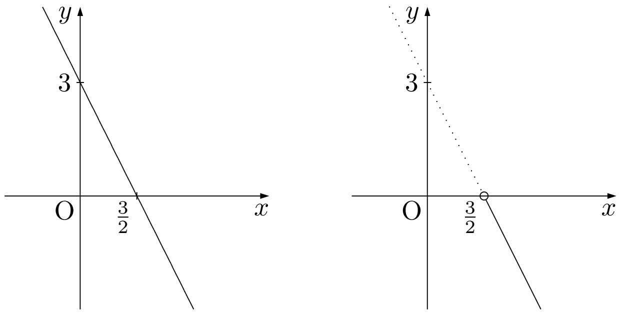


このグラフにおいて $y>0$（x 軸の上側）となるのは、右のグラフのように実線部分です。
このことから、1 次不等式 $\dfrac{1}{2}x+2>0$ は、1 次関数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ のグラフの $y>0$ となる x の範囲を求めればよいので、

$$x>-4$$

となることがわかります。

(2) $y=-2x+3$ とすると、この 1 次関数のグラフは次のようになります（下図左）。



となります。このグラフにおいて $y<0$（x 軸の下側）となるのは、右のグラフのように実線部分です。
このことから、1 次不等式 $-2x+3<0$ は、1 次関数 $y=-2x+3$ のグラフの $y<0$ となる x の範囲を求めればよいので、

$$x>\frac{3}{2}$$

となることがわかります。

このように、不等式はグラフを利用して解くことができます。

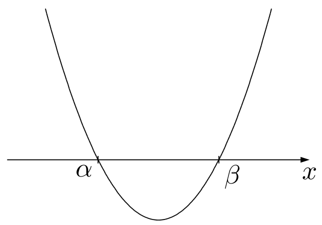
3.2　2 次不等式の解法①

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき、左辺が x の 2 次式になる不等式を x **についての 2 次不等式**といいます。$a,\ b,\ c$ を定数としたとき、

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{または} \quad ax^2+bx+c<0$$

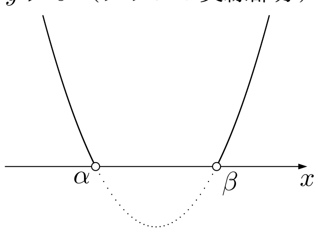
のような式のことです。そして、2 次不等式に当てはまる x の値を **2 次不等式の解**、2 次不等式の解のすべてを求めることを、**2 次不等式を解く**といいます。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ が、x 軸と $x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ という 2 点で交わるとき、グラフは次のような図になります。



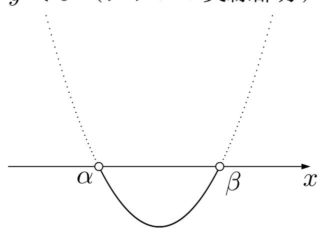
このグラフで $y>0$（x 軸の上側）および $y<0$（x 軸の下側）となる x の範囲をそれぞれ考えると、

(i) $y>0$ （グラフの実線部分）



$x<\alpha,\ \beta<x$

(ii) $y<0$ （グラフの実線部分）



$\alpha<x<\beta$

となるので、このことから、$a>0,\ \alpha<\beta$ のとき、

$ax^2+bx+c>0$ の解 : $x<\alpha,\ \beta<x$　　　　$ax^2+bx+c<0$ の解 : $\alpha<x<\beta$

となることがわかります。

【例題 3 － 2】

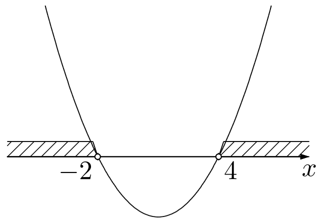
次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $(x+2)(x-4)>0$　　　　(2) $-x^2+4x+12 \geqq 0$

＜解説＞

グラフをかいて 2 次不等式を解きますが、正確なグラフではなく、x 軸との交点がわかる程度のグラフで問題ありません。

(1) $y=(x+2)(x-4)$ のグラフを考えると



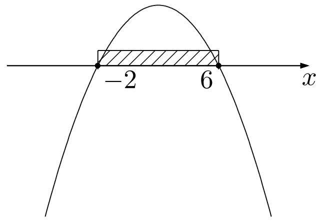
$$
\begin{aligned}
(x+2)(x-4)&=0\\
x&=-2,\ 4
\end{aligned}
$$

より、x 軸と $x=-2,\ 4$ で交わるので右図のようになります。
このグラフで $y>0$ となる x の範囲を考えると、図の斜線部分のようになるので、$(x+2)(x-4)>0$ の解は

$$x<-2,\ 4<x$$

となります。

(2) $y=-x^2+4x+12$ のグラフを考えると

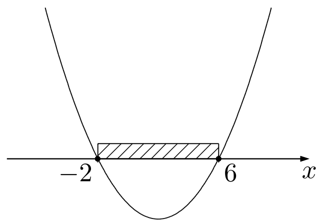


$$
\begin{aligned}
-x^2+4x+12&=0\\
x^2-4x-12&=0\\
(x-6)(x+2)&=0\\
x&=6,\ -2
\end{aligned}
$$

より、x 軸と $x=6,\ -2$ で交わるので右図のようになります。
このグラフで $y\geqq 0$ となる x の範囲を考えると、図の斜線部分のようになるので、$-x^2+4x+12\geqq 0$ の解は

$$-2\leqq x\leqq 6$$

となります。
また、不等式の両辺に「-1」をかけると、



$$
\begin{aligned}
-x^2+4x+12&\geqq 0\\
x^2-4x-12&\leqq 0
\end{aligned}
$$

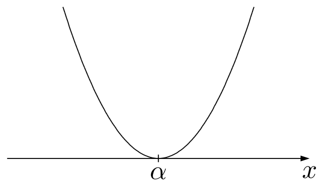
と変形できるので、$y=x^2-4x-12$ のグラフを利用することで不等式を解くこともできます。
x 軸とは $x=6,\ -2$ で交わるので、グラフは右図のようになり、$y\leqq 0$ となる x の範囲を考えれば、

$$-2\leqq x\leqq 6$$

上に凸の放物線の場合と下に凸の放物線の場合で別々に 2 次不等式を考えるのは面倒です。x の 2 次の係数が負になる 2 次不等式については、両辺に「-1」を掛けることにより、常に 2 次の係数を正の値にすることができるので、下に凸の放物線に統一したほうが 2 次不等式は考えやすいと思います。

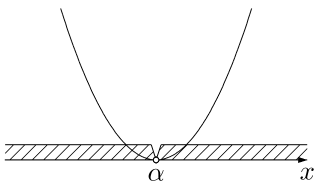
3.3 2 次不等式の解法②

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ が、x 軸と $x = \alpha$ で接するとき、グラフは次のような図になります。



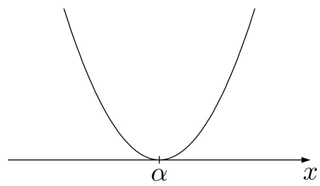
このグラフで $y > 0,\ y < 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq 0$ となる x の範囲をそれぞれ考えると、次のようになります。

(i) $y\ (= ax^2 + bx + c) > 0$



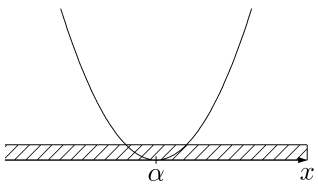
$x = \alpha$ 以外のすべての実数

(ii) $y\ (= ax^2 + bx + c) < 0$



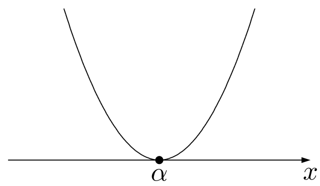
解なし

(iii) $y\ (= ax^2 + bx + c) \geqq 0$



すべての実数

(iv) $y\ (= ax^2 + bx + c) \leqq 0$



$x = \alpha$

【例題 3 − 3】

次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 6x + 9 \geqq 0$　　(2) $x^2 - 8x + 16 \leqq 0$

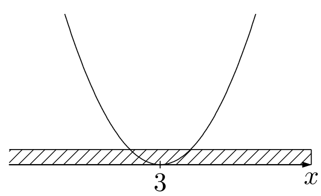
＜解説＞

グラフをかいて 2 次不等式を解きますが、正確なグラフではなく、x 軸との共有点がわかる程度のグラフで問題ありません。

(1) $y = x^2 - 6x + 9$ のグラフは、

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 6x + 9 \\
&= (x-3)^2
\end{aligned}
$$

より、頂点 $(3,\ 0)$ で下に凸の放物線になるので右図のようになります。

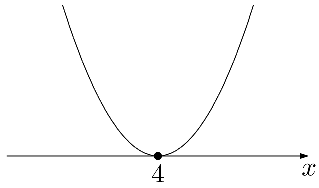


このグラフから $y \geqq 0$ となる x の範囲を考えて、2 次不等式 $x^2 - 6x + 9 \geqq 0$ の解は、

すべての実数

となります。

(2) $y = x^2 - 8x + 16$ のグラフを考えると



$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x-4)^2 \end{aligned}$$

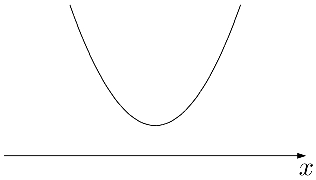
より、頂点 (4, 0) で下に凸の放物線になるので右図のようになります。
このグラフから $y \leqq 0$ となる x の範囲を考えて、2 次不等式 $x^2 - 8x + 16 \leqq 0$ の解は、

$$x = 4$$

となります。

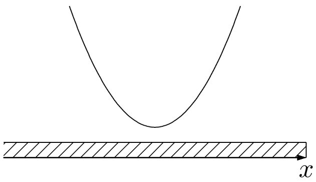
3.4　2 次不等式の解法③

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ が、x 軸と共有点をもたないとき、グラフは次のような図になります。



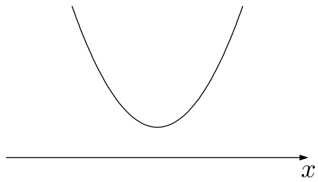
このグラフで $y > 0,\ y < 0$ となる x の範囲をそれぞれ考えると次のようになります。

(i) $y\ (= ax^2 + bx + c) > 0$



すべての実数

(ii) $y\ (= ax^2 + bx + c) < 0$



解なし

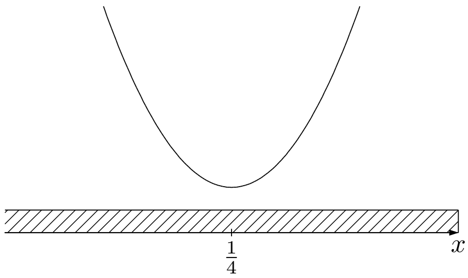
【例題 3 − 4】

次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $2x^2 - x + 3 \geqq 0$　　(2) $2x^2 + 3x + 8 < 0$

＜解説＞

(1) $y = 2x^2 - x + 3$ のグラフを考えると



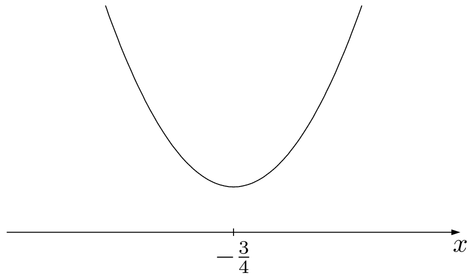
$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - x + 3 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 3 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \cancel{2}^{1} \times \frac{1}{\cancel{16}_{8}} + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \end{aligned}$$

より、頂点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{23}{8}\right)$ で下に凸の放物線です。
このグラフから、$y \geqq 0$ となる x の範囲を考えて、$2x^2 - x + 3 \geqq 0$ の解は、

すべての実数

となります。

(2) $y = 2x^2 + 3x + 8$ のグラフを考えると



$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 + 3x + 8 \\
&= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 8 \\
&= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 8 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \cancel{2}^{1} \times \frac{9}{\cancel{16}^{8}} + 8 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{55}{8}
\end{aligned}
$$

より、頂点 $\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{55}{8}\right)$ で下に凸の放物線です。
このグラフから、$y < 0$ となる x の範囲を考えて、2 次不等式 $2x^2 + 3x + 8 < 0$ の解は、

解なし

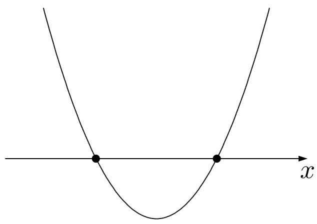
となります。

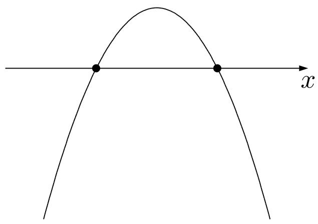
3.5　2 次関数のグラフと x 軸の共有点

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について、$D = b^2 - 4ac$ とすると、

(i) $D > 0$ のとき

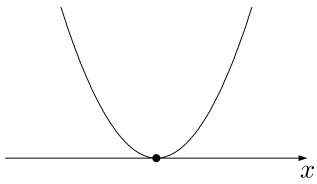
2 次関数のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 2 個）

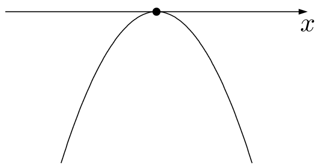




(ii) $D = 0$ のとき

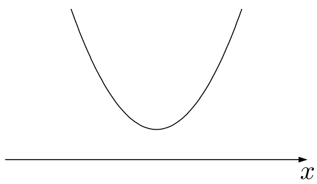
2 次関数のグラフと x 軸が接する（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 1 個）

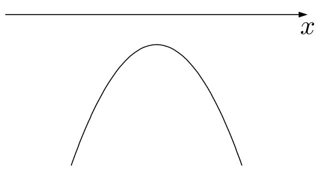




(iii) $D < 0$ のとき

2 次関数のグラフと x 軸の共有点がない（2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数が 0 個）





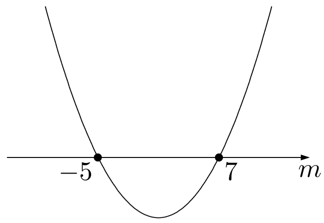
という関係が成り立ちました。このことから、D の符号を利用してそれぞれの条件を求めることができます。

【例題 3 − 5】

2 次関数 $y = x^2 + (m+1)x + m + 9$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようになるとき、定数 m の値の範囲を求めなさい。

(1) 異なる 2 点を共有する　　(2) 共有点をもつ　　(3) 共有点をもたない

＜解説＞



$y=x^2+(m+1)x+m+9$ について、$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot(m+9)$ とすると、

$$\begin{aligned}D&=(m+1)^2-4\cdot1\cdot(m+9)\\&=m^2+2m+1-4m-36\\&=m^2-2m-35\\&=(m-7)(m+5)\ \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

(1) 異なる 2 点を共有するための条件は $D>0$ であるので、①より

$$\begin{aligned}D=(m-7)(m+5)&>0\\m<-5,\ 7&<m\end{aligned}$$

(2) 「共有点をもつ」には、共有点の個数が 2 個または 1 個である場合なので、

$$D>0\quad \text{または}\quad D=0$$

のとき。つまり、

$$D\geqq0$$

であればよいので、①より

$$\begin{aligned}D=(m-7)(m+5)&\geqq0\\m\leqq-5,\ 7&\leqq m\end{aligned}$$

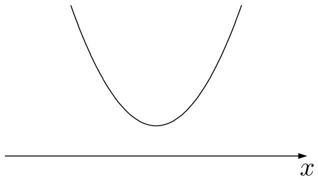
(3) 共有点をもたないための条件は $D<0$ であるので、①より

$$\begin{aligned}D=(m-7)(m+5)&<0\\-5<m&<7\end{aligned}$$

3.6　グラフが x 軸より一方の側にある条件

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが「x 軸より一方の側にある」とは、次のような場合のことをいいます。

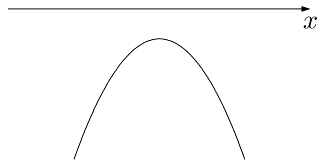
① 2 次関数のグラフが常に x 軸の上側



下に凸の放物線で x 軸と共有点をもたなければよいので、次の条件が成り立つときになります。

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad D\ (= b^2 - 4ac) < 0$$

② 2 次関数のグラフが常に x 軸の下側



上に凸の放物線で x 軸と共有点をもたなければよいので、次の条件が成り立つときになります。

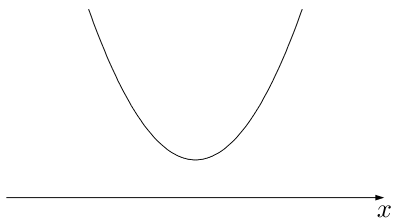
$$a < 0 \quad \text{かつ} \quad D\ (= b^2 - 4ac) < 0$$

例題 3 − 6

関数 $y = 2x^2 - (a+1)x + a + 7$ のグラフが、常に x 軸の上側になるような a の範囲を求めなさい。

＜解説＞

2 次関数のグラフが常に x 軸の上側になるには、右のグラフのように、下に凸の放物線で、x 軸と共有点をもたない場合です。



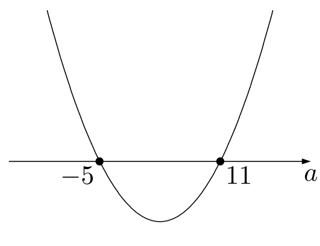
関数 $y = 2x^2 - (a+1)x + a + 7$ のグラフは、2 次の係数が正であるので下に凸の放物線です。そのため、条件を満足するためには、x 軸と共有点をもたなければよいので、

$$D = (a+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a+7)$$

とすると、$D < 0$ であればよいことになります。

このことから、

$$\begin{aligned} D = (a+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a+7) &< 0 \\ a^2 + 2a + 1 - 8a - 56 &< 0 \\ a^2 - 6a - 55 &< 0 \\ (a-11)(a+5) &< 0 \\ -5 < a &< 11 \end{aligned}$$

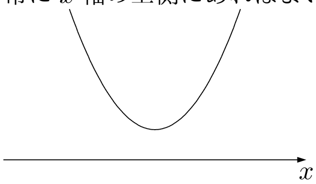


3.7 絶対不等式

不等式の解が「すべての実数」となるようなものを、**絶対不等式**といいます。

① $ax^2 + bx + c > 0$

この 2 次不等式の解が「すべての実数」となるためには、$y = ax^2 + bx + c$ のグラフが次のように、常に x 軸の上側にあればよいことになります。



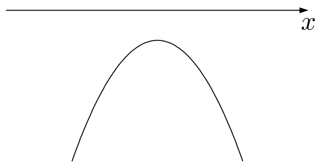
つまり、下に凸の放物線で x 軸と共有点をもたなければよいので、

$$a > 0 \quad \text{かつ}\ D\ (= b^2 - 4ac) < 0$$

という条件を満たせばよいことになります。

② $ax^2 + bx + c < 0$

この 2 次不等式の解が「すべての実数」となるためには、$y = ax^2 + bx + c$ のグラフが次のように、常に x 軸の下側にあればよいことになります。



つまり、上に凸の放物線で x 軸と共有点をもたなければよいので、

$$a < 0 \quad \text{かつ}\ D\ (= b^2 - 4ac) < 0$$

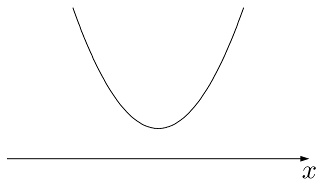
という条件を満たせばよいことになります。

例題 3 − 7

x がどのような数であっても、不等式 $x^2 - (2a-1)x + a^2 > 0$ が成り立つように、a の範囲を求めなさい。

<解説>

$y = x^2 - (2a-1)x + a^2$ とすると、



「x がどのような数であっても、$x^2 - 2(2a-1)x + a^2 > 0$ が成り立つ」

ということは、

「すべての実数 x について、関数 $y = x^2 - (2a-1)x + a^2$が $y > 0$」

つまり、

「関数 $y = x^2 - (2a-1)x + a^2$のグラフが、常に x 軸の上側にある」

と言い換えることができます。

このことから、2 次関数のグラフが下に凸の放物線で、x 軸と共有点をもたなければよいことになります。関数 $y = x^2 - (2a-1)x + a^2$ は下に凸の放物線であるので、「x 軸と共有点をもたない」という条件を満たせばよく、

$$D = (2a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2$$

とすると、$D < 0$ であればよいので、

$$
\begin{aligned}
D = (2a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2 &< 0 \\
\cancel{4a^2} - 4a + 1 - \cancel{4a^2} &< 0 \\
-4a &< -1 \\
a &> \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

3.8 連立 2 次不等式

すでに学習しているように、複数の方程式や不等式を組み合わせたものを**連立方程式**であったり、**連立不等式**といいました。ここで学習するのは、次のように複数の 2 次不等式を組み合わせたもので、**連立 2 次不等式**といいます。

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & (a,\ b,\ c\ \text{は定数}) \\ px^2+qx+r<0 & (p,\ q,\ r\ \text{は定数}) \end{cases}$$

連立 2 次不等式の解法手順は、すでに学習している連立不等式と同様にして、

(i) 各不等式を解く。
(ii) 各不等式の解を数直線上に図示し、共通範囲を求める。

となります。

【例題 3 − 8】

次の連立不等式を解きなさい。

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \geqq 0 \\ 2x^2+3x>-4x-3 \end{cases}$$

＜解説＞

与えられた不等式を次のように番号をつけます。

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \geqq 0 & \cdots\cdots\ ① \\ 2x^2+3x>-4x-3 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

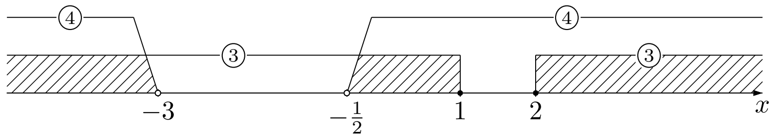
① より

$$\begin{aligned} x^2-3x+2 &\geqq 0 \\ (x-1)(x-2) &\geqq 0 \\ x \leqq 1,\ 2 &\leqq x \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

② より

$$\begin{aligned} 2x^2+3x &> -4x-3 \\ 2x^2+7x+3 &> 0 \\ (2x+1)(x+3) &> 0 \\ x<-3,\ -\frac{1}{2} &< x \qquad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

よって、③, ④の共通範囲を考えて



$$x<-3,\quad -\frac{1}{2}<x \leqq 1,\quad 2 \leqq x$$